Conjetura de Baum-Connes

en algunos tipos de foliaciones

Marta MACHO STADLER
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas
Apartado 644. 48080 Bilbao
e-mail: MTPMASTM@lg.ehu.es

Es de sobra conocido que para cada espacio localmente compacto M, la C*-álgebra $C_0(M)$ de las funciones continuas nulas en el infinito, permite "reconstruir" M, y que existe un isomorfismo entre la *K-teoría topológica* de M y la *K-teoría analítica* de $C_0(M)$.

La *conjetura de Baum-Connes*, independientemente de su significado en el marco de la Teoría del Indice, busca establecer un análogo de este isomorfismo para ciertos espacios "singulares": los espacios de hojas de foliaciones.

De manera más precisa, si $\mathcal{F}$ es una foliación de clase C^∞ sobre una variedad M:

(i) la dinámica de $\mathcal{F}$ viene descrita por su grupoide de holonomía

$$Hol(\mathcal{F}) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\Longrightarrow}} M,$$

que es un grupoide de Lie que se puede considerar como una desingularización del espacio de las hojas $M/\mathcal{F}$;

(ii) a $Hol(\mathcal{F})$, como a todo grupoide de Lie, se le puede asociar una C*-álgebra de funciones $C^*(Hol(\mathcal{F}))$ - que se reduce "esencialmente" al álgebra de funciones continuas nulas en el infinito sobre la base si $\mathcal{F}$ está definido por una submersión - que puede interpretarse como el "espacio de las funciones continuas nulas en el infinito" sobre $M/\mathcal{F}$;

(iii) además, procediendo por analogía con el caso de grupos, se puede construir para $Hol(\mathcal{F})$ un *espacio clasificante* $B(Hol(\mathcal{F}))$ sobre el cual $Hol(\mathcal{F})$ actúa libre y propiamente, pero que no es en general una variedad (y ni siquiera posee el tipo de homotopía de una variedad).

.

Intuitivamente, $Hol(\mathcal{F})$, $C^*(Hol(\mathcal{F}))$ y $B(Hol(\mathcal{F}))$ son objetos completamente determinados por $\mathcal{F}$ y portadores de la misma "información".

La conjetura de Baum-Connes afirma que la K-teoría de la C*-álgebra $C^*(Hol(\mathcal{F}))$ (K-teoría "analítica" del espacio de hojas $M/\mathcal{F}$) está - en lo esencial - determinada por $B(Hol(\mathcal{F}))$.

En concreto, busca demostrar que (en los casos en que no hay torsión) es canónicamente isomorfa a ciertos grupos $K_*(B(Hol(\mathcal{F})))$ asociados al espacio clasificante $B(Hol(\mathcal{F}))$ de una manera puramente geométrica (K-teoría "topológica" de $M/\mathcal{F}$).

Una situación particularmente "favorable" es la de una foliación $(M, \mathcal{F})$ para la cual el grupoide de holonomía $Hol(\mathcal{F}) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\Longrightarrow}} M$ tiene fibras (α ó β-fibras) contráctiles (foliación *clasificante*).

En este caso, $B(Hol(\mathcal{F}))$ se identifica con la variedad M y la K-teoría topológica del espacio de hojas se reduce a la K-teoría de M (o de $C_0(M)$).

Incluso en este caso simple, no se puede dar una formulación inmediata de la conjetura de Baum-Connes, puesto que el isomorfismo "previsto" está definido en términos de una *correspondencia K-orientada* de grupoides: se trata de la *correspondencia fundamental*,

$$M \to Hol(\mathcal{F}),$$

que puede verse intuitivamente como la proyección de M sobre $M/\mathcal{F}$.

.

Nuestro estudio se centra en las foliaciones clasificantes, o más generalmente en ciertas foliaciones que se pueden llevar a foliaciones clasificantes mediante manipulaciones topológicas simples (como equivalencias topológicas, equivalencias de Morita, ...): foliaciones casi sin holonomía y algunos otros ejemplos no triviales de foliaciones (foliación de Sacksteder, foliación de Hirsch, foliaciones $\mathbb{Z}$-periodicas, ...).

En estos caso, se intenta probar la "formulación reducida" de la conjetura de Baum-Connes, enunciada en los siguientes términos:

Teorema.- *Si el grupoide de holonomía* $Hol(\mathcal{F}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\Longrightarrow}} M$ *es clasificante y K-orientado, existe un isomorfismo entre* $K^*(M)$ *y* $K_*(B(Hol(\mathcal{F})))$.

La conjetura de Baum-Connes se ha demostrado ya en algunos ejemplos de foliaciones, pero se trata de situaciones que se remiten esencialmente a:

(i) el isomorfismo de Thom de A. Connes [C1],

(ii) las foliaciones de Reeb consideradas por A.M. Torpe [T].

Cabe destacar que, en ambos casos, se trata de foliaciones clasificantes.

.

Las técnicas que utilizamos, se pueden resumir en los siguientes términos:

Si $(M, \mathcal{F})$ es una variedad foliada y U es un abierto saturado para $\mathcal{F}$, provisto de la foliación inducida $\mathcal{F}_U$, el grupoide de holonomía $Hol(\mathcal{F}_U)$ es, por supuesto, la restricción de $Hol(\mathcal{F})$ a U y $C^*(Hol(\mathcal{F}_U))$ es un ideal de $C^*(Hol(\mathcal{F}))$.

Por el contrario, a pesar de que $F = M - U$ es una variedad, la restricción del grupoide de holonomía $Hol(\mathcal{F})$ a F es un grupoide de Lie, pero no es en general un grupoide de holonomía.

Sin embargo, imponiendo hipótesis adecuadas, se obtiene una sucesión exacta de C*-álgebras,

$$0 \to C^*(Hol(\mathcal{F}_U)) \to C^*(Hol(\mathcal{F})) \to C^*(Hol(\mathcal{F})|_F) \to 0,$$

que proporciona una sucesión exacta larga en K-teoría.

Esta sucesión está ligada por medio de "correspondencias K-orientadas" a la sucesión asociada en K-teoría a la sucesión exacta corta,

$$0 \to C_0(U) \to C_0(M) \to C_0(F) \to 0.$$

El primer resultado esencial es que el diagrama en K-teoría así obtenido es conmutativo.

Finalmente, se descomponen las foliaciones clasificantes consideradas en "trozos elementales", y utilizando esta conmutatividad junto a otras propiedades del diagrama de K-teoría, se consigue demostrar la conjetura de Baum-Connes paso a paso.

.

Bibliografía

[BC] **P. Baum and A. Connes** *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, preprint, 1982.

[B] **B Blackadar** *K-theory for Operator Algebras*, MSRI Lecture Notes 5, Springer Verlag New York Inc., 1986.

[C1] **A. Connes** *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of* $\mathbb{R}$, Advances in Mathematics 39, 31-55, 1981.

[C2] **A. Connes** *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Symp. in Pure Maths. 38, 521-628, 1982.

[H] **A. Haefliger** *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Astérisque 116, 70-97, 1984.

[HH] **G. Hector and U. Hirsch** *Introduction to the geometry of foliations (Part A and Part B)*, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1986-87.

[HS] **M. Hilsum et G. Skandalis** *Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)*, Annales Sci. Ecole Normale Supérieure 20, 325-390, 1987.

[T] **A.M. Torpe** *K-theory for the leaf space of foliations by Reeb components*, J. of Funct. Analysis 61, 15-71, 1985.

[W] **H.E. Winkelkemper** *The graph of a foliation*, Ann. Global Analysis and Geometry 3, 51-75, 1983.