HOMOLOGIA SINGULAR

Curso 2004/2005

Prof. Marta MACHO STADLER

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: *mtpmastm@lg.ehu.es*
http://www.ehu.es/~mtwmastm
Tlf: 946015352 Fax: 946012516

Portada: Toro modular, realizado con 555 piezas de papel plegado, ensambladas sin usar pegamento alguno. El resultado es un toro poliédrico formado a partir de pentágonos, hexágonos y heptágonos, usándose una pieza por cada arista. Los 10 pentágonos de la parte exterior (en rojo) le dan curvatura positiva, mientras que los 10 heptágonos de la parte interior (en morado) proporcionan la curvatura negativa necesaria.

El diseño de las piezas se debe a **Tom Hull** y el del toro de la fotografía a **Roberto Gretter**. El modelo de la portada ha sido plegado por **José Ignacio Royo Prieto**.

Indice

Introducción

Irás naciendo poco
a poco, día a día.
Como todas las cosas
que hablan hondo, será
tu palabra sencilla.

“El libro”
José Hierro (1922-2002)

La *teoría de homología* empieza tradicionalmente como una rama de la topología, siendo Poincaré el primero en dar una definición de este concepto en su *“Analysis Situs”* en 1895. Tiene que ver con la siguiente situación: se dispone de un espacio topológico *complicado* y se desea obtener información sencilla relacionada con el proceso de *contar agujeros* de cualquier dimensión, obteniendo ciertos invariantes lineales. Se puede pensar en la homología como en una construcción de invariantes lineales asociados a una situación no lineal.

La homología es una herramienta algebraica fundamental que puede entenderse como un modo de obtener información sobre espacios topológicos: se trata de una cierta álgebra extraida de la geometría.

Otro origen de la teoría de homología proviene, por ejemplo, de Hilbert y del estudio de polinomios. Los polinomios son funciones que no son lineales y se pueden multiplicar para obtener otros de grados mayores; Hilbert considera *ideales*, es decir, combinaciones lineales de polinomios con ceros comunes, y estudia los generadores de estos ideales (que pueden ser redundantes) y sus relaciones y después las relaciones entre las relaciones. Obtiene así una jerarquía entre tales relaciones, llamadas *syzygies de Hilbert*: esta teoría de Hilbert es una manera sofisticada de intentar reducir una situación no lineal (el estudio de polinomios) a una situación lineal. Esencialmente, Hilbert produce un complicado sistema de relaciones lineales, que codifica cierta información sobre objetos no lineales, los polinomios. Esta teoría algebraica es de hecho paralela a la teoría topológica, y se fusionan ambas en lo que se denomina el *álgebra homológica*.

La *geometría algebraica*, uno de los grandes logros matemáticos de los años 1950, es el desarrollo de la teoría de cohomología de haces y su extensión a la geometría por parte de la escuela francesa de Leray, Cartan, Serre y Grothendieck: se observa una combinación de las ideas topológicas de Riemann-Poincaré, las algebraicas de Hilbert, y algunas analíticas introducidas fundamentalmente para *medir* bien.

La homología tiene muchas aplicaciones aún en otras ramas del álgebra: los grupos finitos o las álgebras de Lie tienen grupos de homología asociados. En teoría de números hay importantes aplicaciones de la teoría de homología, a través del grupo de Galois.

En este curso, vamos a pasar de espacios topológicos X a módulos sobre un anillo R, $H_0(X;R)$, $H_1(X;R)$, ..., de modo que toda aplicación continua $f\colon X \longrightarrow Y$, tenga asociado, para cada $n \geq 0$, un homomorfismo $H_n(f)\colon H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R)$, verificando las siguientes propiedades *esenciales*

(i) si f es una equivalencia de homotopía (en particular, si f es un homeomorfismo), $H_n(f)$ es un isomorfismo; es decir, la estructura de $H_n(X;R)$ depende sólo del tipo de homotopía del espacio;

(ii) si f_1 y f_2 son homótopas, entonces $H_n(f_1) = H_n(f_2)$, para cada $n \geq 0$;

(iii) $H_0(X;R)$ indica el número de componentes conexas por caminos de X y si $n > 0$, $H_n(X;R)$ tiene algo que ver con una cierta *conexión de orden superior*;

(iv) si X es conexo por caminos, $H_1(X;\mathbb{Z})$ es el *abelianizado* del grupo fundamental del espacio $\pi_1(X)$;

(v) si X es una n-variedad compacta y conexa, el grupo $H_n(X;R)$ es cíclico infinito y para $q > n$ es $H_q(X) = 0$.

Vamos a ver algunas de las aplicaciones más importantes de la teoría de homología (teoría del grado, teoremas de Jordan-Brouwer sobre invarianza de dimensión y dominio, etc.) y finalizaremos viendo su relación con la geometría (más exactamente, con la teoría de cohomología), a través de algunos de los más conocidos teoremas de dualidad.

Una revisión histórica de la homología

Torres se doran amigas
de las mieses y los cerros,
y entre la luz y las piedras
hay retozos de aleteos.

“El aire”
Jorge Guillén (1893-1984)

2.1 Los inicios de la teoría

El concepto de homología surge a finales del siglo XIX, como consecuencia del estudio de la geometría de dimensión n. E. Betti (1823-1892) estudia la *multiconexión* de figuras de dimensión n, generalizando el concepto en dimensión 3 estudiada por J.B. Listing (1808-1882). Para ello, utiliza *hipersuperficies sin borde*, análogas a las curvas cerradas de Riemann. Con este nuevo concepto, encuentra una caracterización *igualdad* entre dos superficies. Sin embargo, es H. Poincaré (1854-1912) quien, partiendo del trabajo intuitivo de Betti, desarrolla una teoría más general.

Poincaré es el primero que se plantea operar con objetos topológicos en lugar de con números, como hasta entonces se venía haciendo. Motivado por el estudio de la integración sobre variedades de dimensión arbitraria, Poincaré introduce en 1895 el nuevo concepto de *homología* en su *“Analysis Situs”*

Definición 2.1 Dada una variedad de dimensión n V y r subvariedades de dimensión p conexas $v_1, \dots, v_r$, se dice que existe una *homología* entre ellas, $v_1 + \cdots + v_r \sim 0$, si para algún entero k, el conjunto de k copias de cada subvariedad v_i, forma la frontera de otra subvariedad conexa de dimensión $(p+1)$ W de V.

Poincaré entiende por *variedad* el conjunto de ceros de un sistema adecuado de funciones, es decir, es la generalización a dimensiones superiores del concepto de curva en dimensión 1 o superficie en dimensión 2. A partir de esta definición, introduce el concepto de variedad *negativa* $-v$ (entendiéndola como la variedad v con orientacion opuesta) y observa que es posible, formalmente, sumar, restar y multiplicar por enteros las variedades, de manera análoga a las ecuaciones ordinarias. A partir de aquí denomina a un conjunto de variedades *linealmente independiente* si no existe ninguna relación de homología con coeficientes enteros entre ellas.

En honor a E. Betti, Poincaré define los llamados *números de Betti*, que pretenden dar una idea de conexión de *orden superior*

Definición 2.2 Dada una variedad V, el *número de Betti* de dimensión p de V, b_p, es el número máximo de subvariedades cerradas (i.e. sin borde) de dimensión p, más uno, contenidas en V y que son linealmente independientes.

Poincaré utiliza en realidad una unidad más que Betti en sus *números de conexión*. En términos más actuales, definimos *número de Betti* como

Definición 2.3 Sea V una variedad. El *número de Betti de dimensión p de V* es el máximo número de p-ciclos independientes que existen en una triangulación arbitraria de V.

En su *"Analysis Situs"*, Poincaré presenta uno de sus principales resultados en homología conocido como el **teorema de dualidad**, en el que prueba el siguiente resultado

Teorema 2.4 *Dada una variedad de dimensión n V cerrada, orientable y conexa, es $b_p = b_{n-p}$ para $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, donde b_p es el número de Betti de dimensión p.*

Sin embargo, la prueba de Poincaré no es muy clara, y contiene varios defectos, que son corregidos posteriormente por J.W. Alexander (1888-1971) en 1915. Poincaré introduce también los conceptos de *grupo fundamental* y *coeficiente de torsión*, que juegan actualmente un papel de gran importancia en topología.

L. Euler (1707-1783) define un invariante topológico conocido actualmente con el nombre de *característica de Euler*

Definición 2.5 Sea X una variedad de dimensión n con una triangulación arbitraria. Se define la *característica de Euler de X* como $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$, donde a_i denota el número de caras de dimensión i de la triangulación.

Los números de Betti de dimensión p se relacionan con la característica de Euler a través de una importante fórmula que Poincaré demuestra en la última parte de su *"Analysis Situs"*. Actualmente esta fórmula se conoce como **fórmula de Euler-Poincaré**

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r a_r = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r b_r$$

donde el término de la izquierda es la característica de Euler de una variedad dada V y los b_r son los números de Betti de dimensión r de V.

Las ideas de Poincaré son la base sobre la que se va desarrollando la *teoría de homología* moderna. Hasta mediados de los años 20, los topólogos siguen estudiando la homología desde un punto de vista geométrico como había hecho Poincaré. Además, siguen considerando las subvariedades de dimensión p como solución de un sistema de ecuaciones. Un cambio importante supone considerar dichas variedades como un conjunto de variedades *modelo* de dimensión p, donde una variedad modelo es la imagen continua de un *triángulo de dimensión p*.

En 1926, J.W. Alexander realiza las siguientes definiciones

Definición 2.6 (i) un p-*símplice* es el análogo a un triángulo de dimensión p, es decir, es la envolvente convexa de $p+1$ puntos;

(ii) un *complejo* es un conjunto finito de símplices de cualquier dimensión de manera que la intersección de dos cualesquiera de ellos no contiene un punto interior, y tal que toda cara de cada símplice del complejo es a su vez un símplice del complejo;

(iii) una k-*cadena* es una combinación lineal de k-símplices. Se distingue entre

(a) una k-*cadena elemental* es la k-ésima cara de un p-símplice;

(b) una k-*cadena arbitraria* es una combinación lineal de k-cadenas elementales con coeficientes enteros;

(iv) se llama k-*borde* a la suma de todos los $(k-1)$-símplices de una k-cadena.

(v) se llama k-*ciclo* a una k-cadena cuyo k-borde es cero.

Basándose en las nuevas definiciones, Alexander redefine el concepto de homología

Definición 2.7 Un k-ciclo K es *homólogo a cero*, $K \sim 0$, si es el borde de una $(k+1)$-cadena L. Y dos k-cadenas K y K' son *homólogas*, $K \sim K'$, si $K - K' \sim 0$.

Alexander también redefine el *número de Betti de dimensión* p como el número máximo de p-ciclos que son linealmente independientes respecto a un borde, es decir, tales que ninguna combinación lineal es homóloga a cero (el resultado es una unidad menor que en la definición de Poincaré). Considerando entonces el conjunto de ciclos con la operación suma, E. Noether (1882-1935) observa en 1925 que hay una estructura de grupo bajo las definiciones dadas por Alexander. A partir de este momento se comienza a estudiar la homología desde un punto de vista algebraico además del geométrico exclusivo utilizado hasta entonces.

2.2 El comienzo de la algebrización

E. Noether, tras asistir a los cursos de topología impartidos por P. S. Alexandroff (1896-1982) sugiere definir el p-*grupo de Betti* como el grupo cociente de todos los p-ciclos sobre el subgrupo de p-ciclos homólogos a cero (es decir, los p-bordes). Noether crea un nuevo campo al definir el concepto *homología* en un ámbito puramente algebraico. Previamente, varios matemáticos - entre ellos J.W. Alexander y S. Lefschetz (1884-1972) - habían definido los conceptos de cadena y ciclo con coeficientes no necesariamente enteros, generalizando así la homología: por ejemplo, consideran símplices no orientados tomando como coeficientes de las cadenas números enteros módulo 2, más adelante números enteros módulo n, y más tarde números racionales. E. Noether reformula esta teoría de cadenas y ciclos en el lenguaje de la teoría de grupos: cadenas de la misma dimensión pueden *sumarse formalmente*, adicionando los coeficientes correspondientes a un mismo símplice, y de manera análoga los ciclos. De esta forma, cadenas y ciclos forman grupos abelianos libres. Noether observa en particular que los bordes de las cadenas definen un homomorfismo de grupos abelianos entre el grupo de las j-cadenas y el de las $(j-1)$-cadenas, $\delta_j : C_j \longrightarrow C_{j-1}$, y verifican la identidad $\delta_j \circ \delta_{j+1} = 0$, es decir, $Im(\delta_{j+1}) \subset Ker(\delta_j)$, surgiendo así una nueva definición de homología como $H_j = Ker(\delta_j)/Im(\delta_{j+1})$.

H. Hopf (1894-1971) pasa su primer año de carrera en Götingen, y utiliza las nuevas definiciones de Noether para elaborar gran parte de sus teorías.

En 1927, L. Vietoris (1891-2002) define el grupo de homología $H(A)$ de un complejo A, como Noether había sugerido, es decir, como el cociente del grupo de ciclos módulo los bordes de las cadenas.

Un año después, W. Mayer (1887-1948) publica un sistema de axiomas para definir los grupos de homología, y lo hace de manera totalmente algebraica

Definición 2.8 Un *anillo de complejos* Σ es una colección de complejos $\{K^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$, tales que

(i) los elementos de dimensión p forman un grupo abeliano K^p finitamente generado,

(ii) para cada $p \in \mathbb{Z}$ se define un homomorfismo $R_p : K^p \longrightarrow K^{p-1}$, con $R_{p-1}(R_p(K^p)) = 0$.

R_p suele denotarse simplemente R, quedando así la tercera condición $R^2 = 0$.

Con estos axiomas, Mayer define los siguientes conceptos

Definición 2.9 (i) el *grupo de p-ciclos* $C_p = \{K \in K^p, \text{tales que } R(K) = 0\} = Ker(R_p)$;

(ii) el *grupo de p-bordes* es el grupo $B_p = R(K^{p+1}) = Im(R_{p+1})$.

Y modificando un poco la definición de Hopf, Mayer define el grupo de homología de un anillo

Definición 2.10 Sea Σ un anillo de complejos, entonces el *p-ésimo grupo de homología* de Σ es $H_p(\Sigma) = C_p/B_p$.

A partir de este momento, el campo de la topología algebraica crece a gran velocidad.

2.3 La homología en la década 1925-1935

Durante los años 1925-1935, numerosos topólogos inventan nuevas teorías de homología. Entre ellos se encuentran principalmente: J.W. Alexander, P.S. Alexandroff, S. Lefschetz (1884-1972), L. Vietoris, G. de Rham (1903-1990) y N. Steenrod (1910-1971) (aunque la teoría de Steenrod se desarrolla más adelante, pertenece también al movimiento de esta época). En cada uno de los casos, la *teoría de la homología* se caracteriza de la manera siguiente: se describe, siguiendo la corriente de algebrización, la construcción de un complejo de cadenas (eligiendo los correspondientes grupos abelianos K^n y los homomorfismos R_n) y se define su *grupo de homología* como la homología de ese complejo. Además, se definen los números de Betti para variedades complejas.

2.3.1 Vietoris, Alexandroff, Lefschetz y Čech

Una de las ideas que surgen se debe a Vietoris, Alexandroff, Lefschetz y E. Čech (1893-1960). Todos ellos desarrollan un mismo método que consiste en lo siguiente: se parte de un cubrimiento por abiertos (finito o infinito) $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de un espacio topológico X. A dicho cubrimiento se le asocia un complejo simplicial denominado *nervio de* $\mathcal{U}$, $N(\mathcal{U})$, donde a cada U_α se le asigna un vértice v_α y los k-símplices se generan a partir de familias de $(k+1)$-símplices cuando $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_{k+1}} \neq \emptyset$. Entonces, si $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, cada V_β está contenido en algún U_α, induciendo así una *aplicación simplicial* $\varphi : N(\mathcal{V}) \longrightarrow N(\mathcal{U})$. El nuevo método se utiliza durante esta década, culminando en el año 1935 con lo que hoy se conoce con el nombre de *homología de Čech*

Definición 2.11 El *grupo de cohomología de Čech* $\check{H}^i(X; G)$ se define como el límite directo

$$\lim_{\rightarrow} H^i\left(N(\mathcal{U}, G)\right)$$

donde $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento por abiertos de X, la dirección dada sobre estos cubrimientos es la relación de refinamiento y G es un grupo.

Otro gran avance en este año es la determinación de los *grupos de coeficientes universales de homología*, es decir, aquellos grupos A_u que determinan todos grupos de homología $H_n(X; A)$ con A un grupo de coeficientes arbitrario. Čech prueba en su artículo *"Les groupes de Betti d'un complexe infini"* su famoso **teorema de los coeficientes universales**

Teorema 2.12 *Para todo grupo abeliano A y cada complejo X se tiene*

$$H_n(X; A) = H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes A.$$

Cěch es también el primero en introducir en la homología algebraica el producto tensorial $\otimes$ y el grupo de torsión Tor de grupos abelianos.

2.3.2 Cohomología de De Rham

Otra de las ideas a destacar es la *cohomología de de Rham*, que G. DeRham introduce en 1931 en su tesis *"Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions"*. Poco antes, E. Cartan (1869-1951) había conjeturado que el número de Betti b_i de una variedad M es el máximo número de i-formas cerradas ω_j tales que ninguna combinación lineal no trivial $\sum \lambda_j \omega_j$ es exacta (entendiéndose que una forma ω es exacta cuando existe otra forma γ de manera que $\omega = d\gamma$). DeRham resuelve la conjetura de Cartan, y lo hace utilizando una triangulación sobre M y la aplicación bilineal $(C, \omega) \to \int_C \omega$, donde C es un i-ciclo de la triangulación, y ω es una i-forma cerrada. De Rham prueba además el recíproco de la *fórmula de Stokes*, es decir

Teorema 2.13 *(i) sea C un i-ciclo fijo, entonces $\int_C \omega = 0$ si y sólo si C es un borde;*

(ii) sea ω una i-forma, entonces $\int_C \omega = 0$ si y sólo si ω es exacta.

Si se denota por $H^i_{DR}(M)$ el cociente de todas las i-formas cerradas entre todas las i-formas exactas, se obtiene el *i-ésimo grupo de cohomología de DeRham*. Sin embargo, en 1931 aún no existe este término, por lo que DeRham se ve forzado a expresar sus resultados en términos de homología.

El resto de la década no juega un papel muy importante en el desarrollo de la homología. Sin embargo, el año 1935 es muy fructífero para la topología en muchos aspectos: W. Hurewicz (1904-1956) define las denominadas posteriormente *aplicaciones de Hurewicz*

Definición 2.14 Se define la *n-ésima aplicación de Hurewicz* entre el n-ésimo grupo de homotopía del espacio topológico X y el n-ésimo grupo de homología entera

$$h : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z}),$$

como la función que lleva la clase de homotopía de $\gamma : [0, 1]^n \longrightarrow X$ (basada en x_0, i.e. la frontera topológica del n-cubo $[0, 1]^n$ va por γ al punto $x_0 \in X$) en la clase de homología del n-símplice singular γ.

Hurewick estudia también los *espacios asféricos*, es decir, los espacios X cuyos grupos de homotopía $\pi_n(X) = 0$ para $n \neq 1$, y deduce que para dichos espacios el grupo de homología $H_n(X; \mathbb{Z})$ depende tan sólo de su grupo fundamental $\pi_1(X)$.

2.3.3 Homología singular y homología relativa

La tercera idea importante se denomina *homología singular* y es introducida en 1944 por S. Eilenberg (1913-1998). Lefschetz había dado en 1933 la definición de *símplice singular* con algunas imperfecciones, por lo que Eilenberg la modifica más adelante dando lugar a las definiciones que actualmente conocemos de *homología singular (con coeficientes en un anillo R) de X*, $H_n(X; R)$.

Lefschetz define además la noción de *homología relativa* $H_i(K, L)$ donde K es un complejo finito, y L un subcomplejo de K. Este nuevo concepto engloba la homología singular y la homología de Čech descritas anteriormente.

Con el siguiente teorema, Hurewick consigue relacionar el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ con el grupo abeliano $H_1(X, \mathbb{Z})$ de un espacio topológico X

Teorema 2.15 *La aplicación de Hurewick $\chi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$ es un homomorfismo de grupos. Además, si X es conexo por caminos, χ es sobreyectiva y $Ker(\chi)$ es el subgrupo conmutador de $\pi_1(X, x_0)$. Es decir, $H_1(X, \mathbb{Z})$ es el abelianizado de $\pi_1(X, x_0)$.*

2.4 Axiomatización de la teoría

En 1945 Eilenberg y S. MacLane (1909-) en su artículo *"Relations between homology and homotopy groups of spaces"*, definen un nuevo concepto

Definición 2.16 Una *categoría* **C** es una colección $\{A, \alpha\}$ con A elementos abstractos denominados *objetos* de la categoría, y α otros elementos abstractos denominados *morfismos* de la categoría.

Más adelante en el mismo artículo, Eilenberg y MacLane definen un *functor* de la siguiente manera

Definición 2.17 Sean **C** $= \{A, \alpha\}$ y **D** $= \{B, \beta\}$ dos categorías. Un *functor covariante* T : **C** $\longrightarrow$ **D** es un par de funciones denotadas ambas por T, una función objeto y una función morfismo. La función objeto asigna a cada A en **C** un objeto $T(A)$ en **D**, y la función morfismo asigna a cada morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ en **C**, un morfismo $T(\alpha) : T(A) \longrightarrow T(A')$ en **C**.

El par de funciones debe enviar la aplicación identidad en símisma, y debe verificar identidades del tipo $T(\alpha\alpha') = T(\alpha)T(\alpha')$ siempre que el producto $\alpha\alpha'$ esté bien definido en **C**. Un *functor contravariante* se define de manera análoga, cambiando el sentido de composición de los morfismos.

Ese mismo año Eilenberg trabaja también con Steenrod; ambos deciden comenzar a estudiar la homología desde un punto de vista diferente: en lugar de analizar la manera de construir grupos de homología y definir así nuevos grupos, se concentran en estudiar las propiedades que cumplen los grupos ya definidos hasta entonces. De esta manera seleccionan varias propiedades comunes a todos ellos, y las denominan *axiomas de la teoría de la homología*. Los nuevos axiomas de homología se introducen en su artículo *"Axiomatic approach to homology theory"* y los veremos en capítulo 8.

Eilenberg y Steenrod prueban también que muchas de las propiedades demostradas para las diferentes teorías son consecuencia de estos axiomas. Su resultado más interesante es la prueba de que en la categoría de los espacios compactos triangulables, todas las teorías de homología que verifican los axiomas son isomorfas.

Aunque los axiomas de Eilenberg y Steenrod caracterizan muchas de las teorías de homología utilizadas, existen otras no menos importantes denominadas *homologías generalizadas* en las que alguno de los *axiomas de Eilenberg-Steenrod* no se verifica (en general, suele ser el axioma de dimensión). Algunos ejemplos de estas teoreías son

Ejemplos 2.18 (i) *la homología cíclica*: proporciona un análogo no conmutativo a la homología de DeRham;

(ii) la *homología de Hochschild*: asocia a un álgebra, una familia de grupos abelianos: se puede interpretar como una generalización de los módulos de formas diferenciales a las álgebras;

(iii) la *K-homología*: basándose en la teoría de fibrados vectoriales estudia una homología de espacios.

Un poco de Álgebra Homológica

Que tan solo con cantar
se va al viento nuestra pena,
y yo tengo el alma llena
de pesares y amarguras,
más que en la pampa hay anchura
más que en el mar hay arena.

“Décimas”
Pedro Bonifacio Palacios “Almafuerte” (1854–1917)

3.1 Categorías y functores

Intuitivamente, una *categoría* puede pensarse como una colección de conjuntos dotados de estructuras de la misma especie y aplicaciones que preservan estas estructuras. De manera más precisa

Definición 3.1 Una *categoría* **C** está formada por

(1) una clase de *objetos*, *Obj*(**C**),

(2) a cada par ordenado de objetos (X, Y), le corresponde un conjunto de *morfismos*, denotado $hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, siendo las familias $hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ y $hom_{\mathbf{C}}(X', Y')$ disjuntas si el par (X, Y) es distinto del par (X', Y'). Un morfismo cualquiera $f \in hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ se escribe usualmente del modo $f : X \longrightarrow Y$,

(3) dada una terna de objetos de la categoría (X, Y, Z), se define una aplicación

$$\circ : hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \times hom_{\mathbf{C}}(Y, Z) \longrightarrow hom_{\mathbf{C}}(X, Z),$$

llamada *composición*, que cumple los dos axiomas siguientes

- Asociatividad: si $f \in hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, $g \in hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ y $h \in hom_{\mathbf{C}}(Z, W)$, es $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
- Identidad: a cada objeto Y en la categoría se le puede asociar el *morfismo identidad* (que es único, debido a los axiomas), $1_Y \in hom_{\mathbf{C}}(Y, Y)$, tal que si $f \in hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ y $g \in hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$, entonces $g \circ 1_Y = g$ y $1_Y \circ f = f$.

Ejemplos 3.2 Algunos ejemplos de categorías son

(i) **Set**, la categoría de conjuntos y aplicaciones;

(ii) **Group**, la categoría de grupos y homomorfismos de grupos;

(iii) **Ab**, la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos;

(iv) **Ring**, la categoría de anillos conmutativos con unidad y homomorfismos de anillos;

(v) **Top**, la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas;

(vi) **Vect**$_{\mathbb{R}}$, la categoría de espacios vectoriales reales y aplicaciones $\mathbb{R}$–lineales;

(vii) **Diff**$^{\infty}$, la categoría de variedades diferenciales de clase C^{∞} y aplicaciones diferenciables de clase C^{∞};

(viii) **Top**$_{*}$, la categoría de pares de espacios topológicos con punto base $(X, \{x_0\})$ (donde $x_0 \in X$) y aplicaciones continuas $f\colon X \longrightarrow Y$ tales que $f(x_0) = y_0$;

(ix) **ParTop**, la categoría de pares de espacios topológicos (X, A) (donde $A \subset X$) y aplicaciones continuas $f\colon X \longrightarrow Y$ tales que $f(A) \subset B$.

Definición 3.3 Si $f \in hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ y existe $g \in hom_{\mathbf{C}}(Y, X)$, tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, se dice que f es una *equivalencia* en la categoría **C**. Se dice que g es la inversa de f y se denota por $g = f^{-1}$.

Definición 3.4 Un *functor covariante* T de una categoría $\mathbf{C}_1$ en una categoría $\mathbf{C}_2$, denotado $T\colon \mathbf{C}_1 \longrightarrow \mathbf{C}_2$, está definido por

(i) una función T que asocia a cada objeto X en $\mathbf{C}_1$, un objeto $T(X)$ en $\mathbf{C}_2$,

(ii) una función, denotada también T, que asocia a cada morfismo $f \in hom_{\mathbf{C}_1}(X, Y)$ un morfismo $T(f) \in hom_{\mathbf{C}_2}(T(X), T(Y))$, de tal modo que

(1) $T(1_X) = 1_{T(X)}$,

(2) si $f \in hom_{\mathbf{C}_1}(X, Y)$ y $g \in hom_{\mathbf{C}_1}(Y, Z)$, se cumple que $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

Definición 3.5 Un *functor contravariante* $T\colon \mathbf{C}_1 \longrightarrow \mathbf{C}_2$, está definido por

(i) una función T que asocia a cada objeto X en $\mathbf{C}_1$, un objeto $T(X)$ en $\mathbf{C}_2$,

(ii) una función, denotada también T, que asocia a cada morfismo $f \in hom_{\mathbf{C}_1}(X, Y)$ un morfismo $T(f) \in hom_{\mathbf{C}_2}(T(Y), T(X))$, de tal modo que

(1) $T(1_X) = 1_{T(X)}$,

(2) si $f \in hom_{\mathbf{C}_1}(X, Y)$ y $g \in hom_{\mathbf{C}_1}(Y, Z)$, se cumple que $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$.

El gran problema de la topología algebraica es el de encontrar y estudiar una suficiente cantidad de functores, de modo que la solución de una cuestión topológica *complicada* equivalga a la de un problema algebraico más simple. Es decir, se trata de encontrar functores de **Top** en **Group**, o de **Top** en **Ab**, etc.

Ejemplos 3.6 Algunos ejemplos de functores son

(i) el functor *identidad* de cualquier categoría **C** en sí misma, definido de la manera obvia;

(ii) el functor *de olvido*, de la categoría **Top** en la categoría de conjuntos **Set**, que asigna a cada espacio topológico X el conjunto base X (sin estructura) y a cada aplicación continua la misma aplicación *olvidando* su continuidad. Existen también functores de olvido entre otras muchas categorías, por ejemplo de **Group** en **Set**, de **Ab** en **Group**, etc;

(iii) si M es un espacio topológico, se define el functor covariante $(- \times M)\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$, donde $(- \times M)(X) = X \times M$ para cada espacio topológico X y si $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua, $(- \times M)(f) = f \times 1_M$;

(iv) el functor *espacio dual*, $(-)^*\colon \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$, que asigna a cada espacio vectorial real V, su dual V^* (espacio vectorial de las aplicaciones lineales $V \to \mathbb{R}$) y a cada aplicación lineal $\varphi\colon V \longrightarrow W$ la aplicación dual $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ definida por $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$, es un ejemplo de functor contravariante;

(v) el functor contravariante $C^\infty(-;\mathbb{R})\colon \mathbf{Diff}^\infty \longrightarrow \mathbf{Ring}$, que asocia a una variedad diferenciable M el anillo de las funciones reales diferenciables en M y a la aplicación de clase C^∞ $f\colon M \longrightarrow N$ el homomorfismo de anillos $f^*\colon C^\infty(N;\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M;\mathbb{R})$, dado por $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Proposición 3.7 *Si $T\colon \mathbf{C}_1 \longrightarrow \mathbf{C}_2$ es un functor y f es una equivalencia en $\mathbf{C}_1$, entonces $T(f)$ es una equivalencia en $\mathbf{C}_2$, tal que $(T(f))^{-1} = T(f^{-1})$.*

Definición 3.8 Si T y S son dos functores de la categoría $\mathbf{C}_1$ en la categoría $\mathbf{C}_2$, una *transformación natural* Φ de S en T, denotada $\Phi\colon S \longrightarrow T$, es un sistema de morfismos en $\mathbf{C}_2$, $\Phi_X \in hom_{\mathbf{C}_2}(S(X), T(X))$ para cada objeto X en $\mathbf{C}_1$, que hace conmutativo el siguiente diagrama, para cada $f \in hom_{\mathbf{C}_1}(X, Y)$

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{S(f)} & S(Y) \\ {\scriptstyle \Phi_X}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_Y} \\ T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y) \end{array}$$

Si cada Φ_X es una equivalencia, Φ se llama una *equivalencia natural*. En tal caso, $\psi = \Phi^{-1}$ (es decir, $\psi_X = \Phi_X^{-1}$, para cada objeto X en $\mathbf{C}_1$) es también una equivalencia natural (invirtiendo las flechas verticales en el diagrama anterior) y se llama *equivalencia natural inversa*.

Ejemplos 3.9 Algunos ejemplos de transformaciones naturales son

(i) consideremos los siguientes functores

- $(-)^X \colon$ **Ring** $\longrightarrow$ **Group**, que asocia a un anillo R el grupo multiplicativo R^X de los elementos inversibles del anillo, y a un homomorfismo de anillos $f \colon R \longrightarrow S$ su restricción al subconjunto de los elementos inversibles $f|_{R^X} \colon R^X \longrightarrow S$;
- $GL(n; -) \colon$ **Ring** $\longrightarrow$ **Group**, que asocia a un anillo R el grupo $GL(n; R)$ de las matrices $n \times n$, inversibles y con valores en el anillo R, y a un homomorfismo de anillos $f \colon R \longrightarrow S$ el homomorfismo de grupos $f^* \colon GL(n; R) \longrightarrow GL(n; S)$, definido por $f^*((a_{ij})_{i,j}) = (f(a_{ij}))_{i,j}$.

Entonces, $det_R \colon GL(n; R) \longrightarrow R^X$, que asocia a cada matriz inversible su determinante, es una transformación natural entre estos dos functores;

(ii) consideremos los functores

- identidad Id: **Vect**$_{\mathbb{R}} \longrightarrow$ **Vect**$_{\mathbb{R}}$,
- el functor doble dual $(-)^{**}$: **Vect**$_{\mathbb{R}} \longrightarrow$ **Vect**$_{\mathbb{R}}$.

Entonces, Φ: **Vect**$_{\mathbb{R}} \longrightarrow$ **Vect**$_{\mathbb{R}}$, definido por $\Phi_V(v) = (f \to f(v))$, para el espacio vectorial real V y $f \in V^*$, es una transformación natural entre estos dos functores. Si restringimos Φ a la subcategoría de los espacios vectoriales de dimensión finita, se obtiene una equivalencia natural.

3.2 Módulos

En todo lo que sigue, R es un anillo conmutativo con unidad.

Definición 3.10 Un grupo abeliano M se llama *R-módulo* (a la izquierda), si existe una operación externa $R \times M \to M$ (denotada $r.m$), tal que para $r, r_1, r_2 \in R$ y $m, m_1, m_2 \in M$, se tiene

(i) $r.(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$ y $(r_1 + r_2).m = r_1.m + r_2.m$;

(ii) $(r_1 r_2).m = r_1.(r_2.m)$ y $1.m = m$.

En lo que sigue, los R-módulos serán a la izquierda, salvo que se diga lo contrario.

Definición 3.11 N es un *R-submódulo* del R-módulo M, si es un subgrupo de M tal que $r.N \subset N$ para cada $r \in R$. Se puede entonces definir el *módulo cociente* de M por N, M/N, donde la operación externa $R \times M/N \to M/N$ se define asociando a $(r, m + N)$ el elemento $r.m + N$.

Definición 3.12 Una aplicación $f\colon M \longrightarrow M'$ entre R-módulos es un *homomorfismo de R-módulos* (*R-homomorfismo* o *aplicación R-lineal*), si para $r \in R$ y $m, m_1, m_2 \in M$, se tiene

(i) $f(r.m) = r.f(m)$ y

(ii) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.

Un *R-isomorfismo* se define de la manera obvia.

Lema 3.13 *Si $f\colon M \longrightarrow M'$ es R-lineal y N' es un R-submódulo de M', entonces $f^{-1}(N')$ es un R-submódulo de M.*

Observación 3.14 Si $f\colon M \longrightarrow M'$ es una aplicación R-lineal, se tienen los R-submódulos $Ker(f) = f^{-1}(\{0\}) \subset M$ e $Im(f) = f(M) \subset M'$. Claramente $M/Ker(f)$ e $Im(f)$ son isomorfos como R-submódulos, donde el isomorfismo asocia a $m + Ker(f)$ el elemento $f(m) \in Im(f)$.

Observación 3.15 Se denota por $\mathbf{Mod}_R$ la categoría de R-módulos y homomorfismos de R-módulos. Por ejemplo, $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$ es la categoría de grupos abelianos **Ab**.

Lema 3.16 *Sea $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R-módulos, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} M_i$ es un R-módulo.*

Definición 3.17 Dado un R-módulo M y $S \subset M$, se denota por $L(S)$ el *R-módulo generado por S*, es decir, el menor R-submódulo de M que contiene a S.

Observación 3.18 Dada $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R-módulos, $\bigcup\limits_{i \in I} M_i$ no es en general un R-módulo. Se denota por $\sum\limits_{i \in I} M_i$ a $L\left(\bigcup\limits_{i \in I} M_i\right)$.

Definición 3.19 Dados N_1 y N_2 R-submódulos de M, se define el R-submódulo de M siguiente

$$N_1 + N_2 = \{m \in M : \exists n_1 \in N_1, \exists n_2 \in N_2 \text{ tales que } n_1 + n_2 = m\}.$$

Para $i = 1, 2$, N_i es un R-submódulo de $N_1 + N_2$.

Observación 3.20 Es claro que estas representaciones en forma de sumas de la definición 3.19 no son únicas. De modo similar, si $N_1, \ldots, N_k$ son R-submódulos de M, puede definirse el R-submódulo $N_1 + \ldots + N_k$.

Definición 3.21 Dada $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R-módulos, se define el *R-módulo producto* $\prod\limits_{i \in I} M_i$, donde la suma de elementos se define como la suma componente a componente.
La *i-ésima proyección*, $p_i\colon \prod\limits_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i$, definida por $p_i((m_i)_{i \in I}) = m_i$, es un homomorfismo de R-módulos sobreyectivo.

Definición 3.22 Dada $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R-módulos, se define su *suma directa externa* por

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{ (m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i : m_i \in M_i,\ m_i = 0 \quad \text{pct} \quad i \right\},$$

que es un R-submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$. Para cada $k \in I$ puede definirse una aplicación R-lineal inyectiva, $q_k \colon M_k \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$, que asocia a $m_k \in M_k$ el elemento cuyas coordenadas son todas nulas, salvo la k-ésima que es precisamente m_k.

Observación 3.23 Si I es finito en la anterior definición, es $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

Definición 3.24 Dado un R-módulo M, se dice que una familia $\{e_i\}_{i\in I} \subset M$ es un *sistema de generadores*, si para cada $m \in M$, existe una familia $\{r_i\}_{i\in I} \subset R$, con $r_i = 0$ pct i, de forma que $m = \sum_{i\in I} r_i.e_i$. M se dice de *generación finita* si posee un número finito de generadores.

Definición 3.25 Dado un R-módulo M, un sistema de generadores $\{e_i\}_{i\in I}$ es *base* de M, si los $\{e_i\}_{i\in I}$ son linealmente independientes, es decir, dada $\{r_i\}_{i\in I} \subset R$ con $r_i = 0$ pct i tal que $\sum_{i\in I} r_i.e_i = 0$, es necesariamente $r_i = 0$ para cada $i \in I$.

Observación 3.26 Cuando la familia de generadores $\{e_i\}_{i\in I}$ es base de M, la escritura de cada elemento de M es única.

Definición 3.27 Un R-módulo M se dice *libre* cuando existen bases para él.

Ejemplos 3.28 Algunos ejemplos de R-módulos libres son

1. R es un R-módulo libre, con $\{1\}$ como base;
2. $R^n = R \times \overset{(n)}{\cdots} \times R$ es un R-módulo libre, para cualquier anillo R, pues una base es $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ donde $e_i = (0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0)$;
3. más en general, para cada anillo R, denotamos $R^I = \prod_{i\in I} R$ y $R^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} R$. Entonces $R^{(I)}$ es un R-módulo libre, pues $B = \{e_i : i \in I\}$, donde e_i es el elemento con todas las componentes nulas, salvo la i-ésima que es 1, es base de $R^{(I)}$. Sin embargo, R^I no es, en general, libre: por ejemplo, $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ es libre, pero $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no lo es;
4. si R es un cuerpo, todo R-espacio vectorial es libre.

Proposición 3.29 *Un R-módulo M es libre si y sólo si existen un conjunto de índices I y un isomorfismo $M \simeq R^{(I)}$.*

Se tiene la siguiente propiedad universal para R-módulos libres

Teorema 3.30 *Si L, P y Q son tres R-módulos, L es libre y α y β son dos R-homomorfismos tales que $Im(\alpha) \subset Im(\beta)$*

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & & \downarrow \alpha \\ P & \xrightarrow{\beta} & Q \end{array}$$

entonces, existe un R-homomorfismo $\gamma\colon L \longrightarrow P$ tal que $\beta \circ \gamma = \alpha$.

Observaciones 3.31 Se verifican las siguientes propiedades

(i) el cociente de un R-módulo libre no tiene porque ser libre, por ejemplo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ no es $\mathbb{Z}$-libre;

(ii) un submódulo de un módulo libre no es libre en general; por ejemplo si un R-módulo libre contiene un elemento de torsión, el submódulo generado por éste no es libre. Por ejemplo, $R = M = M_2(\mathbb{Z})$ es R-libre con base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Y $N = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ es un R-submódulo de torsión de M, luego no puede tener base como R-módulo.

Proposición 3.32 *Todo R-módulo es isomorfo a un cociente de un R-módulo libre.*

Ejemplo 3.33 $\mathbb{Q}$ no es libre como $\mathbb{Z}$-módulo, pues dos elementos cualesquiera son linealmente dependientes y $\mathbb{Q}$ no es cíclico.

Definición 3.34 El *rango* de un R-módulo libre M, $rg_R(M)$, es el cardinal de una base.

Observación 3.35 Existen R-módulos que poseen distintos sistemas generadores y con diferentes números de elementos (si R es un cuerpo, esto no puede suceder). Pero, si M es un R-módulo libre, dos bases cualesquiera tienen el mismo cardinal.

Observación 3.36 Un R-módulo M es de generación finita si y sólo si es el cociente de un R-módulo libre de rango finito.

Los morfismos de la categoría $\mathbf{Mod}_R$ tienen a su vez estructura de R-módulos

Definición 3.37 Sean M y M' dos R-módulos. Sea

$$Hom_R(M, M') = \{f\colon M \longrightarrow M' : f \text{ es homomorfismo de } R-\text{módulos}\}.$$

Puede definirse sobre $Hom_R(M, M')$ una operación suma, que es R-lineal, y la aplicación nula $0\colon M \longrightarrow M'$ es el neutro para esta operación interna. Como R es conmutativo, la operación externa

$$R \times Hom_R(M, M') \to Hom_R(M, M')$$

que asocia a (r, f) el elemento $r.f$ (donde $(r.f)(m) = r.f(m)$), dota a $Hom_R(M, M')$ de una estructura de R-módulo.

Definición 3.38 Con las notaciones de la definición 3.37, en el caso en que $M' = R$, el R-módulo $M^* = Hom_R(M, R)$ se llama ***dual*** de M. Como M es un R-módulo a izquierda, M^* posee una estructura natural de R-módulo a la derecha (además de ser un R-módulo a izquierda según la definición 3.37), dada por la operación externa $M^* \times R \to M^*$, que asocia a (f, r) la aplicación $f.r$, dada por $(f.r)(m) = f(m).r$.

Observación 3.39 Puede suceder que M^* sea el módulo nulo: por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}$ y $M = \mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}^* = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.

Observación 3.40 Sean M_1, M_2, M_3 tres R-módulos. Si $f_1\colon M_1 \longrightarrow M_2$ y $f_2\colon M_2 \longrightarrow M_3$ son aplicaciones R-lineales, entonces la composición $f_2 \circ f_1\colon M_1 \longrightarrow M_3$ es un homomorfismo de R-módulos. Además, si $g_1\colon M_1 \longrightarrow M_2$ y $g_2\colon M_2 \longrightarrow M_3$ son también homomorfismos de R-módulos, se verifica

(i) $f_2 \circ (f_1 + g_1) = f_2 \circ f_1 + f_2 \circ g_1$, igualdad en $Hom_R(M_1, M_3)$, y

(ii) $(f_2 + g_2) \circ f_1 = f_2 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$, igualdad en $Hom_R(M_1, M_3)$;

y se dice que la aplicación $Hom_R(M_1, M_2) \times Hom_R(M_2, M_3) \to Hom_R(M_1, M_3)$, dada por $(f_1, f_2) \to f_2 \circ f_1$ es R-***bilineal*** (ver la definición 3.83).

La siguiente noción es esencial en el estudio de la homología de R-módulos

Definición 3.41 Sean M_1, M_2, M_3 tres R-módulos y $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ y $g\colon M_2 \longrightarrow M_3$ aplicaciones R-lineales. La sucesión

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

es ***exacta***, si $Im(f) = Ker(g)$.

Observación 3.42 Son importantes en esta teoría las llamadas *sucesiones exactas cortas*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0,$$

que expresan, en particular, que f es inyectiva y g es sobreyectiva.

Por ejemplo, si N es un R-submódulo de M, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \longrightarrow 0,$$

donde i es la inclusión y p la aplicación cociente.

Además, de cualquier sucesión exacta $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} M_4 \xrightarrow{f_4} M_5$, pueden extraerse sucesiones cortas del siguiente modo

(i) $0 \longrightarrow Ker(f_1) \xrightarrow{incl} M_1 \xrightarrow{f_1} Im(f_1) = Ker(f_2) \longrightarrow 0$,

(ii) $0 \longrightarrow Im(f_1) = Ker(f_2) \xrightarrow{incl} M_2 \xrightarrow{f_2} Im(f_2) = Ker(f_3) \longrightarrow 0$,

(iii) $0 \longrightarrow Im(f_2) = Ker(f_3) \xrightarrow{incl} M_3 \xrightarrow{f_3} Im(f_3) = Ker(f_4) \longrightarrow 0$,

(iv) $0 \longrightarrow Im(f_3) = Ker(f_4) \xrightarrow{incl} M_4 \xrightarrow{f_4} Im(f_4) = Ker(f_5) \longrightarrow 0$.

La propiedad más importante de las sucesiones exactas cortas es el **teorema de Rouché-Frobenius**

Teorema 3.43 *Dada una sucesión exacta corta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

si M' y M'' son libres, entonces M es también libre y $rg_R(M) = rg_R(M') + rg_R(M'')$.

En el caso especial de espacios vectoriales

Corolario 3.44 *Sean R un cuerpo, E y F espacios vectoriales y $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación R-lineal. Entonces,*

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \quad y \quad dim(F) = dim(F/Im(f)) + dim(Im(f)).$$

Más aún, se tiene

Proposición 3.45 *Dada una sucesión exacta corta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

si M' y M'' son finitamente generados, también M es finitamente generado.

Corolario 3.46 *Sean $M_1, \ldots, M_n$ R-módulos libres y la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0,$$

entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i rg_R(M_i) = 0$.

Definición 3.47 Sean M_1, M_2, M_3 R-módulos tales que $M_3 = M_1 + M_2$ y $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Entonces, todo elemento de M_3 se escribe de manera única como suma de un elemento de M_1 y un elemento de M_2. La aplicación $f\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_3$ dada por $f(m_1, m_2) = m_1 + m_2$ es un R-isomorfismo. Se escribe entonces $M_3 = M_1 \bigoplus M_2$ y se dice que M_3 es la *suma directa interna* de M_1 y M_2.

Definición 3.48 Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos. Se dice que la sucesión *escinde*, si existe un R-isomorfismo $\varphi : M' \bigoplus M'' \xrightarrow{\simeq} M$, que lleva $\varphi(x, 0) = f(x)$ para cada $x \in M'$ y $(g \circ \varphi)(x, y) = y$ para cada $(x, y) \in M' \bigoplus M''$.

Lema 3.49 *Sea* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *una sucesión exacta corta de* R*-módulos. Son equivalentes las siguientes condiciones*

(i) la sucesión escinde,

(ii) existe una inversa a derecha para g*, es decir, un* R*-homomorfismo* $k\colon M'' \longrightarrow M$ *tal que* $g \circ k = 1_{M''}$*,*

(iii) existe una inversa a izquierda para f*, es decir, un* R*-homomorfismo* $h\colon M \longrightarrow M'$ *tal que* $h \circ f = 1_{M'}$*.*

Observación 3.50 Si M es libre y N es un sumando directo de M, no tiene porque ser libre: por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}_6 = M$ y $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$, entonces N es factor directo de $M = N \oplus N'$ donde $N' = \{\overline{0}, \overline{3}\}$. Pero, ni N ni N' son R-libres, por razones de cardinalidad.

3.3 Complejos de cadenas y de cocadenas

Definición 3.51 Un *complejo de cadenas* sobre R es un conjunto $\mathcal{C}_* = \{(C_m, d_m) : m \in \mathbb{Z}\}$ de R-módulos y R-homomorfismos $\{d_m\colon C_m \longrightarrow C_{m-1} : m \in \mathbb{Z}\}$, satisfaciendo $d_m \circ d_{m+1} = 0$. Un elemento de C_m se dice que tiene *dimensión* m. Se denota por $(\mathcal{C}_*, d)$ y d se llama la *diferencial del complejo*. El *complejo nulo*, $\mathcal{O}$ es aquel tal que $\mathcal{O}_m = \{0\}$, para cada índice.

Observación 3.52 $\mathcal{C}_*$ se suele pensar como una sucesión doblemente infinita

$$\ldots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \ldots$$

con la condición sobre los R-homorfismos $Im(d_{m+1}) \subset Ker(d_m)$, para $m \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.53 El complejo $(\mathcal{C}_*, d)$ se llama *exacto en la etapa* m si $Im(d_{m+1}) = Ker(d_m)$, y se llama *exacto* si lo es en cada etapa.

Definición 3.54 Una *aplicación en cadenas* entre dos complejos de cadenas $(\mathcal{C}_*, d)$ y $(\mathcal{C}'_*, d')$ es un conjunto de R-homomorfismos $\{f_m\colon C_m \longrightarrow C'_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, satisfaciendo, para cada $m \in \mathbb{Z}$ la relación $d'_m \circ f_m = f_{m-1} \circ d_m$. Así, por $f\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}'_*$ se entiende un diagrama de cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{d_2} & C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 & \xrightarrow{d_0} & C_{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_{-1}} & & \\
\ldots & \xrightarrow{d'_2} & C'_1 & \xrightarrow{d'_1} & C'_0 & \xrightarrow{d'_0} & C'_{-1} & \xrightarrow{d'_{-1}} & \ldots
\end{array}$$

Teorema 3.55 *Los complejos de cadenas sobre* R *y sus aplicaciones en cadenas con la composición natural forman una categoría* **Chain**$_R$*.* **Mod**$_R$ *es una subcategoría de* **Chain**$_R$*, pensando un* R*-módulo* M *del modo*

$$M \sim (\ldots \longrightarrow \{0\} \longrightarrow C_0 = M \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \ldots)$$

Definición 3.56 Dado un complejo de cadenas $(\mathcal{C}_*, d)$, se introducen los R-submódulos de C_m definidos por

(i) los *m-ciclos*, $Z_m(\mathcal{C}_*) = Ker(d_m)$, y

(ii) los *m-bordes*, $B_m(\mathcal{C}_*) = Im(d_{m+1})$.

El *m-ésimo R-módulo de homología* de $\mathcal{C}_*$ se define entonces como el cociente

$$H_m(\mathcal{C}_*) = Z_m(\mathcal{C}_*)/B_m(\mathcal{C}_*).$$

La homología mide, por lo tanto, la separación de un complejo de cadenas de la exactitud. La *homología total* es el R-módulo $H_*(\mathcal{C}_*) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} H_m(\mathcal{C}_*)$.

Observación 3.57 Si $(\mathcal{C}_*, d)$ es exacto en cada dimensión, entonces $H_m(\mathcal{C}_*) = 0$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Se dice entonces que $(\mathcal{C}_*, d)$ es un *complejo exacto*.

Por construcción, para cada $m \in \mathbb{Z}$, $H_m(\mathcal{C}_*)$ es un R-módulo. Toda aplicación en cadenas $f\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}'_*$ lleva ciclos en ciclos y bordes en bordes, es decir,

$$f_m(Z_m(\mathcal{C}_*)) \subset Z_m(\mathcal{C}'_*) \quad \text{y} \quad f_m(B_m(\mathcal{C}_*)) \subset B_m(\mathcal{C}'_*),$$

así se concluye

Teorema 3.58 *Toda aplicación en cadenas $f\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}'_*$ determina una aplicación en homología*

$$H_*(f)\colon H_*(\mathcal{C}_*) \longrightarrow H_*(\mathcal{C}'_*),$$

que consiste en un conjunto de homomorfismos, $H_m(f)\colon H_m(\mathcal{C}_*) \longrightarrow H_m(\mathcal{C}'_*)$, para $m \in \mathbb{Z}$ dados por $H_m(f)(c + B_m(\mathcal{C}_*)) = f_m(c) + B_m(\mathcal{C}'_*)$, donde $c \in Z_m(\mathcal{C}_*)$.
*Así, para cada $m \in \mathbb{Z}$, se tiene un functor aditivo (i.e. $H_n(f+g) = H_n(f) + H_n(g)$ para f y g aplicaciones R-lineales) y covariante $H_m\colon$ **Chain**$_R \longrightarrow$ **Mod**$_R$.*

Estamos interesados en calcular la homología de complejos de cadenas asociados con espacios topológicos. Se pueden hacer varias elecciones para complejos de cadenas, algunos geométricos y otros más analíticos. Sin embargo, hecha una elección, es necesario saber que clase de aplicaciones en cadenas dan lugar a las mismas aplicaciones en homología; esto se sigue de la noción algebraica de *homotopía en cadenas*

Definición 3.59 Una *homotopía en cadenas* entre dos aplicaciones en cadenas $f, g\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}'_*$, es una sucesión de homomorfismos $\{D_m\colon C_m \longrightarrow C'_{m+1}\}_{m\in\mathbb{Z}}$,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d_2} & C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 & \xrightarrow{d_0} & C_{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \cdots \\
& \swarrow D_1 & f_1 \Big\downarrow\Big\downarrow g_1 & \swarrow D_0 & f_0 \Big\downarrow\Big\downarrow g_0 & \swarrow D_{-1} & f_{-1} \Big\downarrow\Big\downarrow g_{-1} & \swarrow D_{-2} & \\
\cdots & \xrightarrow{d'_2} & C'_1 & \xrightarrow{d'_1} & C'_0 & \xrightarrow{d'_0} & C'_{-1} & \xrightarrow{d'_{-1}} & \cdots
\end{array}$$

satisfaciendo para cada $m \in \mathbb{Z}$, la condición $d'_{m+1} \circ D_m + D_{m-1} \circ d_m = f_m - g_m$. Se denota por $D : f \simeq g$.

Definición 3.60 Dos complejos $\mathcal{C}_*$ y $\mathcal{C}'_*$ se llaman *homotópicamente equivalentes*, si existen aplicaciones en cadenas $f\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}'_*$ y $g\colon \mathcal{C}'_* \longrightarrow \mathcal{C}_*$, que satisfacen $f \circ g \simeq 1_{\mathcal{C}'_*}$ y $g \circ f \simeq 1_{\mathcal{C}_*}$. Se dice que g es el *inverso en homotopía* de f.

Proposición 3.61 *La* homotopía de cadenas *es una relación de equivalencia.*

La homotopía de cadenas es compatible con la composición

Proposición 3.62 *Dadas dos aplicaciones en cadenas $f, g\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}'_*$ y $f', g'\colon \mathcal{C}'_* \longrightarrow \mathcal{C}''_*$, tales que $f \simeq g$ y $f' \simeq g'$, entonces $f' \circ f \simeq g' \circ g$.*

Lema 3.63 *Se verifica además*

(i) las aplicaciones homótopas en cadenas inducen aplicaciones iguales en homología, es decir, si $f \simeq g$, entonces $H_m(f) = H_m(g)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$;

(ii) los complejos homotópicamente equivalentes tienen módulos de homología isomorfos.

De manera análoga, puede definirse

Definición 3.64 Un *complejo de cocadenas* sobre R es un conjunto $\mathcal{C} = \{(C^m, d^m) : m \in \mathbb{Z}\}$ de R-módulos y R-homomorfismos $d^m\colon C^m \longrightarrow C^{m+1}$, satisfaciendo $d^m \circ d^{m-1} = 0$. Cada d^m se llama un *operador derivado*. Un elemento de C^m se dice que tiene *dimensión* m. Se denota por $(\mathcal{C}^*, d)$.

Observación 3.65 $(\mathcal{C}^*, d)$ se suele mirar como una sucesión doblemente infinita

$$\dots \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \dots$$

con la condición sobre los R-homorfismos $Im(d^{m-1}) \subset Ker(d^m)$, para $m \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.66 Dado un complejo de cocadenas $\mathcal{C}^*$, se introducen los submódulos de C^m definidos por

(i) los m-*cociclos*, $Z^m(\mathcal{C}^*) = Ker(d_m)$, y

(ii) los m-*cobordes*, $B^m(\mathcal{C}^*) = Im(d^{m-1})$, y

Para $m \in \mathbb{Z}$, el m-*ésimo* R-*módulo de cohomología* de $\mathcal{C}^*$ se define como el cociente

$$H^m(\mathcal{C}^*) = Z^m(\mathcal{C}^*)/B^m(\mathcal{C}^*).$$

La cohomología mide, por lo tanto, la separación de un complejo de cocadenas de la exactitud. La *cohomología total* es el R-módulo $H_*(\mathcal{C}^*) = \bigoplus\limits_{m\in\mathbb{Z}} H^m(\mathcal{C}^*)$.

Observación 3.67 Si se define $C_n := C^{-n}$ y $d_n = d^{-n}$ se obtiene un complejo de cadenas $\mathcal{C}_*$ y $H^{-m}(\mathcal{C}^*) = H_m(\mathcal{C}_*)$.

Observación 3.68 El paso de la homología a la cohomología no es sólo un *juego de índices*: $H^*(\mathcal{C}^*)$ soporta, como se verá más adelante, además de la estructura de R-módulo una estructura de anillo graduado, propiedad que no posee la homología, y que en algunas ocasiones permite distinguir espacios no equivalentes desde el punto de vista de la homotopía.

3.4 Sucesiones exactas de homología

Definición 3.69 Una *sucesión exacta (corta) de complejos de cadenas* es una sucesión

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}'_* \xrightarrow{f} \mathcal{C}_* \xrightarrow{g} \mathcal{C}''_* \longrightarrow \mathcal{O}$$

de complejos y aplicaciones en cadenas, tal que para cada $m \in \mathbb{Z}$, la sucesión de R-módulos

$$\{0\} \longrightarrow C'_m \xrightarrow{f_m} C_m \xrightarrow{g_m} C''_m \longrightarrow \{0\}$$

es exacta.

En toda esta teoría es muy útil el **lema de la serpiente**

Lema 3.70 *Sea un diagrama conmutativo de R-módulos y R-homomorfismos con filas exactas*

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' & & \\ \{0\} & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{h} & N & \xrightarrow{k} & N'' & & \end{array}$$

La aplicación $\delta\colon Ker(d'') \longrightarrow Coker(d')$, dada por $\delta(z'') = [h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(z'')]$ está bien definida, y la sucesión

$$Ker(d') \xrightarrow{\overline{f}} Ker(d) \xrightarrow{\overline{g}} Ker(d'') \xrightarrow{\delta} Coker(d') \xrightarrow{\overline{h}} Coker(d) \xrightarrow{\overline{k}} Coker(d''),$$

(donde $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ y $\overline{k}$ son los homomorfismos inducidos por f, g, h y k respectivamente), es una sucesión exacta. Si f es además inyectiva (respectivamente, k es sobreyectiva), entonces $\overline{f}$ es también inyectiva (respectivamente, $\overline{k}$ es también sobreyectiva).

Otro teorema algebraico esencial es el **lema de los cinco**

Lema 3.71 *Sea un diagrama conmutativo de R-módulos y R-homomorfismos con filas exactas*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{g_1} & M_2 & \xrightarrow{g_2} & M_3 & \xrightarrow{g_3} & M_4 & \xrightarrow{g_4} & M_5 \\ \downarrow d_1 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d_3 & & \downarrow d_4 & & \downarrow d_5 \\ N_1 & \xrightarrow{h_1} & N_2 & \xrightarrow{h_2} & N_3 & \xrightarrow{h_3} & N_4 & \xrightarrow{h_4} & N_5 \end{array}$$

Entonces

(i) si d_1 es sobreyectiva, y d_2 y d_4 son inyectivas, entonces d_3 es inyectiva;

(ii) si d_5 es inyectiva, y d_2 y d_4 son sobreyectivas, entonces d_3 es sobreyectiva.

Se obtiene entonces la **sucesión exacta larga de homología**

Teorema 3.72 *Sea una sucesión exacta de complejos de cadenas*

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}'_* \xrightarrow{f} \mathcal{C}_* \xrightarrow{g} \mathcal{C}''_* \longrightarrow \mathcal{O}.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe un homomorfismo de enlace, $\delta_n\colon H_n(\mathcal{C}''_*) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{C}'_*)$*, definido por*

$$\delta_n(z'' + B_n(\mathcal{C}''_*)) = \left(f_{n-1}^{-1} \circ d_n \circ g_n^{-1}(z'')\right) + B_{n-1}(\mathcal{C}'_*),$$

que hace de la siguiente sucesión exacta

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(\mathcal{C}'_*) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(\mathcal{C}_*) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(\mathcal{C}''_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(\mathcal{C}'_*) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \dots$$

Definición 3.73 Sea $(\mathcal{C}_*, d)$ un complejo de cadenas y para cada $n \in \mathbb{Z}$ se considera un R-submódulo $C'_n \subset C_n$, tal que $d_n(C'_n) \subset C'_{n-1}$. Así, tenemos un *subcomplejo* de $(\mathcal{C}_*, d)$, $(\mathcal{C}'_*, d) = (C'_n, d_n|_{C'_n})_{n\in\mathbb{Z}}$, y se define

$$\mathcal{C}''_* := \mathcal{C}_*/\mathcal{C}'_* = (C_n/C'_n, d''), \quad \text{donde} \quad d''_n(x + C'_n) = d_n(x) + C'_{n-1},$$

que se llama *complejo de cadenas cociente* de $\mathcal{C}_*$ módulo $\mathcal{C}'_*$.

Observación 3.74 Como la sucesión de complejos obvia

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{C}'_* \longrightarrow \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}_*/\mathcal{C}'_* \longrightarrow \mathcal{O}$$

es exacta, se tiene la sucesión exacta larga de homología

$$\dots \longrightarrow H_n(\mathcal{C}'_*) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}_*) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}_*/\mathcal{C}'_*) \xrightarrow{d''_n} H_{n-1}(\mathcal{C}'_*) \longrightarrow \dots$$

Definición 3.75 Sean $(\mathcal{C}'_*, d')$ y $(\mathcal{C}''_*, d'')$ complejos de cadenas. Se define el complejo *suma directa*, $(\mathcal{C}_*, d) := (\mathcal{C}'_* \bigoplus \mathcal{C}''_*, d' \oplus d'')$, donde $C_n =: C'_n \bigoplus C''_n$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$, y

$$d_n(x', x'') := (d'_n \oplus d''_n)(x', x'') = (d'_n(x'), d''_n(x'')).$$

El **teorema de Mayer–Vietoris** es una herramienta esencial para realizar cálculos en homología

Teorema 3.76 *Se verifican las siguientes propiedades*

(i) dados los complejos $\mathcal{C}'_*$ y $\mathcal{C}''_*$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ es $H_n(\mathcal{C}'_* \bigoplus \mathcal{C}''_*) \simeq H_n(\mathcal{C}'_*) \bigoplus H_n(\mathcal{C}''_*)$;

(ii) si $\mathcal{C}_*$ es un complejo y $\mathcal{C}'_*$ y $\mathcal{C}''_*$ son subcomplejos de $\mathcal{C}_*$, entonces

(a) la sucesión $\mathcal{O} \to \mathcal{C}'_* \cap \mathcal{C}''_* \xrightarrow{i} \mathcal{C}'_* \bigoplus \mathcal{C}''_* \xrightarrow{p} \mathcal{C}'_* + \mathcal{C}''_* \to \mathcal{O}$*, donde* $i_n(x) = (x, -x)$ *y* $p_n(x, y) = x + y$*, para* $n \in \mathbb{Z}$*, es exacta;*

(b) cuando la inclusión natural $j : \mathcal{C}'_* + \mathcal{C}''_* \longrightarrow \mathcal{C}_*$ *induce, para cada* $n \in \mathbb{Z}$*, un isomorfismo* $H_n(j) : H_n(\mathcal{C}'_* + \mathcal{C}''_*) \xrightarrow{\simeq} H_n(\mathcal{C}_*)$*, entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\ldots \to H_{n+1}(\mathcal{C}_*) \xrightarrow{\Delta_n} H_n(\mathcal{C}'_* \cap \mathcal{C}''_*) \xrightarrow{\mu_n} H_n(\mathcal{C}'_*) \bigoplus H_n(\mathcal{C}''_*) \xrightarrow{\nu_n} H_n(\mathcal{C}_*) \to \ldots \quad (3.1)$$

obtenida del siguiente modo: se consideran las inclusiones $j' : \mathcal{C}'_* \longrightarrow \mathcal{C}_*$, $j'' : \mathcal{C}''_* \longrightarrow \mathcal{C}_*$, $i' : \mathcal{C}'_* \cap \mathcal{C}''_* \longrightarrow \mathcal{C}'_*$ *e* $i'' : \mathcal{C}'_* \cap \mathcal{C}''_* \longrightarrow \mathcal{C}''_*$ *y la sucesión exacta*

$$\mathcal{O} \to \mathcal{C}'_* \cap \mathcal{C}''_* \xrightarrow{i} \mathcal{C}'_* \bigoplus \mathcal{C}''_* \xrightarrow{p} \mathcal{C}'_* + \mathcal{C}''_* \to \mathcal{O}.$$

La sucesión exacta larga de homología asociada a la anterior sucesión de complejos de cadenas es

$$\xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(\mathcal{C}'_* \cap \mathcal{C}''_*) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(\mathcal{C}'_* \bigoplus \mathcal{C}''_*) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(\mathcal{C}'_* + \mathcal{C}''_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(\mathcal{C}'_* \cap \mathcal{C}''_*) \xrightarrow{H_{n-1}(i)}$$

y, con las notaciones obvias, induce la sucesión (3.1), donde

$$\mu_n(x + B_n(\mathcal{C}_* \cap \mathcal{C}'_*)) = (i'_n(x) + B_n(\mathcal{C}'_*), -i''_n(x) + B_n(\mathcal{C}''_*)),$$

$$\nu_n(x + B_n(\mathcal{C}'_*), y + B_n(\mathcal{C}''_*)) = (j'_n(x) + j''_n(y)) + B_n(\mathcal{C}_*),$$

$$\Delta_n(z + B_{n+1}(\mathcal{C}''_*)) = \delta_{n+1} \circ j^{-1}_{n+1}(z) + B_n(\mathcal{C}'_* \cap \mathcal{C}''_*).$$

La sucesión (3.1) se llama de Mayer-Vietoris.

3.5 Característica de Euler-Poincaré

Los siguientes ejemplos motivan la definición de aplicación de Euler-Poincaré

1. sea $\{0\} \to V' \to V \to V'' \to \{0\}$ una sucesión exacta de K-espacios vectoriales (K es un cuerpo). Si $dim_K(V')$ y $dim_K(V'')$ son finitas, se deduce que $dim_K(V)$ también es finita, y es válida la fórmula $dim_K(V) = dim_K(V') + dim_K(V'')$;
2. sea $\{0\} \to G' \to G \to G'' \to \{0\}$ una sucesión exacta de grupos abelianos. Si $ord(G')$ y $ord(G'')$ son finitos, $ord(G)$ también es finito, y en este caso es válida la fórmula $ord(G) = ord(G') + ord(G'')$;
3. para cada $\mathbb{Z}$-módulo M de dimensión finita (es decir, cada grupo abeliano de dimensión finita), se cumple que $M \simeq \mathbb{Z}^r \bigoplus TM$, donde $TM = \{m \in M : \exists r \neq 0 \text{ con } r.m = 0\}$ es el grupo de torsión de M, que es un grupo abeliano finitamente generado. Se dice que r es el *rango* de M, y se denota $rg(M) = r$. Sea $\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$ una sucesión exacta de grupos abelianos. Si M' y M'' son finitamente generados, entonces M también es finitamente generado, y $rg(M) = rg(M') + rg(M'')$.

Definición 3.77 Sea $\mathfrak{K}$ una familia de R-módulos y $(\Gamma,+)$ un grupo abeliano. Una correspondencia $\psi\colon \mathfrak{K}\longrightarrow\Gamma$ se llama *aplicación de Euler-Poincaré*, cuando

(i) $\{0\}\in\mathfrak{K}$ y $\psi(\{0\})=0$,

(ii) si $\{0\}\to M'\to M\to M''\to\{0\}$ es una sucesión exacta de R-módulos, cuando $M', M''\in\mathfrak{K}$, es $M\in\mathfrak{K}$. Entonces, $\psi(M)=\psi(M')+\psi(M'')$.

Ejemplos 3.78 Como casos particulares, se tiene

1. si $R=K$ un cuerpo, $\psi=\dim_K$ y $(\Gamma,+)=(\mathbb{Z},+)$, entonces $\dim_K$ es una aplicación de Euler-Poincaré;

2. si $R=\mathbb{Z}$, $\psi=ord$ y $(\Gamma,+)=(\mathbb{Z},+)$, entonces ord es una aplicación de Euler-Poincaré;

3. si $R=\mathbb{Z}$, $\psi=rg$ y $(\Gamma,+)=(\mathbb{Z},+)$, entonces rg es una aplicación de Euler-Poincaré.

Definición 3.79 Sea ψ una aplicación de Euler-Poincaré y $\mathcal{C}_*$ un complejo de cadenas, tal que $H_n(\mathcal{C}_*)=\{0\}$ para casi todo $n\in\mathbb{Z}$. Si ψ está definida para todos los $H_n(\mathcal{C}_*)$, se define la *característica de Euler* del $\mathcal{C}_*$, por

$$\chi_\psi(\mathcal{H}\mathcal{C}_*):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\psi(H_n(\mathcal{C}_*)).$$

Teorema 3.80 *Sea $\mathcal{C}_*$ un complejo de cadenas y ψ una aplicación de Euler-Poincaré tal que $\psi(C_n)$ está definida para cada n. Si $\psi(C_n)=0$ pct n y $\psi(H_n(\mathcal{C}_*))=0$ pct n, entonces, $\chi_\psi(\mathcal{H}\mathcal{C}_*)$ está definida y es*

$$\chi_\psi(\mathcal{H}\mathcal{C}_*)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\psi(C_n).$$

Corolario 3.81 *Sea $\mathcal{C}_*$ un complejo de cadenas y ψ una aplicación de Euler-Poincaré tal que $\psi(C_n)$ está definida para cada n. Si $\psi(C_n)=0$ pct n, $\psi(H_n(\mathcal{C}_*))=0$ pct n y el complejo es exacto, entonces la suma alternada de los $\psi(C_n)$ es nula, es decir,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\psi(C_n)=0.$$

Teorema 3.82 *Sea $\mathcal{O}\to\mathcal{C}'_*\to\mathcal{C}_*\to\mathcal{C}''_*\to\mathcal{O}$ una sucesión exacta de complejos y ψ una aplicación de Euler-Poincaré. Si χ_ψ está definida para dos de los tres complejos, está también definida para el tercero y $\chi_\psi(\mathcal{H}\mathcal{C}_*)=\chi_\psi(\mathcal{H}\mathcal{C}'_*)+\chi_\psi(\mathcal{H}\mathcal{C}''_*)$.*

3.6 Tensor y Hom

Definición 3.83 Sean M, N, T tres R-módulos. Una aplicación $g\colon M\times N\longrightarrow T$ es *R-bilineal* si es lineal en cada argumento, es decir,

$$g(m+m',n)=g(m,n)+g(m',n)\quad\text{y}\quad g(m,n+n')=g(m,n)+g(m,n')$$

y $g(r.m,n) = r.g(m,n) = g(m,r.n)$. Se denota por $Bil_R(M \times N, T)$ a la familia de tales aplicaciones.

Teorema 3.84 *Sean M y N dos R-módulos. Existe un par (T,g), con T un R-módulo y $g\colon M \times N \longrightarrow T$ una aplicación bilineal, tales que*

(i) se verifica la siguiente propiedad universal: para cada aplicación bilineal $f\colon M \times N \longrightarrow P$ existe una aplicación lineal única $f'\colon T \longrightarrow P$ tal que $f = f' \circ g$,

(ii) (T,g) es único salvo isomorfismos.

Observación 3.85 Para construir este R-módulo, se parte del R-módulo libre generado por $M \times N$, es decir, $R^{(M\times N)}$ y se considera la aplicación $H\colon M \times N \longrightarrow R^{(M\times N)}$ definida por $H(x,y) = e_{(x,y)}$, donde $e_{(x,y)}$ es el elemento de $R^{(M\times N)}$ con un 1 en el lugar (x,y)-ésimo y ceros en el resto. Se considera entonces el R-submódulo S generado por los elementos de la forma

$$\left\{e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)},\ e_{(x,y+y')} - e_{(x,y)} - e_{(x,y')},\ e_{(r.x,y)} - r.e_{(x,y)},\ e_{(x,r.y)} - r.e_{(x,y)}\right\}.$$

El producto tensorial es justamente el cociente $R^{(M\times N)}/S$.

Definición 3.86 Sean M y N dos R-módulos y (T,g) el par que existe por el teorema 3.84. T se llama *producto tensorial de M y N* y se escribe $M \otimes_R N$. De hecho, $M \otimes_R N$ queda caracterizado, salvo isomorfismo, por la propiedad universal dada en el teorema 3.84.

Observación 3.87 Se suele denotar $x \otimes y$ la imagen de (x,y) por g. Todo elemento $z \in M \otimes_R N$ se escribe como una suma finita $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i \otimes y_i)$, donde $x_i \in M$ e $y_i \in N$.

Ejemplos 3.88 Para $R = \mathbb{Z}$, se tienen los siguientes casos

1. se tiene el R-isomorfismo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n$, definido por $k \otimes [m] = 1 \otimes [k.m] \to [k.m]$ (de inverso $[m] \to 1 \otimes [m]$);

2. $(2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \{0\}$, isomorfismo definido por $(2n) \otimes [m] = 1 \otimes [2n.m] = 1 \otimes 0 = 0$, para $m,n \in \mathbb{Z}$;

3. consideramos los grupos $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_8$. Sea G un grupo abeliano y una aplicación bilineal $f\colon \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \longrightarrow G$. Sean $\overline{a}^6$ y $\overline{a}^8$ las clases de equivalencia de $a \in \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_8$, respectivamente. Por la bilinealidad de f, para $a,b \in \mathbb{Z}$ es

$$f(\overline{a}^6, \overline{b}^8) = f(a\overline{1}^6, b\overline{1}^8) = abf(\overline{1}^6, \overline{1}^8).$$

La aplicación f está pues unívocamente determinada por el valor $c = f(\overline{1}^6, \overline{1}^8)$. Por lo tanto

$$6c = 6f(\overline{1}^6, \overline{1}^8) = f(\overline{6}^6, \overline{1}^8) = f(\overline{0}^6, \overline{1}^8) = 0,$$
$$8c = 8f(\overline{1}^6, \overline{1}^8) = f(\overline{1}^6, \overline{8}^8) = f(\overline{1}^6, \overline{0}^8) = 0.$$

Consecuentemente, $2c = 8c - 6c = 0$. Y viceversa, sea $c \in G$ tal que $2c = 0$. Definimos la función $f\colon \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \longrightarrow G$ a través de la relación $f(\overline{a}^6, \overline{b}^8) = abc$, que está bien definida y es bilineal. Así, existe una correspondencia biunívoca entre los grupos $Bil_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8, G)$ y $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, G) = \{c \in G : 2c = 0\}$, con lo que, por el teorema 3.84, se tiene el isomorfismo $\mathbb{Z}_6 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_8 \simeq \mathbb{Z}_2$;

4. consideramos G un grupo abeliano y una aplicación bilineal $f\colon \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \longrightarrow G$. Razonando como en el caso anterior, para $a, b \in \mathbb{Z}$ es $f(\overline{a}^5, \overline{b}^7) = abc$, donde $c = f(\overline{1}^5, \overline{1}^7)$. Por lo tanto: $5c = 0$, $7c = 0$, con lo que $15c = 3(5c) = 0$ y $14c = 2(7c) = 0$, así que $c = 15c - 14c = 0$. En definitiva, $Bil_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7, G) = 0$, con lo que, $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_7 = 0$;

5. en general, $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$, donde (m, n) denota el máximo común divisor entre m y n, y si son relativamente primos es 0;

6. consideramos los grupos $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Q}$. Sea G un grupo abeliano y una aplicación bilineal $f\colon \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Q} \longrightarrow G$. Sean $a, p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$. Resulta ahora

$$f\left(\overline{a}^n, \frac{p}{q}\right) = f\left(\overline{a}^n, \frac{pn}{qn}\right) = f\left(n\overline{a}^n, \frac{p}{qn}\right) = f\left(\overline{0}^n, \frac{p}{qn}\right) = 0,$$

con lo que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$;

7. más en general, si G es un grupo abeliano divisible por n (es decir, para cada $g \in G$, existe $g' \in G$, tal que $ng' = g$), resulta que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} G = 0$. Como ejemplos de grupos divisibles por 2 tenemos $\left\{e^{2\pi i n/2^k} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ o $\left\{\frac{p}{2^k} : p, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ejemplo 3.89 Si M es un R-módulo de torsión y N es un R-módulo divisible (i.e. para cada $r \in R$ no nulo y $m \in M$, existe $m' \in M$ con $r.m' = m$), entonces $M \otimes_R N = 0$. Por ejemplo

(i) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$;

(ii) para cada p primo $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^\infty} = 0$, donde $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$.

Proposición 3.90 *Sean M y N R-módulos, entonces*

(i) si $\{m_i\}_{i \in I}$ y $\{n_j\}_{j \in J}$ generan M y N respectivamente, entonces $\{m_i \otimes n_j\}_{i \in I, j \in J}$ genera $M \otimes N$;

(ii) si M y N son R-módulos libres, de bases $\{m_i\}_{i \in I}$ y $\{n_j\}_{j \in J}$ respectivamente, entonces $M \otimes N$ es libre de base $\{m_i \otimes n_j\}_{i \in I, j \in J}$. En particular, cuando tenga sentido, se verifica que $rg_R(M \otimes N) = rg_R(M) rg_R(N)$.

Proposición 3.91 *Sean M, N, P y $\{M_i : i \in I\}$ R-módulos. Se tienen los siguientes isomorfismos*

(i) $M \otimes_R N \xrightarrow{\simeq} N \otimes_R M$, dado por $x \otimes y \to y \otimes x$;

(ii) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \overset{\simeq}{\to} M \otimes_R (N \otimes_R P)$, *dado por* $(x \otimes y) \otimes p \to x \otimes (y \otimes p)$*;*

(iii) $\bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R P) \overset{\simeq}{\to} \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_R P$, *dado por* $(x_i)_{i \in I} \otimes p \to (x_i \otimes p)_{i \in I}$*;*

(iv) $R \otimes_R M \overset{\simeq}{\to} M$, *dado por* $r \otimes x \to r.x$, *y de inverso* $x \to 1 \otimes x$.

Observación 3.92 El primer ejemplo de producto tensorial no trivial por un anillo R, $M \otimes_R N$, es el siguiente: sea K un cuerpo y consideremos los polinomios en una y dos variables sobre el cuerpo $K[X]$ y $K[X, Y]$. Sabemos que existe un isomorfismo

$$K[X] \otimes_K K[X] \simeq K[X] \otimes_K K[Y] \simeq K[X, Y],$$

a través de la aplicación $p(x) \otimes q(y) \to p(x)q(y)$, cuya inversa se escribe teniendo en cuenta que todo polinomio en $K[X, Y]$ es suma de polinomios en variables separadas.
Sin embargo, la proposición 3.91 dice que

$$K[X] \otimes_{K[X]} K[X] \simeq K[X] \not\simeq K[X, Y].$$

Definición 3.93 Sean M, M', N, N' R-módulos y $f\colon M \longrightarrow M'$, $g\colon N \longrightarrow N'$ R-homomorfismos de R-módulos. Se puede definir el R-homomorfismo $f \otimes g\colon M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$, por $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$.

Observación 3.94 Dados dos R-módulos M y N, sean

$$M \otimes_R -\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R, \quad N \to M \otimes_R N, \quad \psi \to id_M \otimes \psi,$$

$$- \otimes_R N\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R, \quad M \to M \otimes_R N, \quad \psi \to \psi \otimes id_N,$$

que son dos functores covariantes. Tenemos también un bifunctor

$$- \otimes_R -\colon \mathbf{Mod}_R \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R, \quad (M, N) \to M \otimes_R N.$$

Podemos definir también el functor Hom, por

$$Hom_R(M, -)\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R, \quad N \to Hom_R(M, N), \quad \psi \to \psi_*, \quad \psi_*(\alpha) := \psi \circ \alpha,$$

$$Hom_R(-, N)\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R, \quad M \to Hom_R(M, N), \quad \varphi \to \varphi^*, \quad \varphi^*(\beta) := \beta \circ \varphi.$$

Así, $Hom_R(M, -)$ es un functor covariante y $Hom_R(-, N)$ uno contravariante. Tenemos también un bifunctor

$$Hom_R(-, -)\colon \mathbf{Mod}_R \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R, \quad (M, N) \to Hom_R(M, N).$$

Entre los bifunctores Hom_R y $\otimes_R$ existe una estrecha relación

Lema 3.95 *Existe una equivalencia natural entre los tri-functores*

$$Hom_R(- \otimes_R -, -)\colon (\mathbf{Mod}_R \times \mathbf{Mod}_R) \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R \quad \textit{y}$$

$$Hom_R(-, Hom_R(-,-))\colon \mathbf{Mod}_R \times (\mathbf{Mod}_R \times \mathbf{Mod}_R) \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$$

donde para cada terna de R-módulos M_1, M_2, N, existe un isomorfismo

$$Hom_R(M_1 \otimes_R M_2, N) \simeq Hom_R(M_1, Hom_R(M_2, N)) \simeq Bil_R(M_1 \times M_2, N),$$

que conmuta con los R-homomorfismos $M_1 \to M_1'$, $M_2 \to M_2'$, $N \to N'$.

Definición 3.96 Un functor $F\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ se dice *aditivo*, si dados dos R-módulos M y N y dos aplicaciones R-lineales $f, g \in Hom_R(M, N)$, es $F(f+g) = F(f) + F(g)$.

Corolario 3.97 *Sea $F\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un functor aditivo. Entonces*

(i) para cada par de módulos M y N, la aplicación nula $0\colon M \longrightarrow N$ es tal que $F(0) = 0$,

(ii) es $F(\{0\}) = \{0\}$.

Lema 3.98 *Sea $F\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un functor aditivo y $M = M_1 \bigoplus \ldots \bigoplus M_k \in \mathbf{Mod}_R$. Entonces $F(M) = F(M_1) \bigoplus \ldots \bigoplus F(M_k)$.*

Definición 3.99 Un functor aditivo $F\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ se llama *exacto*, si F lleva sucesiones exactas en sucesiones exactas.

Ejemplos 3.100 El álgebra homológica proporciona muchos ejemplos donde estos functores son exactos, pero también existen gran cantidad de contraejemplos

1. $Hom_R(M, -)$ no es exacto en general: sea el functor $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, -)$ y la sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to \{0\}$. Se tiene que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \{0\}$. Por otro lado,

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \neq \{0\}.$$

Así, $\{0\} = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \to \{0\}$ no puede ser una sucesión exacta, es decir, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, -)$ no es un functor exacto;

2. $Hom_R(-, N)$ tampoco es exacto en general: sea el functor $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ y la sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos, $\{0\} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Se tiene que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, pero $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$;

3. $N \otimes_R -$ y $- \otimes_R M$ no son en general exactos: los dos functores se comportan igual, por la simetría de $- \otimes_R -$. Dado $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} -$, la sucesión exacta $\{0\} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$ se transforma en la sucesión $\{0\} \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_2$, que no es exacta, porque la multiplicación por 2 lleva $\mathbb{Z}_2$ en $\{0\}$.

Definición 3.101 Sea $F\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un functor aditivo y covariante. F se dice *exacto a izquierda* si para toda sucesión exacta de R-módulos $\{0\} \to M' \to M \to M''$, se tiene la sucesión exacta $\{0\} \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$. F se dice *exacto a derecha* si para toda sucesión exacta de R-módulos $M' \to M \to M'' \to \{0\}$, se tiene la sucesión exacta $F(M') \to F(M) \to F(M'') \to \{0\}$.

Definición 3.102 Sea $G\colon \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un functor aditivo y contravariante. G se dice *exacto a izquierda* si para toda sucesión exacta de R-módulos $M' \to M \to M'' \to \{0\}$, se tiene la sucesión exacta $\{0\} \to G(M'') \to G(M) \to G(M')$. G se dice *exacto a derecha* si para toda sucesión exacta de R-módulos, $\{0\} \to M' \to M \to M''$, se tiene la sucesión exacta $G(M'') \to G(M) \to G(M') \to \{0\}$.

Proposición 3.103 *Sea N un R-módulo. Entonces*

(i) los functores $Hom_R(-, N)$ y $Hom_R(N, -)$ son exactos a izquierda;

(ii) los functores $- \otimes_R N$ y $N \otimes_R -$ son exactos a derecha.

Las anteriores propiedades dan lugar a las definiciones siguientes

Definición 3.104 Un R-módulo N se llama

(i) *inyectivo*, cuando $Hom_R(-, N)$ es exacto;

(ii) *proyectivo*, cuando $Hom_R(N, -)$ es exacto;

(iii) *llano*, cuando $N \otimes_R -$ es exacto.

Los anteriores conceptos están relacionados

Lema 3.105 *Sea M un R-módulo. Se verifica*

(i) M es proyectivo si y sólo si es sumando directo de un R-módulo libre, i.e. existe un conjunto de índices y un R-módulo N, tales que $R^{(I)} = M \oplus N$ salvo isomorfismos de R-módulos;

(ii) si M es libre, entonces es proyectivo;

(iii) si M es proyectivo, entonces es llano.

Ejemplos 3.106 Veamos contraejemplos para las anteriores propiedades

(i) un módulo proyectivo no es necesariamente libre: si $R = \mathbb{Z}_6$, entonces $N = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y $M = 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ son ideales de R, $M \bigoplus N = R$ y $M \cap N = \{0\}$. N es proyectivo, por ser sumando directo de un módulo libre, pero no es libre pues no es de la forma $R^{(I)}$;

(ii) aunque $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo llano (e inyectivo), no es ni proyectivo ni libre;

(iii) $\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}$-libre (por lo tanto, proyectivo y llano), pero no es inyectivo, pues la sucesión exacta $\{0\} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \{0\}$ no induce otra exacta

$$\{0\} \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \{0\};$$

(iv) $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, pero no es llano, pues la sucesión exacta obvia dada por $\{0\} \to \mathbb{Z} \stackrel{\times 2}{\to} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \{0\}$ no induce otra exacta

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{2^\infty} \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{2^\infty} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{2^\infty} \to \{0\}.$$

Para R-módulos inyectivos, se cumple

Lema 3.107 *Se verifican las propiedades*

(i) un R-módulo N es inyectivo si y sólo si toda sucesión exacta de R-módulos y R-homomorfismos $0 \to N \to M_1 \to M_2 \to 0$ escinde;

(ii) si $\{M_i : i \in I\}$ es una familia de R-módulos y $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un R-módulo inyectivo, entonces cada M_i lo es;

(iii) si $\{M_i : i \in I\}$ es una familia de R-módulos, entonces $\prod_{i\in I} M_i$ es un R-módulo inyectivo si y sólo si cada M_i lo es;

(iv) un grupo abeliano G es divisible si y sólo si es $\mathbb{Z}$-inyectivo;

(v) un sumando directo de un R-módulo inyectivo es inyectivo;

(vi) criterio de Baer*: un R-módulo N es inyectivo si y sólo para todo ideal I de R y toda aplicación R-lineal $\alpha \colon I \longrightarrow N$, α se extiende a R.*

Ejemplos 3.108 Se verifica

(i) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}$-inyectivo;

(ii) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es $\mathbb{Z}$-inyectivo para todo p primo;

(iii) un R-submódulo de un módulo inyectivo no lo es en general: $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Z}$-inyectivo y $\mathbb{Z}$ no lo es.

Para R-módulos proyectivos, se cumple

Lema 3.109 *Se verifican las propiedades*

(i) un R-módulo N es proyectivo si y sólo si toda sucesión exacta de R-módulos y R-homomorfismos $0 \to M_1 \to M_2 \to N \to 0$ escinde;

(ii) todo R-módulo que sea sumando directo de un R-módulo proyectivo, es proyectivo;

(iii) si $\{M_i : i \in I\}$ es una familia de R-módulos, entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un R-módulo proyectivo si y sólo si cada M_i lo es;

(iv) si $\{M_i : i \in I\}$ es una familia de R-módulos y $\prod_{i\in I} M_i$ es un R-módulo proyectivo, entonces cada M_i lo es;

(v) si R es un cuerpo, M es R-libre si y sólo si es proyectivo.

Ejemplos 3.110 Se verifica

(i) el cociente de un R-módulo proyectivo no es en general proyectivo: por ejemplo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$;

(ii) un R-submódulo de un módulo proyectivo no tiene porque ser proyectivo: si $R = M = \mathbb{Z}_4$, M es proyectivo, pero $N = 2\mathbb{Z}_4$ no lo es.

Para R-módulos llanos, se cumple

Lema 3.111 *Se verifican las propiedades*

(i) un R-módulo N es llano si y sólo dado un R-homomorfismo inyectivo $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$, entonces $1_N \otimes f\colon N \otimes M_1 \longrightarrow N \otimes M_2$ es también inyectivo;

(ii) un sumando directo de un R-módulo llano es llano;

(iii) si $\{M_i : i \in I\}$ es una familia de R-módulos, entonces $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ es un R-módulo llano si y sólo si cada M_i lo es.

Ejemplos 3.112 Se verifica

(i) R es llano como R-módulo;

(ii) el cociente de un R-módulo llano no es en general llano: por ejemplo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ no es llano como $\mathbb{Z}$-módulo.

3.7 Los functores Ext y Tor

Definición 3.113 Sea M un R-módulo. Una *resolución* de M es un complejo de cadenas $\mathcal{F}_*$

$$\mathcal{F}_* : \quad \dots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} \{0\}$$

y un homomorfismo $\varepsilon\colon F_0 \longrightarrow M$ tal que la sucesión

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

es exacta, es decir, $H_n(\mathcal{F}_*) = \{0\}$ para cada $n > 0$ y $H_0(\mathcal{F}_*) \xrightarrow{\simeq\varepsilon} M$. Denotaremos la resolución por $(\mathcal{F}_*, d_*, \varepsilon)$. $(\mathcal{F}_*, d_*, \varepsilon)$ se dice *proyectiva* (respectivamente, *libre*), si todos los F_n son R-módulos proyectivos (respectivamente, libres).

Teorema 3.114 *Todo R-módulo posee una resolución libre.*

Observación 3.115 El módulo $M_1 = Ker(\varepsilon)$ se llama *primer R-módulo de "syzygies"* de M y se denota $syz_1(M)$. En general, dada

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

una resolución proyectiva (respectivamente, libre) de M, se denota

$$syz_n(M) := syz(syz_{n-1}(M)) = Ker(d_{n-1}),$$

al n-ésimo R-módulo de "syzygies" de M. Al menor número natural $d \geq 0$ para el que $syz_d(M)$ es proyectivo, se le llama *dimensión proyectiva* de M, y se denota $pdim(M)$. Se define $syz_0(M) := M$. Por lo tanto, M es proyectivo cuando $pdim(M) = 0$. En general, $pdim(M) = d < \infty$, cuando M tiene una resolución proyectiva finita

$$\{0\} \to P_d \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to \{0\}.$$

Observación 3.116 El **teorema de syzygies** de Hilbert afirma que para cada cuerpo K, todo $K[x_1, \ldots, x_n]$-módulo M es tal que $pdim(M) \leq n$.

Observación 3.117 La palabra "syzygie" viene del griego $\sigma\nu\zeta\nu\gamma\iota\alpha$, y significa conjunción, unión.

Teorema 3.118 *Sea $f\colon M \longrightarrow M'$ un homomorfismo de R-módulos y $\mathcal{P}_*, \mathcal{P}'_*$ resoluciones proyectivas de M y M' respectivamente. Existen homomorfismos (salvo homotopía) $F_*\colon \mathcal{P}_* \longrightarrow \mathcal{P}'_*$ y se obtiene el siguiente diagrama de cuadrados conmutativos*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \ldots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \to & \{0\} \\
 & & \downarrow F_n & & \downarrow F_{n-1} & & & & \downarrow F_1 & & \downarrow F_0 & & \downarrow f & & \\
\ldots & \xrightarrow{d'_{n+1}} & P'_n & \xrightarrow{d'_n} & P'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & \ldots & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & M' & \to & \{0\}
\end{array}$$

Corolario 3.119 *Sea M un R-módulo. Dos resoluciones proyectivas de M, $\mathcal{P}_*$ y $\mathcal{P}'_*$, son homotópicamente equivalentes.*

Lema 3.120 *Sea $\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$ una sucesión exacta de R-módulos. Existe una sucesión exacta de resoluciones libres $\mathcal{O} \to \mathcal{F}'_* \to \mathcal{F}_* \to \mathcal{F}''_* \to \mathcal{O}$, de modo que el siguiente diagrama de filas y columnas exactas conmuta*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\{0\} & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & \{0\} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\{0\} & \to & F'_0 & \to & F_0 & \to & F''_0 & \to & \{0\} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\{0\} & \to & F'_1 & \to & F_1 & \to & F''_1 & \to & \{0\} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Observación 3.121 Dados M y N dos R-módulos y

$$\ldots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

una resolución proyectiva (respectivamente, libre). Se puede hacer actuar $-\otimes_R N$ y $Hom_R(-,N)$ sobre $\mathcal{P}_*$ y se obtienen los dos complejos

$$\mathcal{P}_* \otimes_R N: \quad \ldots \overset{d_3\otimes id_N}{\longrightarrow} P_2 \otimes_R N \overset{d_2\otimes id_N}{\longrightarrow} P_1 \otimes_R N \overset{d_1\otimes id_N}{\longrightarrow} P_0 \otimes_R N \overset{d_0\otimes id_N}{\longrightarrow} \{0\}$$

$$Hom_R(\mathcal{P}_*, N): \quad \{0\} \xrightarrow{d_0^*} Hom_R(P_0, N) \xrightarrow{d_1^*} Hom_R(P_1, N) \xrightarrow{d_2^*} \ldots$$

el primero es un complejo de cadenas y el segundo de cocadenas. No son complejos exactos en general, porque $-\otimes_R N$ y $Hom_R(-,N)$ no son functores exactos en general. La exactitud de éstos se describe a través de los functores Ext y Tor

Definición 3.122 Sean M y N dos R-módulos y $\mathcal{P}_*$ una resolución proyectiva de M. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el R-módulo $Tor_n^R(M,N)$ como

$$Tor_n^R(M,N) := H_n(\mathcal{P}_* \otimes_R N) = Ker(d_n \otimes id_N)/Im(d_{n+1} \otimes id_N)$$

y el R-módulo $Ext_R^n(M,N)$ como

$$Ext_R^n(M,N) := H^n(Hom_R(\mathcal{P}_*, N)) = Ker(d_n^*)/Im(d_{n-1}^*).$$

Por el corolario 3.119, Tor y Ext están definidos salvo isomorfismo, y no dependen de la resolución elegida para M.

Lema 3.123 *Sean M, N dos R-módulos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $Tor_n^R(M,N) \simeq Tor_n^R(N,M)$ es un isomorfismo natural.*

Se verifican las siguientes propiedades para Tor

Proposición 3.124 *Sean M, N dos R-módulos y $n \in \mathbb{N}$. Se verifica*

(i) $Tor_n^R(-,-)$: $\mathbf{Mod}_R \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ *es un bifunctor, covariante en M y N;*

(ii) se tienen los isomorfismos

$$Tor_n^R(M, N \bigoplus N') \simeq Tor_n^R(M,N) \bigoplus Tor_n^R(M,N') \text{y}$$

$$Tor_n^R(M \bigoplus M', N) \simeq Tor_n^R(M,N) \bigoplus Tor_n^R(M',N);$$

(iii) existe una equivalencia natural $\quad Tor_0^R(M,N) \simeq M \otimes_R N$*;*

(iv) si M o N son llanos, entonces

$$Tor_n^R(M,N) = \begin{cases} M \otimes_R N & \textit{si } n = 0 \\ \{0\} & \textit{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Se otiene la **sucesión exacta larga del functor** Tor

Teorema 3.125 *Sea M un R-módulo y $\{0\} \to N' \to N \to N'' \to \{0\}$ una sucesión exacta de R-módulos. Existe una sucesión exacta natural y larga*

$$\ldots \to Tor_2^R(M, N'') \to Tor_1^R(M, N') \to Tor_1^R(M, N) \to Tor_1^R(M, N'') \to$$

$$\to M \otimes_R N' \to M \otimes_R N \to M \otimes_R N'' \to \{0\}.$$

Corolario 3.126 *Sea M un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(i) M es llano,

(ii) para cada R-módulo N, es $Tor_1^R(M, N) = \{0\}$,

(iii) para cada R-módulo N y cada número natural $n \geq 1$, es $Tor_n^R(M, N) = \{0\}$.

Corolario 3.127 *Sea N un R-módulo y $\{0\} \to M' \to M \to M'' \to \{0\}$ una sucesión exacta de R-módulos. Existe una sucesión exacta natural y larga*

$$\ldots \to Tor_2^R(M'', N) \to Tor_1^R(M', N) \to Tor_1^R(M, N) \to Tor_1^R(M'', N) \to$$

$$\to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to \{0\}$$

Ejemplos 3.128 Sea N un $\mathbb{Z}$-módulo, entonces

1.

$$Tor_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, N) = \begin{cases} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \simeq N & \text{si } n = 0 \\ \{0\} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

2. sea $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times k} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\},$$

y se obtiene una resolución libre de $\mathbb{Z}_k$. Así,

$$Tor_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, N) = \{0\}, \quad \text{para} \quad n \geq 2,$$

$$Tor_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, N) \simeq \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} N \simeq N/kN,$$

$$Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, N) = Ker\left(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\times k \otimes id_N} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N\right) \simeq Ker(N \xrightarrow{\times k} N).$$

Así, $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, N) \simeq \{n \in \mathbb{N} : k.n = 0\}$, puede verse como la k-*torsión* de N. Y es $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, N) = \{0\}$, cuando para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ es $k.n \neq 0$.

Definición 3.129 Un *ideal* del anillo R es un subgrupo I de $(R, +)$, tal que para cada $i \in I$ y $r \in R$, es $r.i \in I$. Un ideal de la forma $\{r.i : r \in R\}$ con $i \in R$ es un *ideal principal*. Un anillo cuyos ideales son principales se llama *anillo de ideales principales*.

Observación 3.130 Si R es un anillo de ideales principales, cada submódulo de un R-módulo libre es libre. Así, cada R-módulo M tiene una resolución libre, que es a lo sumo de longitud 1,

$$\{0\} \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\},$$

es decir, $pdim(M) \leq 1$. Y entonces, obtenemos $Tor_n^R(M,N) = \{0\}$ y $Ext_n^R(M,N) = \{0\}$, para $n \geq 2$.

Se verifican las siguientes propiedades para Ext

Proposición 3.131 *Sean M y N dos R-módulos; entonces*

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$, $Ext_R^n(-,-)\colon \mathbf{Mod}_R \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ es un bifunctor, contravariante en M y covariante en N;

(ii) se tienen los isomorfismos

$$Ext_n^R(M, N \bigoplus N') \simeq Ext_n^R(M,N) \bigoplus Ext_n^R(M,N') \quad \text{y}$$

$$Ext_n^R(M \bigoplus M', N) \simeq Ext_n^R(M,N) \bigoplus Ext_n^R(M',N);$$

(iii) se tiene una equivalencia natural $Ext_R^0(M,N) \simeq Hom_R(M,N)$;

(iv) si M es proyectivo o N es inyectivo, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, es

$$Ext_R^n(M,N) = \begin{cases} Hom_R(M,N) & \textit{si } n = 0 \\ \{0\} & \textit{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.132 Sea K un cuerpo, $M := K[x] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Kx^n$ una suma directa de K-módulos. Sea $K[[x]] := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n x^n : r_n \in R \right\}$ el anillo de las potencias formales sobre K. Entonces, se tiene el isomorfismo $K[[x]] \xrightarrow{\simeq} Hom_K(K[x], K)$, que asocia a $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n x^n$ el homomorfismo $\left(\sum_{j=0}^{m} r_j x^j \longrightarrow \sum_{j=0}^{m} s_j r_j \right)$. Y

$$Hom_K(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Kx^n, K) = Hom_K(K[x], K) \simeq K[[x]] \simeq K^{\mathbb{N}}.$$

Por otro lado,

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Hom_K(Kx^n, K) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K = K^{(\mathbb{N})}.$$

Por lo tanto, $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Hom_K(Kx^n, K) \subset Hom(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Kx^n, K)$, pero no coinciden.

Se obtiene la **sucesión exacta larga del functor** Ext

Teorema 3.133 *Sea M un R-módulo y $\{0\} \to N' \to N \to N'' \to \{0\}$ una sucesión exacta corta de R-módulos. Existe una sucesión exacta natural y larga*

$$\{0\} \to Hom_R(M, N') \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(M, N'') \to$$

$$\to Ext^1_R(M, N') \to Ext^1_R(M, N) \to Ext^1_R(M, N'') \to Ext^2_R(M, N') \to \dots$$

y una sucesión exacta larga natural

$$\{0\} \to Hom_R(N'', M) \to Hom_R(N, M) \to Hom_R(N', M) \to$$

$$\to Ext^1_R(N'', M) \to Ext^1_R(N, M) \to Ext^1_R(N', M) \to Ext^2_R(N'', M) \to \dots$$

Teoría singular

Estamos en el ciclo de los nervios.
El músculo cuelga,
como recuerdo, en los museos;
mas no por eso tenemos menos fuerza:
el vigor verdadero
reside en la cabeza.

“Arte poética”
Vicente Huidobro (1893–1948)

4.1 Preliminares afines

Definición 4.1 Un subconjunto A del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es *afin*, si para cada $x, y \in A$, la recta por x e y está contenida en A. Y es *convexo*, si el segmento por x e y está en A.

Observación 4.2 Todo conjunto afín es convexo. El vacío y los puntos son trivialmente afines.

Teorema 4.3 *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ convexos (respectivamente, afines), entonces $\bigcap\limits_{j\in J} X_j$ es también convexo (respectivamente, afin).*

Tiene sentido hablar del subconjunto convexo (respectivamente, afin) en $\mathbb{R}^n$ generado por $X \subset \mathbb{R}^n$, es decir, la intersección de los subconjuntos convexos (respectivamente, afines) de $\mathbb{R}^n$ conteniendo a X

Definición 4.4 La *envolvente convexa* de X es el subconjunto convexo generado por X y se denota por $[X]$, y existe, pues $\mathbb{R}^n$ es afin, luego convexo.

Vamos a describir el conjunto $[X]$, para X finito

Definición 4.5 Una *combinación afin* de $n+1$ puntos $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$, es otro punto $x \in \mathbb{R}^n$, $x = t_0p_0 + \ldots + t_mp_m$, donde $t_0 + \ldots + t_m = 1$. Una *combinación convexa* es una afin, para la que $t_i \geq 0$, para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$.

Teorema 4.6 *Si $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto convexo formado por esos puntos o* m-símplice afín de vértices $\{p_0, \ldots, p_m\}$, $[p_0, \ldots, p_m]$, *es la familia de todas las combinaciones lineales convexas de $p_0, \ldots, p_m$.*

Corolario 4.7 *El conjunto afín generado por $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, consiste en todas las combinaciones afines de esos puntos.*

Definición 4.8 Un conjunto ordenado de puntos se llama *afinmente independiente*, si el conjunto $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_n - p_0\}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$.

Observación 4.9 Todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ es afinmente independiente; el recíproco no es cierto, pues un conjunto linealmente independiente junto con el origen, es afinmente independiente.

Ejemplos 4.10 Se tienen los siguientes ejemplos

1. $\{p_0\}$ es afinmente independiente, pues no existen puntos de la forma $p_i - p_0$ para $i \neq 0$ y el conjunto vacío $\emptyset$ es linealmente independiente;
2. $\{p_0, p_1\}$ es afinmente independiente, si $p_0 \neq p_1$;
3. $\{p_0, p_1, p_2\}$ es afinmente independiente, si los puntos no son colineales;
4. $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ es afinmente independiente, si los puntos no son coplanarios.

Teorema 4.11 *Sobre un conjunto ordenado de puntos $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, son equivalentes las siguientes condiciones*

(i) $\{p_0, \ldots, p_m\}$ es afinmente independiente;

(ii) si $\{s_0, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{R}$ satisface la relación $s_0p_0 + \ldots + s_mp_m = 0$ y $s_0 + \ldots + s_m = 0$, entonces $s_0 = \ldots = s_m = 0$;

(iii) para cada $x \in A$, el conjunto afín generado por $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, tiene una única expresión como una combinación afín $x = t_0p_0 + \ldots + t_mp_m$ y $t_0 + \ldots + t_m = 1$.

Corolario 4.12 *La "independencia afin" es una propiedad del conjunto $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, que no resulta del orden dado.*

Corolario 4.13 *Si A es el conjunto afín de $\mathbb{R}^n$ generado por el conjunto afinmente independiente $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, entonces A es un trasladado de un subespacio vectorial V m-dimensional de $\mathbb{R}^n$, $A = V + x_0$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Definición 4.14 Sea el conjunto afinmente independiente $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y sea A el conjunto afín generado por esos puntos. Si $x \in A$, por el teorema 4.11, sabemos que existe una única $(m+1)$-tupla, $(t_0, t_1, \ldots, t_m)$, tal que $t_0 + \ldots + t_m = 1$ y $t_0p_0 + \ldots + t_mp_m = x$. Los coeficientes de esta $(m+1)$-tupla, se llaman *coordenadas baricénticas* de x, relativas al conjunto ordenado $\{p_0, \ldots, p_m\}$. Estas coordenadas no dependen del espacio ambiente $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.15 *Si $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto afinmente independiente, entonces cada $x \in [p_0, \ldots, p_m]$ tiene una expresión única de la forma $x = t_0p_0 + \ldots t_mp_m$, con $t_0 + \ldots + t_m = 1$ y $t_i \geq 0$, $i \in \{0, \ldots, m\}$.*

Definición 4.16 Si $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto afinmente independiente, el *baricentro* de $[p_0, \ldots, p_m]$ es $\frac{1}{m+1}(p_0 + \ldots p_m)$ es decir, su centro de gravedad.

Ejemplos 4.17 Algunos ejemplos de baricentros son

1. p_0 es el baricentro de $[p_0]$;

2. el baricentro del segmento $[p_0, p_1]$ es el punto medio de este segmento, $\frac{1}{2}(p_0 + p_1)$;

3. el baricentro de $[p_0, p_1, p_2]$ (triángulo de vértices p_0, p_1 y p_2, con su interior) es el punto $\frac{1}{3}(p_0 + p_1 + p_2)$;

4. el baricentro de $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ (tetraedro sólido de vértices p_0, p_1, p_2 y p_3) es el punto $\frac{1}{4}(p_0 + p_1 + p_2 + p_3)$. La cara triangular opuesta a p_i, consiste en los puntos cuya i-ésima coordenada baricéntrica es 0;

5. para $i = 1, \ldots, n$, si $e_i = (0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, los $\{e_0, \ldots, e_n\}$ son afinmente independientes (incluso linealmente independientes). $[e_0, \ldots, e_n]$ consiste en las combinaciones lineales convexas $x = t_0e_0 + \ldots + t_ne_n$. En este caso, las coordenadas baricéntricas y cartesianas coinciden y $[e_0, \ldots, e_n] = \Delta_n$ es el *símplice geométrico estándar*.

Definición 4.18 Sea una familia de puntos afinmente independiente $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y A el conjunto afín generado por ellos. Una *aplicación afin* $T\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ (para algún $k \in \mathbb{N}$), es una función satisfaciendo $T(t_0p_0 + \ldots + t_mp_m) = t_0T(p_0) + \ldots + t_mT(p_m)$, para $t_0 + \ldots + t_m = 1$. La restricción de T a $[p_0, \ldots, p_m]$ se llama también una aplicación afin.

Observación 4.19 Las aplicaciones afines preservan combinaciones afines y por lo tanto, combinaciones convexas. Es claro que una aplicación afín está determinada por sus valores sobre un conjunto afinmente independiente, su restricción a un símplice se identifica pues por sus valores sobre los vértices. Por otro lado, la unicidad de las coordenadas baricéntricas relativas a $\{p_0, \ldots, p_m\}$, prueba que una tal aplicación afín existe, porque la fórmula dada está bien definida.

Teorema 4.20 *Si* $[p_0, \ldots, p_m]$ *es un* m*-símplice,* $[q_0, \ldots, q_n]$ *es un* n*-símplice y se tiene una función arbitraria* $f\colon \{p_0, \ldots, p_m\} \longrightarrow [q_0, \ldots, q_n]$*, entonces existe una única aplicación afín* $T\colon [p_0, \ldots, p_m] \longrightarrow [q_0, \ldots, q_n]$*, tal que* $T(p_i) = f(p_i)$*, para cada* $i \in \{0, \ldots, m\}$.

4.2 Teoría singular

Se considera un producto numerable de copias de $\mathbb{R}$, $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^\infty$ con la topología de Tychonoff, y para cada $n \in \mathbb{N}$, los vectores $e_0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ y $e_n = (0, \ldots, \overset{(n)}{1}, \ldots, 0, \ldots)$. Identificamos $\mathbb{R}^n$ con el subespacio de $\mathbb{R}^\infty$ que posee todas las componentes mayores que n nulas. Para cada $n \geq 0$, sea Δ_n el n-*símplice geométrico estándar*, es decir, el espacio afín generado por $e_0, e_1, e_2, \ldots e_n$. Así, Δ_0 es un punto, Δ_1 es el intervalo unidad, Δ_2 es un triángulo (incluido su interior), Δ_3 es un tetraedro, etc.

Observación 4.21 Δ_n es homeomorfo al disco cerrado unidad $\mathbb{D}^n$, para $n > 0$.

Definición 4.22 Sean $p_0, p_1, \ldots, p_n$ puntos linealmente independientes en un espacio afín E. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ la única aplicación afín que lleva e_i en p_i, para $i \in 0, 1, \ldots, n$. La restricción de f a Δ_n, $f|_{\Delta_n}$, se denota por $(p_0 p_1 \ldots p_n)$. En particular, $(e_0 e_1 \ldots e_n) = 1_{\Delta_n}$, se denota δ_n.

Definición 4.23 Sea X un espacio topológico. Un n-*símplice singular* en X, es una aplicación continua $f\colon \Delta_n \longrightarrow X$. Es decir, un 0-símplice singular puede identificarse con un punto en X, un 1-símplice singular puede pensarse con un camino en X, un 2-símplice singular es una aplicación del triangulo estándar en X, etc. Observar que $f(\Delta_n)$ puede incluso degenerar en un punto.

Vamos a aprender a sumar y restar estos símplices de manera puramente formal. Para ello, consideramos un anillo conmutativo unitario R; tendremos en mente los anillos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_k$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Definición 4.24 Se considera $S_n(X;R)$, el R-módulo libre generado por los n-símplices singulares, es decir

$$S_n(X;R) = \left\{ \sum_\sigma n_\sigma.\sigma : \sigma \text{ es } n - \text{símplice singular}, \quad n_\sigma \in R, \quad n_\sigma = 0 \quad pct\sigma \right\}, \quad \text{si } n \geq 0$$

$$S_n(X;R) = \{0\}, \quad \text{si } n < 0.$$

La única manera de que una tal suma sea nula, es que lo sean todos sus coeficientes. $S_n(X;R)$ es el R-módulo de las n-*cadenas singulares*.

Si $n > 0$, se define para $0 \leq i \leq n$, la aplicación afin, $\varepsilon_n^i\colon \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$, donde $\varepsilon_n^i = (e_0 e_1 \ldots \widehat{e_i} \ldots e_n)$, es decir,

$$\varepsilon_n^i(e_j) = \left\{ \begin{array}{ll} e_j & \text{si } j < i \\ e_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{array} \right\};$$

así, ε_n^i lleva el $(n-1)$-símplice Δ_{n-1} homeomórfica y afinmente sobre la cara (desde el punto de vista geométrico usual) opuesta al vértice e_i en Δ_n. Y, en el caso singular

Definición 4.25 Si σ es un n-símplice singular en X, se define la i-*ésima cara*, $\sigma^{(i)}$ de σ, como el $(n-1)$-símplice singular definido por $\sigma \circ \varepsilon_n^i$. En particular, $\varepsilon_n^i = (\delta_n)^{(i)}$.

Por el momento, sólo hemos considerado caras no orientadas

Definición 4.26 La *frontera* de un n-símplice singular σ, es la $(n-1)$-cadena singular definida por $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}$, es decir, es la suma formal de sus caras, dotadas de signo.

Ejemplos 4.27 Algunos ejemplos de fronteras, son

1. la frontera del 2-símplice $(e_0e_1e_2)$ es $\partial_2(e_0e_1e_2) = (e_1e_2) - (e_0e_2) + (e_0e_1)$ y puede interpretarse como la suma algebraica de los bordes del triángulo estándar, con los signos elegidos de modo que se empieza por e_0 y se viaja alrededor de un *lazo* hasta volver a llegar a e_0 (aunque no es un lazo, sino una suma formal, con signos, de tres caminos);

2. si X es un espacio afín y $\sigma = (p_0p_1 \dots p_n)$, entonces $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(p_0p_1 \dots \widehat{p_i} \dots p_n)$.

Observación 4.28 Por linealidad, se puede extender el operador frontera a un homomorfismo de R-módulos, $\partial_n \colon S_n(X;R) \longrightarrow S_{n-1}(X;R)$, donde $\partial_n\left(\sum_\sigma n_\sigma.\sigma\right) = \sum_\sigma n_\sigma.\partial_n(\sigma)$.

Lema 4.29 *Si $j < i$, se da la igualdad $\varepsilon^i_{n+1} \circ \varepsilon^j_n = \varepsilon^j_{n+1} \circ \varepsilon^{i-1}_n \colon \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_{n+1}$.*

El operador frontera es idempotente, en el siguiente sentido

Lema 4.30 *Para cada $n \geq 0$, es $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, es decir, $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\partial_n)$.*

Tenemos así el *complejo de cadenas singulares* $(S_*(X;R), \partial)$, donde

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X;R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X;R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} S_{n-2}(X;R) \to \dots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X;R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X;R) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}.$$

Definición 4.31 Una n-cadena singular $c \in S_n(X;R)$ es un n-*ciclo*, si $\partial_n(c) = 0$, es decir, $c \in Ker(\partial_n)$. Y si existe $c' \in S_{n+1}(X;R)$, tal que $\partial_{n+1}(c') = c$, se dice que c es un n-*borde*; de otro modo, $c \in Im(\partial_{n+1})$. Si se denota por $Z_n(X;R)$ el conjunto de los n-ciclos y por $B_n(X;R)$ el conjunto de los n-bordes, claramente ambos son submódulos de $S_n(X;R)$, y a su vez $B_n(X;R)$ es un submódulo de $Z_n(X;R)$.

Se define la siguiente relación de equivalencia sobre $S_n(X;R)$

$$c_1 \sim c_2 \text{ si existe } c_3 \in S_{n+1}(X;R) \text{ tal que } c_1 - c_2 = \partial_{n+1}(c_3),$$

es decir, si c_1 y c_2 difieren en un borde, esto es, $c_1 - c_2 \in B_n(X;R)$. En tal caso, se dice que c_1 y c_2 son n-*cadenas homólogas*.

Definición 4.32 Como $B_n(X;R)$ es un submódulo de $Z_n(X;R)$, tiene sentido hablar del R-módulo cociente, $H_n(X;R) = Z_n(X;R)/B_n(X;R)$, y se llama n-*ésimo* R-*módulo de homología singular de* X. La *homología total* de X es

$$H_*(X;R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(X;R) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n(X;R).$$

Observación 4.33 Es decir, la homología singular es la homología del complejo de las cadenas singulares $H_n(X;R) := H_n(S_*(X;R))$.

Se verifica el **axioma de dimensión**

Lema 4.34 *Si X se reduce a un punto,*

$$H_n(X;R) = \begin{cases} R & \textit{si } n = 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 4.35 X se llama *acíclico*, si $H_n(X;R) = 0$, para $n > 0$.

Proposición 4.36 *Sea $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ el conjunto de las componentes conexas por caminos de X. Entonces, para cada $n \geq 0$, existe un isomorfismo canónico*

$$H_n(X;R) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(X_\lambda;R).$$

Lema 4.37 *Si X es conexo por caminos, $H_0(X;R) \simeq R$.*

Proposición 4.38 *En las condiciones de la proposición 4.36, $H_0(X;R) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R$, es decir, el R-módulo libre con tantos generadores como componentes conexas tiene X.*

Observación 4.39 Teniendo en cuenta la proposición 4.36, se puede suponer a partir de ahora que X es conexo por caminos.

Nuestro siguiente objetivo, es probar que $H_n(-;R)$ es un functor de **Top** en **Mod**$_R$. Sea para ello $f\colon X \longrightarrow Y$ continua y $\sigma\colon \Delta_n \longrightarrow X$ un n-símplice, entonces, $f \circ \sigma\colon \Delta_n \longrightarrow Y$ es un n-símplice en Y. Si se extiende esta aplicación linealmente, tenemos un homomorfismo de grupos $S_n(f)\colon S_n(X;R) \longrightarrow S_n(Y;R)$, definido del modo $S_n(f)\left(\sum_\sigma n_\sigma.\sigma\right) = \sum_\sigma n_\sigma.(f \circ \sigma)$. Y se verifica

Lema 4.40 *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua, entonces para $n \geq 0$, es $S_{n-1}(f) \circ \partial_n^X = \partial_n^Y \circ S_n(f)$.*

Lema 4.41 *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua, entonces para $n \geq 0$, es*

$$S_n(f)(Z_n(X;R)) \subset Z_n(Y;R) \quad \textit{y} \quad S_n(f)(B_n(X;R)) \subset B_n(Y;R).$$

Del lema anterior, se deduce fácilmente

Teorema 4.42 *Para $n \geq 0$, $H_n(-;R)$ es un functor covariante de* **Top** *en* **Mod**$_R$.

Cada R-módulo de homología es un invariante del espacio X

Corolario 4.43 *Si X e Y son espacios homeomorfos, entonces para cada $n \geq 0$, $H_n(X;R)$ y $H_n(Y;R)$ son isomorfos.*

Propiedades de Homotopía

Dentro de la claridad
del aceite y sus aromas,
indican tu libertad
la libertad de tus lomas.

“Aceituneros”
Miguel Hernández (1910–1942)

5.1 El teorema de invarianza por homotopía

El objetivo es probar que si $f, g\colon X \longrightarrow Y$ son continuas y homótopas, entonces para cada $n \geq 0$, es $H_n(f) = H_n(g)$.

Si $H : f \simeq g$ es la homotopía que las relaciona y para cada $t \in [0,1]$, definimos $\lambda_t\colon X \longrightarrow X \times [0,1]$ por $\lambda_t(x) = (x,t)$, entonces $\{\lambda_t : t \in [0,1]\}$ es una homotopía entre λ_0 y λ_1. Además, $H \circ \lambda_t\colon X \longrightarrow Y$, verifica que $H \circ \lambda_0 = f$ y $H \circ \lambda_1 = g$, luego para cada $n \geq 0$, es $H_n(f) = H_n(H) \circ H_n(\lambda_0)$ y $H_n(g) = H_n(H) \circ H_n(\lambda_1)$. Si probamos que para cada $n \geq 0$, es $H_n(\lambda_0) = H_n(\lambda_1)$, entonces quedará probado el resultado deseado.

Para probar esta igualdad, se define un homomorfismo, el *operador prisma*,

$$P_n^X\colon S_n(X;R) \longrightarrow S_{n+1}(X \times [0,1];R),$$

verificando la llamada *relación prismática*: para $n \geq 0$,

$$\partial_{n+1}^{X\times[0,1]} \circ P_n^X + P_{n-1}^X \circ \partial_n^X = S_n(\lambda_1) - S_n(\lambda_0), \tag{5.1}$$

y así, según la definición 3.59, $P^X : \lambda_1 \simeq \lambda_0$ es una homotopía en cadenas.

Lema 5.1 *Si se cumple (5.1), entonces para cada $n \geq 0$, es $H_n(\lambda_0) = H_n(\lambda_1)$.*

Lema 5.2 *Si $\sigma\colon \Delta_n \longrightarrow X$ es un n-símplice singular en X, entonces $\sigma = S_n(\sigma)(\delta_n)$.*

Para conocer P_n^X para $n \geq 0$, bastará con conocer $P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ y definir entonces

$$P_n^X \circ S_n(\sigma) = S_{n+1}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}.$$

Por lo tanto, es $P_n^X \circ S_n(\sigma)(\delta_n) = S_{n+1}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$, y usando el lema 5.2, queda

$$P_n^X(\sigma) = S_{n+1}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n). \tag{5.2}$$

De hecho, (5.2) equivale a que para todo par de espacios X e Y, cada aplicación continua $f\colon X \longrightarrow Y$ y cada $n \geq 0$, sea

$$P_n^Y \circ S_n(f) = S_{n+1}(f \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^X, \tag{5.3}$$

que es la *condición de naturalidad* para el operador prisma.

Denotamos, ahora $a_i = (e_i, 0)$ y $b_i = (e_i, 1)$, para $i \in \{0, \ldots, n\}$ y definimos

$$P_n^{\Delta_n}(\delta_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (a_0 \ldots a_i b_i \ldots b_n),$$

donde claramente $(a_0 \ldots a_i b_i \ldots b_n)\colon \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_n \times [0,1]$.

Proposición 5.3 *Con las definiciones anteriores, el operador prisma verifica la relación (5.1).*

Observación 5.4 La propiedad expresada por la relación (5.1), expresa que la frontera orientada del prisma sólido $\partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ es precisamente la unión de las tapas superior e inferior del prisma, salvo un *factor corrector* $P_{n-1}^{\Delta_n} \circ \partial_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ formado por sus paredes laterales.

Proposición 5.5 *Sean $f, g\colon X \longrightarrow Y$ aplicaciones homótopas. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, es $H_n(f) = H_n(g)\colon H_n(X; R) \longrightarrow H_n(Y; R)$.*

Corolario 5.6 *Si X e Y son homotópicamente equivalentes, entonces los R-módulos $H_n(X; R)$ y $H_n(Y; R)$ son isomorfos, para cada $n \geq 0$.*

Corolario 5.7 *Si X es contráctil, entonces es $H_n(X; R) = 0$, para cada $n > 0$.*

Corolario 5.8 *Si A es un retracto por deformación de X, la inclusión natural $i_A\colon A \longrightarrow X$ induce un isomorfismo entre $H_n(A; R)$ y $H_n(X; R)$.*

5.2 El teorema de Hurewicz

En este apartado, se considera el anillo $R = \mathbb{Z}$. Se trata de relacionar el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ y el grupo abeliano $H_1(X; \mathbb{Z})$, para un espacio topológico X, a través del **teorema de Hurewicz**

Teorema 5.9 *Existe un homomorfismo de grupos* $\chi\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$*, la* aplicación de Hurewicz*, que lleva la clase de homotopía de un camino* γ *basado en* x_0 *en la clase de homología del 1-símplice singular* γ*. Además, si* X *es conexo por caminos, se verifica que*

(i) χ *es sobreyectiva y*

(ii) $Ker(\chi)$ *es el subgrupo conmutador de* $\pi_1(X, x_0)$*, es decir,*

$$[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = \langle aba^{-1}b^{-1} : a, b \in \pi_1(X, x_0)\rangle,$$

de otro modo, $H_1(X; \mathbb{Z})$ *es el grupo abelianizado de* $\pi_1(X, x_0)$*,*

$$\pi_1(X, x_0)^{ab} := \pi_1(X, x_0)/\left[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)\right].$$

Corolario 5.10 *Si* X *es conexo por caminos,* χ *es un isomorfismo si y sólo si* $\pi_1(X)$ *es abeliano.*

Ejemplos 5.11 Como consecuencia del teorema de Hurewicz, se pueden calcular los siguientes grupos de homología

1. $H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$;

2. $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$;

3. como $\pi_1(\mathbf{8}) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, se deduce que $H_1(\mathbf{8}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$;

4. si X es simplemente conexo, entonces $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$. En particular, $H_1(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) = 0$, para $n > 1$.

Homología relativa

Están mejor; una luz
que el sol no sabe, unos rayos
los iluminan, sin noche,
para siempre revelados.

“El Poema”
Pedro Salinas (1891–1951)

6.1 Los módulos de homología relativa

El concepto de homología relativa es análogo al de cociente de un grupo por un subgrupo. Si $A \subset X$, dos cadenas en X se dirán *iguales (mod A)*, si su diferencia es una cadena en A. En particular, una cadena en X será un *ciclo (mod A)*, si su borde está contenido en A. Esto refleja la estructura de $X - A$ y el modo en que está conectada con A. En un sentido, los cambios en el interior de A (fuera de su frontera con $X - A$) no deberían alterar los grupos de homología de $X - A$.

Los grupos de homología relativos a $A \subset X$ se introducen en un espacio X, para intentar generalizar y hacer más precisa la noción de *propiedades con borde* de las curvas cerradas sobre una superficie: un sistema de *cortes abiertos* uniendo puntos de A, *dividirá* X, si los cortes realizados (junto con una porción de los bordes de los agujeros) forman una frontera de X.

Definición 6.1 Sea $A \subset X$. Para cada $n \geq 0$, $S_n(A;R)$ es un submódulo de $S_n(X;R)$, que consiste en las combinaciones lineales de n-símplices singulares $\sigma\colon \Delta_n \longrightarrow X$, tales que $\sigma(\Delta_n) \subset A$. Se puede entonces considerar el módulo cociente $S_n(X;R)/S_n(A;R)$. Además, como el operador ∂_n envía $S_n(A;R)$ en $S_{n-1}(A;R)$, induce un homomorfismo sobre los espacios cociente,

$$\overline{\partial_n}\colon S_n(X;R)/S_n(A;R) \longrightarrow S_{n-1}(X;R)/S_{n-1}(A;R),$$

de modo que si $c \in S_n(X;R)$, es $\overline{\partial_n}(c + S_n(A;R)) = \partial_n(c) + S_{n-1}(A;R)$.

Por otro lado, como $\overline{\partial_{n-1}} \circ \overline{\partial_n}$ es la aplicación nula, $Im(\overline{\partial_{n+1}})$ es un submódulo de $Ker(\overline{\partial_n})$, y se puede considerar el módulo cociente $Ker(\overline{\partial_n})/Im(\overline{\partial_{n+1}})$, que se denota por $H_n(X,A;R)$ y se llama *n-ésimo módulo de homología relativa de X módulo A.*

Observación 6.2 Esta homología es precisamente la del complejo cociente de $S_*(X;R)$ módulo $S_*(A;R)$, según la definición 3.11.

Se puede obtener directamente este módulo a partir de $S_n(X;R)$, de la manera siguiente: sea $c \in S_n(X;R)$, decir que $c + S_n(A;R) \in Ker(\overline{\partial_n})$ equivale a $\partial_n(c) \in S_{n-1}(A;R)$. Por lo tanto, el conjunto

$$Z_n(X,A;R) = \{c \in S_n(X;R) : \partial_n(c) \in S_{n-1}(A;R)\},$$

es un submódulo de $S_n(X;R)$, cuyos elementos se llaman *n-ciclos relativos de X módulo A*. Así, si $\pi_n : S_n(X;R) \longrightarrow S_n(X;R)/S_n(A;R)$ es la aplicación cociente, se puede expresar $Z_n(X,A;R) = \pi_n^{-1}(Ker(\overline{\partial_n}))$. Y, ¿quién es entonces $\pi_n^{-1}(Im(\overline{\partial_{n+1}}))$? Es un submódulo de $S_n(X;R)$, el grupo de los *n-bordes relativos en X módulo A*, y que es precisamente

$$B_n(X,A;R) = \{c \in S_n(X;R) : \text{ existe } c_A \in S_n(A;R) \text{ tal que } c \text{ es homólogo (en } X\text{) a } c_A\}.$$

Observación 6.3 Claramente, $S_n(A;R) \subset B_n(X,A;R)$.

Definición 6.4 Cuando $c - c' \in B_n(X,A;R)$, se escribe $c \sim c'$(mod A).

Lema 6.5 $H_n(X,A;R) \simeq Z_n(X,A;R)/B_n(X,A;R)$.

Observación 6.6 Si $A = \emptyset$, es $S_n(A;R) = 0$, para todo $n \geq 0$, y entonces es claramente $H_n(X,\emptyset;R) = H_n(X;R)$, es decir, la homología puede pensarse como un caso particular de homología relativa.

Dada una aplicación entre pares de espacios $f : (X,A;R) \longrightarrow (Y,B;R)$, el homomorfismo inducido en cadenas $S_n(f) : S_n(X;R) \longrightarrow S_n(Y;R)$ envía $S_n(A;R)$ en $S_n(B;R)$, y por lo tanto, lleva $Z_n(X,A;R)$ en $Z_n(Y,B;R)$ y $B_n(X,A;R)$ en $B_n(Y,B;R)$, así pues, da lugar, por paso al cociente, a un homomorfismo $H_n(f) : H_n(X,A;R) \longrightarrow H_n(Y,B;R)$, tal que $H_n(1_X) = 1_{H_n(X,A;R)}$ y $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$, es decir

Lema 6.7 *Los módulos de homología relativa son functoriales en (X,A).*

Proposición 6.8 *Si $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es la familia de las componentes conexas por caminos de X y $A_\lambda = A \cap X_\lambda$, entonces existe un isomorfismo canónico*

$$H_n(X,A;R) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda, A_\lambda; R).$$

Proposición 6.9 *Si X es conexo por caminos y $A \neq \emptyset$, entonces $H_0(X,A;R) = 0$.*

Corolario 6.10 *Si $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es la familia de las componentes conexas por caminos de X y $A_\lambda = A \cap X_\lambda$, entonces $H_0(X,A;R)$ es un módulo abeliano libre con tantos generadores como índices tales que $A_\lambda = \emptyset$, es decir,*

$$H_0(X,A;R) = \bigoplus_{i \in J} R = R^{(J)},$$

donde $J = \{i \in I : X_i \cap A = \emptyset\}$.

6.2 Sucesión exacta larga de homología

La propiedad más importante de los módulos de homología relativa $\{H_n(X, A; R) : n \geq 0\}$, es la existencia de un *homomorfismo de enlace*, $\delta_n \colon H_n(X, A; R) \longrightarrow H_{n-1}(A; R)$, por medio del cual va a obtenerse una sucesión infinita de homomorfismos

$$\ldots \to H_n(A; R) \overset{H_n(i_A)}{\to} H_n(X; R) \overset{H_n(1_X)}{\to} H_n(X, A; R) \overset{\delta_n}{\to} H_{n-1}(A; R) \to \ldots, \tag{6.1}$$

llamada *sucesión de homología del par* (X, A). Este homomorfismo de enlace se define del modo siguiente

$$\text{si } z \in Z_n(X, A; R), \quad \delta_n(z + B_n(X, A; R)) = \partial_n(z) + B_{n-1}(A; R).$$

Teorema 6.11 *La sucesión (6.1), de homología del par* (X, A) *es exacta.*

Observación 6.12 Esta precisamente la sucesión exacta larga de homología del teorema 3.72, asociada a la sucesión de complejos

$$\mathcal{O} \longrightarrow S_*(A; R) \overset{S_*(i_A)}{\longrightarrow} S_*(X; R) \overset{S_*(1_X)}{\longrightarrow} S_*(X, A; R) \longrightarrow \mathcal{O}.$$

Ejemplos 6.13 Algunos ejemplos que se obtienen estudiando la sucesión (6.1) son los siguientes

1. si X es conexo por caminos y $A = \{x_0\}$, para cada $n > 0$, la aplicación inducida sobre los grupos de homología, $H_n(1_X) \colon H_n(X, \emptyset; R) \longrightarrow H_n(X, A; R)$, es un isomorfismo,

2. para $n \geq 1$, $H_n(\mathbb{S}^{k-1}; R)$ y $H_{n+1}(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1}; R)$ son isomorfos,

3. para $n > 1$, $H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) = 0$,

4. $H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0; R) \simeq R$.

Proposición 6.14 *La sucesión de homología (6.1) es functorial en el par* (X, A).

6.3 Homotopías en pares

Definición 6.15 Dos aplicaciones $f, g \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ se llaman *homótopas en pares*, si $f, g \colon X \longrightarrow Y$ son homótopas como aplicaciones, pero a través de una homotopía

$$H \colon (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \longrightarrow (Y, B),$$

es decir, f se deforma de manera continua en g, y en cada paso de la trasformación, A se lleva en B.

Se puede transformar la prueba correspondiente al caso general, para ver que los homomorfismos inducidos, $H_n(f), H_n(g) \colon H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(Y, B; R)$ son iguales. Se define la *equivalencia de homotopía de pares* de manera evidente, y se prueba que, si $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una equivalencia de homotopía entre pares, entonces $H_n(f)\colon H_n(X,A;R) \longrightarrow H_n(Y,B;R)$ es un isomorfismo en homología relativa.

Ejemplo 6.16 Sean $X = Y = \mathbb{D}^2$, $A = \mathbb{S}^1 \subset B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. La aplicación $1_X\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una equivalencia de homotopía.

Proposición 6.17 *Una homotopía entre pares $f, g\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, induce en particular una homotopía $f, g\colon X \longrightarrow Y$ y una homotopía $f|_A, g|_A\colon A \longrightarrow B$.*

Ejemplos 6.18 Sin embargo, el recíproco no es cierto

1. si $A = \{0,1\} \subset X = [0,1]$ y $B = \{(1,0)\} \subset Y = \mathbb{S}^1$, las aplicaciones $f, g\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ dadas por $f(x) = e^{2\pi i x}$ y $g(x) = (1,0)$ no son homótopas en pares, pero son homótopas las aplicaciones $f, g\colon X \longrightarrow Y$ y sus restricciones $f|_A, g|_A\colon A \longrightarrow B$;
2. dados los pares de espacios (X,A) e (Y,B), donde $X = [0,1] = Y$, $A = [0,1] - \{\frac{1}{2}\}$ y $B = \{0,1\}$, es $X \simeq Y$, $A \simeq B$ y $(X,A) \not\simeq (Y,B)$.

Usando el lema de los cinco 3.71, se prueba

Proposición 6.19 *Si $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una equivalencia de homotopía, entonces las aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y $f|_A\colon A \longrightarrow B$ también son equivalencias de homotopía. Y en tal caso, $H_n(f)\colon H_n(X,A) \longrightarrow H_n(Y,B)$ es un isomorfismo para $n \geq 0$.*

Sin embargo, el recíproco no es cierto, como lo prueba el siguiente ejemplo

Ejemplo 6.20 Si $X = Y = \mathbb{D}^2$, $A = \mathbb{S}^1 \subset B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$, la aplicación $H_n(1_X)\colon H_n(X,A;R) \longrightarrow H_n(Y,B;R)$ es un isomorfismo en homología relativa, pero $1_X\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ no es una equivalencia entre pares.

De modo similar

Proposición 6.21 *Dada una terna de espacios (X,A,B) (es decir, $B \subset A \subset X$) y las aplicaciones inclusión $i_A\colon (A,B) \longrightarrow (X,B)$ y proyección $1_X\colon (X,B) \longrightarrow (X,A)$, se verifican las siguientes propiedades*

(i) se tiene una sucesión exacta larga

$$H_{n+1}(A,B;R) \stackrel{H_{n+1}(i_A)}{\longrightarrow} H_{n+1}(X,B;R) \stackrel{H_{n+1}(1_X)}{\longrightarrow} H_{n+1}(X,A;R) \stackrel{\Delta_{n+1}}{\longrightarrow} H_n(A,B;R),$$

llamada sucesión exacta larga de homología de la terna (X,A,B), donde el homomorfismo Δ_{n+1} es precisamente el compuesto de los dos homomorfismos

$$H_{n+1}(X,A;R) \stackrel{\delta_{n+1}}{\longrightarrow} H_n(A;R) \stackrel{H_n(1_A)}{\longrightarrow} H_n(A,B;R).$$

Además, si $B = \emptyset$, esta sucesión se reduce a la sucesión exacta larga de homología usual;

(ii) si la inclusión $i_B: B \longrightarrow A$, induce para cada $n \geq 0$ un isomorfismo entre los grupos de homología correspondientes, $H_n(i_B): H_n(B; R) \longrightarrow H_n(A; R)$, entonces para cada n se tiene un isomorfismo $H_n(1_X): H_n(X, B; R) \longrightarrow H_n(X, A; R)$.

Ejemplos 6.22 Algunos ejemplos de aplicación de las anteriores propiedades son

1. dada la terna $(\mathbf{N}, \mathbb{S}^{q-1}, \mathbb{D}^q)$, donde **N** es el polo norte, se cumple que $H_n(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; R)$ es isomorfo a $H_{n-1}(\mathbb{S}^{q-1}, \mathbf{N}; R)$;
2. si $\mathbb{H}^q_+ = \{(x_1, \dots, x_{q+1}) \in \mathbb{S}^q : x_{q+1} \geq 0\}$, se pueden calcular los grupos de homología $H_n(\mathbb{S}^q, \mathbb{S}^{q-1}; R)$, con ayuda de la sucesión exacta de homología de la terna $(\mathbb{S}^{q-1}, \mathbb{H}^q_+, \mathbb{S}^q)$.

6.4 Una interpretación de la homología relativa

La familia de módulos $\{H_n(X, A; R) : n \geq 0\}$ mide, en un cierto sentido, lo *lejos* que el homomorfismo $H_n(i_A): H_n(A; R) \longrightarrow H_n(X; R)$ está de ser un isomorfismo. De hecho

Lema 6.23 *El homomorfismo $H_n(i_A): H_n(A; R) \longrightarrow H_n(X; R)$ es un isomorfismo para cada $n \geq 0$ si y sólo si es $H_n(X, A; R) = 0$ para todo $n \geq 0$.*

Lema 6.24 *El homomorfismo $H_n(1_X): H_n(X; R) \longrightarrow H_n(X, A; R)$ es un isomorfismo para cada $n \geq 0$ si y sólo si es $H_n(A; R) = 0$ para todo $n \geq 0$.*

Corolario 6.25 *Si A es un retracto por deformación de X, entonces es $H_n(X, A; R) = 0$, para $n \geq 0$.*

La sucesión de Mayer-Vietoris

Cuenca, toda de plata,
quiere en ti verse desnuda,
y se estira, de puntillas,
sobre sus treinta columnas.

“Romance del Júcar”
Gerardo Diego (1896–1987)

7.1 Teorema de excisión

Sea $U \subset A \subset X$. Vamos a trabajar con símplices módulo A, es decir, en $H_*(X, A; R)$. El *teorema de excisión* da condiciones para que *partiendo en trozos suficientemente pequeños* estos símplices, podamos prescindir de la parte del símplice contenida en U, es decir, no va a ser significativo lo que suceda en este conjunto. Para ello, vamos a introducir el concepto de *símplice pequeño de un cierto orden*, que definiremos a través de cubrimientos por abiertos del espacio X, $\{U_i : i \in I\}$, exigiendo que las imágenes de los Δ_n estén contenidas en alguno de los U_i. Lo que pretendemos hacer, por lo tanto, es representar n-cadenas mediante símplices más pequeños en el sentido indicado anteriormente, sin cambiar las clases de homología durante el proceso.

Definición 7.1 La inclusión $j\colon (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ es una *excisión*, si induce un isomorfismo $H_n(j)\colon H_n(X - U, A - U; R) \longrightarrow H_n(X, A; R)$, para cada $n \geq 0$.

7.2 Caso simplicial

Definición 7.2 Sea $\sigma = (a_0 a_1 \dots a_n) \in S_n(\Delta_q; R)$. Dado $p \in \Delta_q$, el *cono* de σ sobre p es $p\sigma \in S_{n+1}(\Delta_q; R)$, definido por $p\sigma = (pa_0 a_1 \dots a_n)$. El operador cono sobre p se extiende de manera lineal sobre las n-cadenas simpliciales, con lo cual es un homomorfismo de módulos. Si $\sigma = 0$, se define $p\sigma = 0$.

Lema 7.3 *Si* $\sigma = (a_0 a_1 \dots a_n) \in S_n(\Delta_q; R)$*, entonces*

(i) si $n = 0$*,* $\partial_1(p\sigma) = \sigma - (p)$*,*

(ii) si $n > 0$*,* $\partial_{n+1}(p\sigma) = \sigma - p\partial_n(\sigma)$*.*

Estas propiedades se traspasan a cadenas por linealidad, de la manera obvia.

Definición 7.4 El operador *subdivisión baricéntrica,* $Sd_n\colon S_n(\Delta_q; R) \longrightarrow S_n(\Delta_q; R)$, se define entonces de manera inductiva

$$Sd_n(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } n = 0 \\ b_\sigma(Sd_{n-1}(\partial_n \sigma)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde b_σ es el baricéntro de σ. De este modo, el operador queda definido sobre una base de $S_n(\Delta_q; R)$, y se extiende por linealidad.

Lema 7.5 Sd_n *es una aplicación en cadenas, es decir,* $\partial_n \circ Sd_n = Sd_{n-1} \circ \partial_n$*.*

Se define por inducción un nuevo operador, $T_n\colon S_n(\Delta_q; R) \longrightarrow S_{n+1}(\Delta_q; R)$, por

$$T_n(\sigma) = b_\sigma(Sd_n(\sigma) - \sigma - T_{n-1}(\partial_n \sigma)),$$

para $n > 0$, y convenimos que $T_0 = 0$. Y entonces

Lema 7.6 T_n *es una homotopía en cadenas entre* Sd_n *y* $1_{S_n(\Delta_q;R)}$*, es decir,*

$$\partial_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n = Sd_n - 1_{S_n(\Delta_q;R)}.$$

Observación 7.7 Por el lema anterior, y usando el lema 5.1, Sd_n y $1_{S_n(\Delta_q;R)}$ inducen aplicaciones iguales en homología.

7.3 Caso general

Vamos a generalizar a cadenas singulares sobre X lo que acabamos de hacer para cadenas afines

Proposición 7.8 *Se definen para* $\sigma \in S_n(X; R)$*,*

$$Sd_n^X(\sigma) = S_n(\sigma)(Sd_n(1_{\Delta_n})) \quad y \quad T_n^X(\sigma) = S_{n+1}(\sigma)(T_n(1_{\Delta_n})),$$

y verifican

(i) son ambas naturales, es decir, si $f\colon X \longrightarrow Y$*, entonces* $S_n(f) \circ Sd_n^X = Sd_n^Y \circ S_n(f)$ *y* $S_{n+1}(f) \circ T_n^X = T_n^Y \circ S_n(f)$*;*

(ii) Sd_*^X *es una aplicación en cadenas;*

(iii) T_*^X *es una homotopía en cadenas entre* Sd_*^X *y* $1_{S_*(X;R)}$*;*

(iv) Sd_*^X *y* T_*^X *extienden sobre espacios abstractos las definiciones realizadas sobre espacios afines.*

Lema 7.9 *Si* $\sigma = (a_0a_1 \dots a_n)$ *es un símplice afin en* Δ_q*, entonces todo símplice afin que aparece en la expresión de* $Sd_n(\sigma)$ *tiene diámetro menor o igual a* $\frac{n}{n+1}$*diám*(σ)*.*

Corolario 7.10 *Todo símplice afin en* $Sd_n^k(e_0e_1 \dots e_n) \in S_n(\Delta_q)$ *tiene diámetro menor o igual a* $(\frac{n}{n+1})^k$*diám*(Δ_q)*, diámetro que converge a cero si* k *crece.*

Definición 7.11 Si $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es un cubrimiento por abiertos de X, se dice que un n-símplice singular σ es *pequeño de orden* $\mathcal{U}$, si $\sigma(\Delta_n)$ está contenido en alguno de los abiertos de $\mathcal{U}$. Denotamos por $S_*^{\mathcal{U}}(X;R)$ el subcomplejo de $S_*(X;R)$ formado por los símplices pequeños de orden $\mathcal{U}$.

La inclusión $i\colon S_*^{\mathcal{U}}(X;R) \longrightarrow S_*(X;R)$ es una equivalencia de complejos de cadenas e induce un isomorfismo $i_*\colon H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X;R)) \longrightarrow H_n(S_*(X;R))$.

Corolario 7.12 *Sea* $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ *un cubrimiento por abiertos de* X *y* σ *un* n*-símplice singular de* X*. Existe* $k \in \mathbb{N}$*, tal que cada símplice de* $(Sd_n^X)^k(\sigma)$ *es pequeño de orden* $\mathcal{U}$*.*

Teorema 7.13 *En las condiciones anteriores, toda clase de homología relativa en* $H_n(X,A;R)$ *puede representarse por un ciclo relativo, que es una combinación lineal de símplices pequeños de orden* $\mathcal{U}$*.*

Teorema 7.14 (Teorema de excisión) *Si* $\overline{U} \subset \mathring{A}$*, entonces* U *puede excindirse.*

Teorema 7.15 *Si* $V \subset U \subset A$*, y además*

(i) V *puede excindirse,*

(ii) $(X-U, A-U)$ *es un retracto por deformación de* $(X-V, A-V)$*,*

entonces U *puede excindirse.*

7.4 La sucesión de Mayer-Vietoris

Vamos a considerar ahora ternas ordenadas de espacios (X, X_1, X_2), donde X_1 y X_2 son subespacios de X y $X = X_1 \cup X_2$. Se consideran las aplicaciones de inclusión

$$k_1\colon (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X, X_2) \quad \text{y} \quad k_2\colon (X_2, X) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1),$$

obtenidas al excindir $X_2 - (X_1 \cap X_2)$ y $X_1 - (X_1 \cap X_2)$ de X, respectivamente.

Definición 7.16 Si k_1 y k_2 son excisiones, se dice que la terna (X, X_1, X_2) es *exacta*.

Ejemplos 7.17 Son ejemplos de ternas exactas

1. si X_1 y X_2 son abiertos y $X = X_1 \cup X_2$, entonces la terna (X, X_1, X_2) es exacta, siendo $A = X_1$ y $U = X_1 - (X_1 \cap X_2)$ los *ingredientes* de la excisión;
2. $(\mathbb{S}^n, \mathbb{E}_n^+, \mathbb{E}_n^-)$ es una terna exacta.

Comenzamos probando un lema puramente algebraico, el **lema de Barratt-Whitehead**

Lema 7.18 *Sea un diagrama de R-módulos y homomorfismos, en el que los cuadrados conmutan y las líneas son exactas*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & C_i \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\gamma_i"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \widehat{A_i} \arrow[r, "\widehat{f_i}"] & \widehat{B_i} \arrow[r, "\widehat{g_i}"] & \widehat{C_i} \arrow[r, "\widehat{h_i}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Si las aplicaciones γ_i son isomorfismos, entonces existe una sucesión exacta larga,

$$\dots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\Phi_i} \widehat{A_i} \oplus B_i \xrightarrow{\Psi_i} \widehat{B_i} \xrightarrow{\Gamma_i} A_{i-1} \longrightarrow \dots \quad ,$$

llamada sucesión de Barratt-Whitehead, *donde*

(i) $\Phi_i(a_i) = (\alpha_i \oplus f_i)(a_i, a_i)$,

(ii)$\Psi_i(\widehat{a}_i, b_i) = -\widehat{f}_i(\widehat{a}_i) + \beta_i(b_i)$,

(iii) $\Gamma_i(\widehat{b}_i) = h_i \circ \gamma_i^{-1} \circ \widehat{g}_i(\widehat{b}_i)$.

Observación 7.19 La functorialidad de una sucesión del tipo Barratt-Whitehead es una consecuencia inmediata de su definición.

Si (X, X_1, X_2) es una terna exacta, $X = X_1 \cup X_2$ y $A = X_1 \cap X_2$, la aplicación de inclusión $i_{X_1} \colon (X_1, A) \longrightarrow (X, X_2)$ induce el diagrama de cuadrados conmutativos (y con filas exactas)

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_n(A;R) \arrow[r, "H_n(i_A^{X_1})"] \arrow[d, "H_n(i_A^{X_2})"] & H_n(X_1;R) \arrow[r, "H_n(1_{X_1}^A)"] \arrow[d, "H_n(i_{X_1}^X)"] & H_n(X_1,A;R) \arrow[r, "\delta_n^{(X_1,A)}"] \arrow[d, "H_n(i_{X_1})"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_n(X_2) \arrow[r, "H_n(i_{X_2}^X)"] & H_n(X;R) \arrow[r, "H_n(1_X^{X_2})"] & H_n(X,X_2;R) \arrow[r, "\delta_n^{(X,X_2)}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Y esto da lugar a la **sucesión de Mayer-Vietoris**

Teorema 7.20 *En el diagrama anterior, $H_n(i_{X_1}) \colon H_n(X_1, A; R) \longrightarrow H_n(X, X_2; R)$ es un isomorfismo, para cada $n \geq 0$. La sucesión de Barrat-Whitehead asociada,*

$$\dots \to H_{n+1}(X;R) \overset{\Gamma_{n+1}}{\to} H_n(A;R) \overset{\Phi_n}{\to} H_n(X_1;R) \oplus H_n(X_2;R) \overset{\Psi_n}{\to} H_n(X;R) \to \dots ,$$

se llama sucesión de Mayer-Vietoris *de la terna (X, X_1, X_2), y es functorial.*

Observación 7.21 Podría haberse deducido esta propiedad directamente de la sucesión de *Mayer-Vietoris algebraica* (3.1) del teorema 3.76, tomando

$$\mathcal{C}_* = S_*(X;R), \quad \mathcal{C}'_* = S_*(X_1;R) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}''_* = S_*(X_2;R),$$

y utilizando la propiedad de excisión.

Ejemplos 7.22 Aplicando la sucesión de Mayer-Vietoris, se pueden calcular grupos de homología en muchos ejemplos

1. tomando $X_1 = \mathbb{S}^1 - \{\mathbf{N}\}$ y $X_2 = \mathbb{S}^1 - \{\mathbf{S}\}$, se deduce que $H_n(\mathbb{S}^1;R) = 0$, si $n > 1$;

2. para $q, n \geq 1$, se obtiene

$$H_n(\mathbb{S}^q;R) \simeq \begin{cases} R & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n \end{cases}$$

3. para la rosa de m pétalos G_m (la suma topológica de m copias de $\mathbb{S}^1$ identificadas a través de un punto),

$$H_n(G_m;R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ R \oplus \overset{(m)}{\cdots} \oplus R & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

4. para el toro

$$H_n(\mathbb{T}^2;R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0,2 \\ R \oplus R & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5. para $\mathbb{T}_g$, la superficie compacta de género g,

$$H_n(\mathbb{T}_g;R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0,2 \\ R^{2g} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De manera similar, puede obtenerse la **sucesión de Mayer-Vietoris relativa**

Teorema 7.23 *Si A y B son abiertos en X, se tiene la sucesión exacta larga*

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(X, A \cup B;R) \longrightarrow H_{n+1}(X, A \cap B;R) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_n(X,A;R) \oplus H_n(X,B;R) \longrightarrow H_n(X, A \cup B;R) \longrightarrow \ldots$$

Axiomas de la Homología

La vida que murmura. La vida abierta.
La vida sonriente y siempre inquieta.
La vida que huye volviendo la cabeza,
tentadora o quizá, sólo niña traviesa.

"Biografía"
Gabriel Celaya (1911–1991)

Sea R un anillo conmutativo con unidad. Para cada par de espacios (X, A) y cada $n \in \mathbb{Z}$, sea un R-módulo $H_n(X, A; R)$ y un R-homomorfismo

$$\delta_n^{(X,A)} \colon H_n(X, A; R) \longrightarrow H_{n-1}(A, \emptyset; R).$$

Para cada aplicación entre pares $f \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ y cada $n \in \mathbb{Z}$, sea un R-homomorfismo de módulos $H_n(f) \colon H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(Y, B; R)$.

Se definen los *axiomas de Eilenberg-Steenrod* como

Axioma 1 (de identidad) para cada par (X, A) y $n \in \mathbb{Z}$ es $H_n(id_{(X,A)}) = id_{H_n(X,A;R)}$;

Axioma 2 (de composición) si $f \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ y $g \colon (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ son aplicaciones, para cada $n \in \mathbb{Z}$ es $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) \colon H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(Z, C; R)$;

Axioma 3 (de conmutatividad) Si $f \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ y $f|_A \colon A \longrightarrow B$ es la restricción, hay dos maneras de llevar $H_n(X, A; R)$ en $H_{n-1}(B, \emptyset; R)$, que se muestran en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X, A; R) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y, B; R) \\
\Big\downarrow \delta_n^{(X,A)} & & \Big\downarrow \delta_n^{(Y,B)} \\
H_{n-1}(A, \emptyset; R) & \xrightarrow{H_{n-1}(f|_A)} & H_{n-1}(B, \emptyset; R)
\end{array}$$

El axioma exige que estas dos composiciones $\delta_n^{(Y,B)} \circ H_n(f)$ y $H_{n-1}(f|_A) \circ \delta_n^{(X,A)}$ sean iguales para cada elemento de $H_n(X, A; R)$;

Axioma 4 (de exactitud) Si (X, A) es un par de espacios, $i \colon A \longrightarrow X$ y $j \colon (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ son las aplicaciones de inclusión, entonces la siguiente sucesión de grupos y homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}^{(X,A)}} H_n(A, \emptyset; R) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, \emptyset; R) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\delta_n^{(X,A)}} H_{n-1}(A, \emptyset; R) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \dots,$$

es exacta y se llama *sucesión de homología del par* (X, A);

Axioma 5 (de homotopía) Dadas dos aplicaciones homótopas $f_0, f_1 \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, entonces para cada entero n, los homomorfismo inducidos

$$H_n(f_0), H_n(f_1) \colon H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(Y, B; R)$$

coinciden;

Axioma 6 (de excisión) Si U es un abierto en X cuya clausura está contenida en el interior de A, y $k \colon (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ es la inclusión, entonces para cada entero n, la aplicación inducida $H_n(k) \colon H_n(X - U, A - U; R) \longrightarrow H_n(X, A; R)$ es un isomorfismo. En este caso, k se llama una *excisión*;

Axioma 7 (de dimensión) Si P es el espacio topológico formado por un único punto, entonces $H_n(P; R) = 0$ para $n \neq 0$.

Estos siete axiomas definen lo que se denomina una **Teoría de Homología con coeficientes en el anillo** R.

Observación 8.1 La Homología Singular verifica los axiomas de Eilenberg-Steenrod.

Algunas aplicaciones de la Homología

Caminito que anduvo
de sur a norte
mi raza vieja
antes que en la montaña
la Pachamama
se ensombreciera.

“Caminito del indio”
Atahualpa Yupanqui (1908–1992)

9.1 Homología de las esferas

Teorema 9.1 *Sean $\mathbb{E}_q^+$ y $\mathbb{E}_q^-$ las semiesferas cerradas de la esfera $\mathbb{S}^q$, donde $q \geq 1$. Es decir, $\mathbb{E}_q^+ \cap \mathbb{E}_q^- = \mathbb{S}^{q-1}$ es el ecuador de $\mathbb{S}^q$. Entonces, $j\colon (\mathbb{E}_q^+, \mathbb{S}^{q-1}) \longrightarrow (\mathbb{S}^q, \mathbb{E}_q^-)$ es una excisión.*

Si proyectamos a lo largo de las q primeras coordenadas, se obtiene un homeomorfismo, $\pi\colon (\mathbb{E}_q^+, \mathbb{S}^{q-1}) \longrightarrow (\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1})$. Además,

$$\delta_n\colon H_n(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; R) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^{q-1}; R)$$

es también un isomorfismo, según se ha visto en los ejemplos 6.13 para $q > 1$. Por otro lado, $\mathbb{E}_q^-$ tiene el mismo tipo de homotopía que un punto $p_0 \in \mathbb{S}^q$, luego la invarianza por homotopía de la homología relativa, dice que

$$H_n(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}; R) \simeq H_n(\mathbb{S}^q, p_0; R) \simeq H_n(\mathbb{S}^q; R), \quad q > 0.$$

Luego, hemos probado que para $n \geq 2$ y $q \geq 1$, es $H_n(\mathbb{S}^q; R) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^{q-1}; R)$. Y para $q \geq 1$, $H_1(\mathbb{S}^q; R) \simeq H_1(\mathbb{S}^q, \mathbb{E}_q^-; R)$.

Teniendo en cuenta todo esto, se puede calcular la homología total de cualquier esfera

Corolario 9.2 *Para $q \geq n \geq 1$, se obtiene*

$$H_n(\mathbb{S}^q; R) \simeq \begin{cases} R & \textit{si } q = n \\ 0 & \textit{si } q \neq n \end{cases}$$

Del cálculo de la homología sobre esferas, se deducen las propiedades

Corolario 9.3 *Para $n \geq 1$, $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $\mathbb{D}^n$.*

Y se obtiene el **teorema del punto fijo de Brouwer**

Corolario 9.4 *Toda aplicación $f\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$ posee un punto fijo.*

Corolario 9.5 *Si $m \neq n$, las esferas $\mathbb{S}^m$ y $\mathbb{S}^n$ no son homeomorfas. De hecho, ni siquiera tienen el mismo tipo de homotopía.*

Corolario 9.6 *Si $m \neq n$, $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos.*

Corolario 9.7 *Si $n \geq 0$, $\mathbb{S}^n$ no es contráctil.*

9.2 Grado de una aplicación entre esferas

En este apartado, el anillo $R = \mathbb{Z}$.

Sea $n \geq 1$ y $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ una aplicación. Si α es un generador de $H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, entonces $H_n(f)\colon H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$ es tal que $H_n(f)(\alpha) = m\alpha$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Además, el entero m es independiente del generador elegido.

Definición 9.8 Este entero se llama *grado de Brouwer de* f y se denota por $d(f)$.

Observación 9.9 Para $n = 1$, $d(f) = ind([f])$.

Lema 9.10 *Se verifican las siguientes propiedades*

(i) $d(1_{\mathbb{S}^n}) = 1$*;*

(ii) si $f, g\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$, $d(f \circ g) = d(f).d(g)$*;*

(iii) $d(cte) = 0$*;*

(iv) si $f \simeq g$*, entonces* $d(f) = d(g)$*;*

(v) si f *es una equivalencia de homotopía, entonces* $d(f) = \pm 1$.

Existe un recíproco de (iv), debido a Hopf, y puede además probarse que existen aplicaciones de cualquier grado (ver [Z], pág. 186). Con esto, quedaría demostrado que el grado es un invariante algebraico completo para estudiar las clases de homotopía de aplicaciones de $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{S}^n$, es decir, existe una biyección $\chi\colon [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $\chi([f]) = d(f)$.

Ejemplo 9.11 Dada $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$, se define la aplicación $\Sigma f\colon \mathbb{S}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$, llamada *suspensión* de f, por la fórmula

$$\Sigma f(x_1, \ldots, x_{n+2}) = \begin{cases} (0, \ldots, 0, x_{n+2}) & \text{si } |x_{n+2}| = 1 \\ (tf(\frac{x_1}{t}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{t}, x_{n+2}) & \text{si } |x_{n+2}| < 1 \end{cases}$$

donde $t = \sqrt{1 - x_{n+2}^2}$. Σf lleva el polo norte de $\mathbb{S}^{n+1}$ en el polo norte, el polo sur de $\mathbb{S}^{n+1}$ en el polo sur, y el ecuador en el ecuador, de acuerdo con f. El meridiano de $\mathbb{S}^{n+1}$ a través del punto x en el ecuador se lleva homeomórficamente sobre el meridiano a través del punto $f(x)$. El grado de Σf es el mismo que el de f. Para una prueba de este resultado, ver [Mas1], pág. 41.

Se puede probar

Proposición 9.12 *Si $n \geq 1$ y $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es la función*

$$f(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}),$$

(es decir, una reflexión), entonces $d(f) = -1$.

Corolario 9.13 *Si $n \geq 1$ y $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es la aplicación*

(i) $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots - x_i, \ldots, x_{n+1})$, entonces $d(f) = -1$;

(ii) antipodal $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots - x_i, \ldots, -x_{n+1})$, entonces $d(f) = (-1)^{n+1}$.

Proposición 9.14 *Si $n \geq 1$ y $f, g\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ son tales que $f(x) \neq g(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^n$, entonces es $g \simeq a \circ f$ y $H_n(f) = (-1)^{n+1} H_n(g)$.*

Corolario 9.15 *Sea $n \geq 1$ y $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$. Si*

(i) f no tiene puntos fijos, entonces $f \simeq a$;

(ii) $f \simeq cte$, entonces f tiene un punto fijo.

Corolario 9.16 *Si $f\colon \mathbb{S}^{2n} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n}$,*

(i) existe $x \in \mathbb{S}^{2n}$, tal que $f(x) = x$ o existe $y \in \mathbb{S}^{2n}$ tal que $f(y) = -y$;

(ii) existe $x \in \mathbb{S}^{2n}$, tal que x no es ortogonal a $f(x)$.

Y puede darse una prueba topológica del **teorema fundamental del álgebra**

Corolario 9.17 *Un polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, de grado $n \geq 1$ y de coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tiene una raíz en el plano complejo.*

Una aplicación $f\colon \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ puede verse como una familia de vectores, con $f(x)$ *pegado* a $\mathbb{S}^m$ por x, es decir, $\mathbb{S}^m$ es una *bola peluda*. Un pelo está *peinado*, cuando es tangente a la esfera. El siguiente teorema dice que no es posible *peinar* una bola peluda de dimensión par: es el **teorema de la bola peluda**

Corolario 9.18 *No existe un campo de vectores tangentes no nulo sobre $\mathbb{S}^{2n}$.*

Observación 9.19 Sin embargo, esto siempre es posible en grados impares: en $\mathbb{S}^{2n+1}$

$$X(x_1, \ldots x_{2n+2}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

es un campo de vectores tangentes, que verifica la propiedad deseada.

9.3 Teoremas de Jordan-Brouwer

Definición 9.20 Un *conjunto dirigido* Δ es un conjunto con un orden parcial $\leq$, tal que para cada $a, b \in \Delta$, existe $c \in \Delta$, tal que $c \geq a$ y $c \geq b$. Un *sistema dirigido de conjuntos*, $\{X_a, f_a^b\}_{a,b\in\Delta}$, es una familia $\{X_a : \alpha \in \Delta\}$, donde Δ es un conjunto dirigido y una familia de funciones $\{f_a^b \colon X_a \longrightarrow X_b : a \leq b\}$, satisfaciendo

(i) $f_a^a = 1_{X_a}$, para cada $a \in \Delta$;

(ii) si $a \leq b \leq c$, $f_a^c = f_b^c \circ f_a^b$.

Vamos a aplicarlo al caso en que los conjuntos son R-módulos y las aplicaciones son R-homomorfismos

Definición 9.21 Sea $\{M_a, f_a^b\}$ un sistema dirigido de R-módulos y R-homomorfismos. Se define un R-submódulo M de $\bigcup\limits_{a\in\Delta} M_a$, por

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_{a_i} : \text{ existe } c \in \Delta, c \geq a_i \text{ y } \sum_{i=1}^{n} f_{a_i}^c(x_{a_i}) = 0 \right\}.$$

El *límite directo* del sistema dado, es el R-módulo cociente $\varinjlim M_a = \bigcup\limits_{a\in\Delta} M_a / M$.

Observación 9.22 En el caso particular en que para $a \leq b$, M_a es un R-submódulo de M_b y $f_a^b \colon M_a \longrightarrow M_b$ es la aplicación inclusión, entonces $\varinjlim M_a = \bigcup\limits_{a\in\Delta} M_a$. Observar que, en este caso, dos puntos $x_a \in M_a$ y $x_b \in M_b$ son iguales en $\varinjlim M_a$, si existe $c \in \Delta$, tal que $c \geq a$, $c \geq b$ y $f_a^c(x_a) = f_b^c(x_b)$.

Lema 9.23 *Sea X un espacio y $\{X_a : a \in \Delta\}$ la familia de sus subespacios compactos, parcialmente ordenada por la inclusión. La familia de R-módulos de homología*

$$\{H_n(X_a; R) : a \in \Delta\}$$

forma un sistema dirigido, donde los homomorfismos están inducidos por las aplicaciones inclusión. Además, para cada $n \geq 0$, es $H_n(X; R) \simeq \varinjlim H_n(X_a; R)$.

Lema 9.24 *Si $A \subset \mathbb{S}^q$ es homeomorfo a $[0,1]^k$, para $0 \leq k \leq q$, entonces*

$$H_n(\mathbb{S}^q - A; R) \simeq \begin{cases} R & \textit{si } n = 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Corolario 9.25 *Si $B \subset \mathbb{S}^q$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^k$, para $0 \leq k \leq q-1$, entonces el R-módulo*

$$H_*(\mathbb{S}^q - B; R) = \bigoplus_{n\geq 0} H_n(\mathbb{S}^q - B; R),$$

es abeliano libre con dos generadores, uno en dimensión 0 y otro en dimensión $q-k-1$. En particular, si $q \neq k+1$, $\mathbb{S}^q - B$ es conexo por caminos.

Se deduce el **teorema de separación de Jordan-Brouwer**

Teorema 9.26 *Una $(n-1)$-esfera embebida en $\mathbb{S}^n$, separa $\mathbb{S}^n$ en dos componentes acíclicas, siendo además la $(n-1)$-esfera, la frontera común de esas dos componentes.*

Corolario 9.27 *Sea $n \geq 2$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces $\mathbb{R}^n - A$ tiene dos componentes conexas, con A como frontera común.*

Corolario 9.28 *Sea $n \geq 2$ y $f\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación uno a uno. Entonces, f es un homeomorfismo de $\mathbb{D}^n$ sobre $f(\mathbb{D}^n)$. Si $A = f(\mathbb{S}^{n-1})$, f lleva el interior de $\mathbb{D}^n$ en la parte interna encerrada por A.*

Se obtiene el **teorema de Jordan-Brouwer sobre invarianza de dominio**

Teorema 9.29 *Sean U_1 y U_2 subconjuntos de $\mathbb{S}^n$ y $h\colon U_1 \longrightarrow U_2$ un homeomorfismo. Si U_1 es un conjunto abierto en $\mathbb{S}^n$, entonces U_2 también lo es.*

Corolario 9.30 *Sea $n \geq 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación uno a uno. Entonces, $f(U)$ es un abierto conexo y f es un homeomorfismo sobre $f(U)$.*

9.4 Homología en algunos cocientes

Comenzamos recordando algunas propiedades de espacios de adjunción

Lema 9.31 *Sean X e Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f\colon A \longrightarrow Y$. Se denota por $X \cup_f Y$ al cociente de $X \sqcup Y$ por la relación de equivalencia que identifica $x \in A$ con $f(x) \in Y$. Entonces*

(i) Y se puede pensar como un subespacio de $X \cup_f Y$, con lo que hay una copia homeomorfa de Y en $X \cup_f Y$;

(ii) si X e Y son espacios compactos y Hausdorff, A es cerrado en X y $f\colon A \longrightarrow Y$ es continua, entonces $X \cup_f Y$ es compacto y Hausdorff;

(iii) si A es cerrado y se adjunta a $Y = \{y_0\}$, por $f(A) = y_0$, entonces el espacio de adjunción asociado es homeomorfo al cociente X/A;

(iv) el cono de X, se obtiene adjuntando $X \times [0,1]$ a $\{y_0\}$, por $f(X \times \{1\}) = y_0$. Y la suspensión de X, se obtiene adjuntando $X \times [-1,1]$ a $Y = \{a,b\}$, por $g(X \times \{1\}) = a$ y $g(X \times \{-1\}) = b$;

(v) si (X,x) e (Y,y) son espacios con puntos base, se define su wedge, *$X \vee Y$, como el cociente de su suma disjunta $X \sqcup Y$, tras identificar los puntos base; se trata de un espacio de adjunción;*

(vi) sean X, Y y W espacios compactos Hausdorff y A un subconjunto cerrado de X. Sea $f\colon A \longrightarrow Y$ continua y $g\colon X \sqcup Y \longrightarrow W$ continua y sobreyectiva. Si para cada $w \in W$,

$g^{-1}(w)$ es o bien un punto de $X - A$ o bien la unión de un punto $y \in Y$ con $f^{-1}(y) \subset A$, entonces W es homeomorfo a $X \cup_f Y$.

Definición 9.32 Una *n-celda* es un espacio homeomorfo al disco $\mathbb{D}^n$. Consideremos $X = \mathbb{D}^n$, $A = fr(\mathbb{D}^n) = \mathbb{S}^{n-1}$, Y un espacio topológico y $f\colon A \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Se dice que $Y_f = \mathbb{D}^n \cup_f Y$ es el *espacio obtenido al adjuntar una n-celda a Y por f.*

Ejemplo 9.33 Sea $X = \mathbb{D}^2$ y $A = fr(\mathbb{D}^2) = \mathbb{S}^1$. Sea Y una copia disjunta de $\mathbb{S}^1$ y la aplicación $f\colon A \longrightarrow Y$, dada por $f(z) = z^2$. Entonces, $X \cup_f Y$ es el espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^2$. Se puede calcular su homología usando esta caracterización y la sucesión de Mayer-Vietoris, y se obtiene

$$H_q(\mathbb{RP}^2; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ R/2R & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Proposición 9.34 *Sean $n \geq 1$ e Y_f el espacio obtenido a partir del espacio compacto y Hausdorff Y, adjuntándole una n-celda vía f. Existe una sucesión exacta*

$$\ldots \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^{n-1}; R) \xrightarrow{H_q(f)} H_q(Y; R) \xrightarrow{H_q(i_Y)} H_q(Y_f; R) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H_0(\mathbb{S}^{n-1}; R) \xrightarrow{H_0(f)} H_0(Y; R) \oplus R \xrightarrow{H_0(i_Y)} H_0(Y_f; R),$$

donde $i_Y\colon Y \longrightarrow Y_f$ es la aplicación inclusión.

Esta sucesión exacta muestra lo *cerca* que están los grupos de homología de Y e Y_f. Si se pega una n-celda a Y, entonces $H_n(i_Y)\colon H_n(Y; R) \longrightarrow H_n(Y_f; R)$ es un monomorfismo, con conúcleo 0 o R-libre. En este sentido, si $coker(H_n(i_Y)) \neq 0$, se ha creado un nuevo *agujero n-dimensional*. Por otro lado, $H_{n-1}(i_Y)\colon H_{n-1}(Y; R) \longrightarrow H_{n-1}(Y_f; R)$ es un epimorfismo, de núcleo 0 o cíclico, y si $ker(H_n(i_Y)) \neq 0$, esta nueva n-celda *ha tapado* un agujero $(n-1)$-dimensional en Y. Aparte de estas dimensiones, la adjunción de n-celdas no afecta a la homología.

Aplicando la proposición 9.34, podemos calcular la homología de algunos espacios.

9.4.1 El espacio proyectivo real

Proposición 9.35 *Se verifica*

(i) el espacio proyectivo real de dimensión n $\mathbb{RP}^n$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^{n-1}$ una n-celda a través de la aplicación canónica $p_{n-1}\colon \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$;

(ii) la anterior descripción permite comprobar que

$$H_q(\mathbb{RP}^n; R) = \begin{cases} R & \textit{si } q = 0 \\ R/2R & \textit{si } q \textit{ impar y } 1 \leq q \leq n \\ Tor_2(R) & \textit{si } q \textit{ par y } 2 \leq q \leq n \\ \{0\} & q > n \end{cases}$$

donde $Tor_2(R) = \{r \in R : 2r = 0\}$.

9.4.2 El espacio proyectivo complejo

Se define el *espacio proyectivo complejo de dimensión* n, $\mathbb{CP}^n$ del modo siguiente: en el espacio complejo de dimensión $n+1$, $\mathbb{C}^{n+1}$, se considera el subespacio

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \ldots + \|z_{n+1}\|^2 = 1\}.$$

Se define sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ la siguiente relación de equivalencia

$$z \sim z' \text{ si y sólo si existen } c \in \mathbb{C} : \|c\| = 1 \text{ y } z' = cz.$$

El cociente bajo esta relación de equivalencia es $\mathbb{CP}^n$. Sea $q_n \colon \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ la aplicación cociente. Intuitivamente hablando, $\mathbb{S}^{2n+1}$ es un producto torcido de $\mathbb{CP}^n$ y $\mathbb{S}^1$: se dice que $\mathbb{S}^{2n+1}$ es un fibrado sobre $\mathbb{CP}^n$, de fibra $\mathbb{S}^1$. Por ejemplo, $\mathbb{CP}^0$ es un punto y $\mathbb{CP}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$. La aplicación cociente $q_1 \colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ se llama *aplicación de Hopf*.

Proposición 9.36 *Se verifica*

(i) el espacio proyectivo complejo de dimensión n, $\mathbb{CP}^n$ *se obtiene al adjuntar al espacio* $\mathbb{CP}^{n-1}$ *una* $2n$*-celda a través de la aplicación canónica* $q_{n-1} \colon \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$*;*

(ii) la anterior descripción permite calcular

$$H_q(\mathbb{CP}^n; R) = \begin{cases} R & \textit{si } q = 0, 2, 4, \ldots, 2n \\ \{0\} & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

9.4.3 La botella de Klein

Proposición 9.37 *Se verifica*

(i) la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ *se obtiene adjuntando una 2-celda a* $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$*;*

(ii) la anterior descripción permite comprobar que

$$H_q(\mathbb{K}^2; R) = \begin{cases} R & \textit{si } q = 0 \\ R \oplus R/2R & \textit{si } q = 1 \\ Tor_2(R) & \textit{si } q = 2 \\ \{0\} & \textit{si } q > 2 \end{cases}$$

9.4.4 El toro generalizado

El toro generalizado es un producto de esferas $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$. Aunque calcularemos más tarde su homología utilizando la fórmula de Künneth (ver el teorema 10.11), se puede usar también un argumento de tipo Mayer-Vietoris y la proposición 9.34 para conocer sus módulos de homología singular

Proposición 9.38 *Se verifica*

(i) denotamos por $\mathbb{I}$ *al intervalo unidad de* $\mathbb{R}$*. El* n*-cubo* $\mathbb{I}^n \subset \mathbb{R}^n$ *tiene como frontera*

$$fr(\mathbb{I}^n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{ existe } i \text{ tal que } x_i = 0 \text{ ó } 1\}.$$

Así, $\mathbb{I}^m \times \mathbb{I}^n = \mathbb{I}^{m+n}$ *y* $fr(\mathbb{I}^{m+n}) = (fr(\mathbb{I}^m) \times \mathbb{I}^n) \cup (\mathbb{I}^m \times fr(\mathbb{I}^n))$*. Sean* $z_m \in \mathbb{S}^m$ *y* $z_n \in \mathbb{S}^n$ *puntos base. Existe una aplicación entre pares* $f_k \colon (\mathbb{I}^k, fr(\mathbb{I}^k)) \longrightarrow (\mathbb{S}^k, z_k)$*, para* $k \in \{m, n\}$*, que es un* homeomorfismo relativo*, es decir, tal que la restricción* $f_k|_{\mathbb{I}^k - fr(\mathbb{I}^k)} \colon \mathbb{I}^k - fr(\mathbb{I}^k) \longrightarrow \mathbb{S}^k - z_k$ *es un homeomorfismo. Tomando productos cartesianos, se obtiene una aplicación* $f_m \times f_n \colon \mathbb{I}^m \times \mathbb{I}^n \longrightarrow \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$*, que lleva* $fr(\mathbb{I}^{m+n})$ *sobre* $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$*. Se concluye que* $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ *es homeomorfo al espacio obtenido adjuntando una* $(m+n)$*-celda a* $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$ *vía la aplicación* $fr(\mathbb{I}^{m+n}) \simeq \mathbb{S}^{m+n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$*;*

(ii) utilizando la sucesión de Mayer-Vietoris y (i) se pueden calcular los módulos de homología de $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$*: se comprueba que* $H_*(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n; R)$*,* $m, n \geq 0$*, es un* R*-módulo libre con cuatro generadores, en las dimensiones 0,* m*,* n *y* $m+n$*.*

Homología en productos

Acércate.
Junto a la noche te espero.

“Ofrecimiento”
Carmen Conde Abellán (1907–1996)

Los productos de espacios no se comportan bien para las propiedades de homología. Por ejemplo, ya sabemos que $H_2(\mathbb{T}^2; R) \simeq R$, pero $H_2(\mathbb{S}^1; R) \times H_2(\mathbb{S}^1; R) \simeq 0$.

Vamos a dividir el análisis de este *mal comportamiento* en dos partes

(i) el primer paso es topológico, relacionando $S_*(X \times Y; R)$ con $S_*(X; R) \otimes_R S_*(Y; R)$;

(ii) el segundo paso es algebraico, relacionando las homologías de los complejos de cadenas $H_*(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}')$ y $H_*(\mathcal{C}) \otimes_R H_*(\mathcal{C}')$.

10.1 Estudio Topológico

Si $\omega \colon \Delta_n \longrightarrow X \times Y$ es un n-símplice singular, ω puede expresarse de manera única como $\omega = (\sigma, \tau)$, donde $\sigma = p_X \circ \omega$ y $\tau = p_Y \circ \omega$ son n-símplices sobre X e Y respectivamente. Para $0 \leq p \leq n$, vamos a denotar

(i) $\lambda_p \colon \Delta_p \longrightarrow \Delta_n$ a la inclusión natural, la aplicación afin $\lambda_p = (e_0 e_1 \dots e_p)$, es decir, la aplicación *cara* p *frontal*;

(ii) $\rho_{n-p} \colon \Delta_{n-p} \longrightarrow \Delta_n$ a la aplicación afin $\rho_{n-p} = (e_p e_{p+1} \dots e_n)$, es decir, la aplicación *cara* $n-p$ *dorsal*.

Se asocia entonces a cada par $\omega = (\sigma, \tau)$ el elemento

$$(\sigma \circ \lambda_p) \otimes_R (\tau \circ \rho_{n-p}) \in S_p(X; R) \otimes_R S_{n-p}(Y; R),$$

es decir, la p-cara frontal de σ tensorizada por la $(n-p)$-cara dorsal de τ.

Si se extiende por linealidad, se obtiene un homomorfismo

$$A_{n,p} \colon S_n(X \times Y; R) \longrightarrow S_p(X; R) \otimes_R S_{n-p}(Y; R), \qquad \text{para} \qquad p \in \{0, \dots, n\}.$$

Vamos a sumar todos los homomorfismos así obtenidos. Para ello, denotamos

$$(S(X;R) \otimes_R S(Y;R))_n = \bigoplus_{p=0}^{n} (S_p(X;R) \otimes_R S_{n-p}(Y;R)) .$$

Definición 10.1 El *homomorfismo de Alexander-Whitney*,

$$A_n\colon S_n(X \times Y;R) \longrightarrow (S(X;R) \otimes_R S(Y;R))_n,$$

es la aplicación que asocia a cada n-símplice singular $\omega = (\sigma, \tau)$ el elemento,

$$A_n(\sigma,\tau) = \sum_{p=0}^{n} A_{n,p}(\sigma,\tau) = \sum_{p=0}^{n} ((\sigma \circ \lambda_p) \otimes_R (\tau \circ \rho_{n-p})) .$$

Lema 10.2 *El homomorfismo de Alexander-Whitney es functorial en* (X, Y).

10.2 Estudio homológico

Vamos a definir a partir de la sucesión de módulos $\{(S(X;R) \otimes_R S(Y;R))_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un complejo de cadenas, introduciendo un operador borde. En general, si $(\mathcal{C}_*, d)$ y $(\mathcal{C}'_*, d')$ son complejos de cadenas y se denota

$$(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}')_n = \bigoplus_{p=0}^{n} \left(C_p \otimes_R C'_{n-p}\right),$$

se puede definir un operador frontera

$$d_n^{\otimes}\colon (\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}')_n \longrightarrow (\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}')_{n-1},$$

por

$$d_n^{\otimes}(z \otimes_R z') = (d_p(z) \otimes_R z') + (-1)^p z \otimes_R d'_{n-p}(z'),$$

donde $z \otimes_R z' \in C_p \otimes_R C'_{n-p}$, y que se extiende por linealidad. Claramente, se verifica que $d_{n-1}^{\otimes} \circ d_n^{\otimes} = 0$.

En nuestro caso, trabajamos con $\mathcal{C}_* = S_*(X;R)$ y $\mathcal{C}'_* = S_*(Y;R)$, y se obtiene

Lema 10.3 *El homomorfismo de Alexander-Whitney es un homomorfismo de cadenas, es decir, para el diagrama siguiente*

$$\begin{array}{ccccc}
S_{n+1}(X \times Y;R) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n(X \times Y;R) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X \times Y;R) \\
\downarrow A_{n+1} & & \downarrow A_n & & \downarrow A_{n-1} \\
(S(X;R) \otimes_R S(Y;R))_{n+1} & \xrightarrow{\partial^{\otimes}_{n+1}} & (S(X;R) \otimes_R S(Y;R))_n & \xrightarrow{\partial^{\otimes}_n} & (S(X;R) \otimes_R S(Y;R))_{n-1}
\end{array}$$

se verifica que $A_{n-1} \circ \partial_n^{\otimes} = \partial_n^{\otimes} \circ A_n$*, para cada entero* n.

Se pueden formar los módulos de homología $H_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}')$ del modo habitual, considerando

$$Z_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}') = Ker(d_n^{\otimes}) \quad \text{y} \quad B_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}') = Im(d_{n+1}^{\otimes}),$$

y entonces

$$H_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}') = Z_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}')/B_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}').$$

El lema 10.3 garantiza entonces que, tomando $\mathcal{C}_* = S_*(X;R)$ y $\mathcal{C}'_* = S_*(Y;R)$, A induce un homomorfismo para cada $n \geq 0$,

$$H_n(A_n) \colon H_n(X \times Y; R) \longrightarrow H_n(S(X;R) \otimes_R S(Y;R)).$$

La prueba del siguiente **teorema de Eilenberg-Zilber** se basa en el **método de los modelos acíclicos**, que es un método general para construir morfismos de complejos de cadenas y homotopías entre morfismos

Teorema 10.4 *Para cada $n \geq 0$, $H_n(A_n)$ es un isomorfismo. De hecho, A es una equivalencia en cadenas entre los complejos $S_*(X \times Y; R)$ y $S_*(X;R) \otimes_R S_*(Y;R)$.*

Veamos ahora cual es la relación entre la homología del complejo $S(X;R) \otimes_R S(Y;R)$ y el producto tensorial de las homologías de los espacios X e Y.

Si $z \in Z_p(X;R)$ y $z' \in Z_{n-p}(Y;R)$, entonces $z \otimes_R z'$ es un ciclo en $(S(X;R) \otimes_R S(Y;R))_n$, y se puede entonces definir una correspondencia bilineal

$$H_p(X;R) \times H_{n-p}(Y;R) \longrightarrow H_n(S(X;R) \otimes_R S(Y;R))$$

que asocia al par $(z + B_p(X;R), z' + B_{n-p}(Y;R)) \in H_p(X;R) \times H_{n-p}(Y;R)$ el elemento $\overline{z \otimes_R z'} \in H_n(S(X;R) \otimes_R S(Y;R))$. Así, tenemos un homomorfismo único

$$H_p(X;R) \otimes_R H_{n-p}(Y;R) \longrightarrow H_n(S(X;R) \otimes_R S(Y;R))$$

que envía $(z + B_p(X;R)) \otimes_R (z' + B_{n-p}(Y;R))$ en $\overline{z \otimes_R z'}$. Del mismo modo que antes, si denotamos

$$(H(X;R) \otimes_R H(Y;R))_n = \bigoplus_{p=0}^{n} \left(H_p(X;R) \otimes_R H_{n-p}(Y;R)\right),$$

se tiene un homomorfismo

$$i_n \colon (H(X;R) \otimes_R H(Y;R))_n \longrightarrow H_n(S(X;R) \otimes_R S(Y;R)),$$

dado por $i_n\left(\sum_{p=0}^{n}(z + B_p(X;R)) \otimes_R (z' + B_{n-p}(Y;R))\right) = \sum_{p=0}^{n}\overline{z \otimes_R z'}$. Claramente, i_n es functorial en el par (X,Y).

Vamos a adoptar la siguiente notación

$$(H(X;R)\otimes_R H(Y;R))_n \xrightarrow{i_n} H_n(S(X;R)\otimes_R S(Y;R)) \xrightarrow{\overline{B_n}} H_n(X\times Y;R),$$

donde si $(z+B_p(X;R))\otimes_R (z'+B_{n-p}(Y;R)) \in H_p(X;R)\otimes_R H_{n-p}(Y;R)$, se denota

$$\overline{B_n}\circ i_n((z+B_p(X;R))\otimes_R (z'+B_{n-p}(Y;R))) = z\times z'.$$

Para facilitar los cálculos, vamos a tratar un caso más general, reemplazando $S(X;R)$ y $S(Y;R)$ por complejos de cadenas arbitrarios $(\mathcal{C}_*, d)$ y $(\mathcal{C}'_*, d')$, y consideramos

$$(\mathcal{C}\otimes_R \mathcal{C}')_n = \bigoplus_{p+q=n}\left(C_p\otimes_R C'_q\right).$$

Se define el operador frontera como se ha indicado anteriormente

$$d_n^{\otimes}\colon (\mathcal{C}\otimes_R\mathcal{C}')_n \longrightarrow (\mathcal{C}\otimes_R\mathcal{C}')_{n-1},$$

por

$$d_n^{\otimes}(z\otimes_R z') = (d_p(z)\otimes_R z') + (-1)^p z\otimes_R d'_{n-p}(z'),$$

donde $z\otimes_R z'\in C_p\otimes_R C'_{n-p}$.

Tenemos el homomorfismo de cadenas canónico $i\colon H(\mathcal{C})\otimes_R H(\mathcal{C}')\longrightarrow H(\mathcal{C}\otimes_R\mathcal{C}')$: vamos a determinar su núcleo y su conúcleo, suponiendo que R es un anillo de ideales principales y que $\mathcal{C}_*$ es libre, es decir, cada C_n es un R-módulo libre.

Observación 10.5 Si X es un espacio topológico, tomando $C_n = S_n(X;R)$ se obtiene de hecho un R-módulo libre.

Sean $\mathcal{Z}_*$ y $\mathcal{B}_*$ los complejos definidos por los ciclos y los bordes de $\mathcal{C}_*$. Sea $\mathcal{B}^-_*$ el complejo dado por $B^-_q = B_{q-1}$ para $q\geq 0$. Entonces, tenemos una sucesión exacta de complejos de cadenas

$$\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{Z}_*\longrightarrow\mathcal{C}_*\xrightarrow{\partial_*}\mathcal{B}^-_*\longrightarrow\mathcal{O}. \tag{10.1}$$

Como por hipótesis $\mathcal{B}^-_*$ es libre, la anterior sucesión escinde, por lo que tensorizando por $\mathcal{C}'_*$, obtenemos otra sucesión exacta de complejos de cadenas

$$\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{Z}_*\otimes_R\mathcal{C}'_*\longrightarrow\mathcal{C}_*\otimes_R\mathcal{C}'_*\xrightarrow{\partial_*\otimes 1_{\mathcal{C}'}}\mathcal{B}^-_*\otimes_R\mathcal{C}'_*\longrightarrow\mathcal{O}.$$

Por el argumento habitual, esta sucesión induce una sucesión exacta infinita de homología

$$\ldots\longrightarrow H_n(\mathcal{Z}\otimes_R\mathcal{C}')\longrightarrow H_n(\mathcal{C}\otimes_R\mathcal{C}')\longrightarrow H_n(\mathcal{B}^-\otimes_R\mathcal{C}')\xrightarrow{\Phi_{n-1}} H_{n-1}(\mathcal{Z}\otimes_R\mathcal{C}')\longrightarrow\ldots \tag{10.2}$$

Pero $\mathcal{Z}_*$ es un complejo libre, cuyo operador frontera es idénticamente nulo. Por lo tanto su homología es $H_*(\mathcal{Z})=\mathcal{Z}_*$, y se obtiene el siguiente resultado

Lema 10.6 *El homomorfismo $i\colon\mathcal{Z}_*\otimes_R H_*(\mathcal{C}')\longrightarrow H_*(\mathcal{Z}\otimes_R\mathcal{C}')$ es un isomorfismo.*

De manera similar, se demuestra que

Lema 10.7 *El homomorfismo* $i\colon \mathcal{B}^-_* \otimes_R H_*(\mathcal{C}') \longrightarrow H_*(\mathcal{B}^- \otimes_R \mathcal{C}')$ *es un isomorfismo.*

Sustituyendo estos módulos isomorfos en la sucesión exacta (10.2), se obtiene otra sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow (\mathcal{B} \otimes_R H(\mathcal{C}'))_n \longrightarrow (\mathcal{Z} \otimes_R H(\mathcal{C}'))_n \longrightarrow H_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}') \longrightarrow (\mathcal{B} \otimes_R H(\mathcal{C}'))_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

En otras palabras, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Coker(\Phi_n) \longrightarrow H_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}') \longrightarrow Ker(\Phi_{n-1}) \longrightarrow 0, \tag{10.3}$$

donde $\Phi_n\colon (\mathcal{B} \otimes_R H(\mathcal{C}'))_n \longrightarrow (\mathcal{Z} \otimes_R H(\mathcal{C}'))_n$ es el homomorfismo de enlace.

Para determinar $Coker(\Phi_n)$ y $Ker(\Phi_{n-1})$, se utiliza la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow B_p \xrightarrow{j_p} Z_p \longrightarrow H_p(\mathcal{C}) \longrightarrow 0, \tag{10.4}$$

que en general no escinde. Si se tensoriza por $H_{n-p}(\mathcal{C}')$, se obtiene la sucesión exacta

$$B_p \otimes_R H_{n-p}(\mathcal{C}') \xrightarrow{j_p \otimes_R 1} Z_p \otimes_R H_{n-p}(\mathcal{C}') \longrightarrow H_p(\mathcal{C}) \otimes_R H_{n-p}(\mathcal{C}') \longrightarrow 0. \tag{10.5}$$

La flecha de la izquierda no es necesariamente inyectiva, pero como la sucesión (10.4) es una resolución libre de $H_p(\mathcal{C})$ (ya que $\mathcal{Z}$ es un complejo libre), el núcleo de esta aplicación es por definición $Tor_1(H_p(\mathcal{C}), H_{n-p}(\mathcal{C}'))$.

Como $\Phi_n = \bigoplus_p j_p \otimes_R 1$, si se suman todas estas sucesiones, se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to \bigoplus_p Tor_1(H_p(\mathcal{C}), H_{n-p}(\mathcal{C}')) \to (\mathcal{B} \otimes_R H(\mathcal{C}))_n \xrightarrow{\Phi_n} (\mathcal{Z} \otimes_R H(\mathcal{C}'))_n \to (H(\mathcal{C}) \otimes_R H(\mathcal{C}'))_n \to 0,$$

que proporciona el núcleo y conúcleo buscados, y se obtiene la **sucesión exacta de Künneth**

Teorema 10.8 *Si* R *es un anillo de ideales principales y* $\mathcal{C}_*$ *es libre, para cada* n *se tiene la sucesión exacta*

$$0 \to \bigoplus_p (H_p(\mathcal{C}) \otimes_R H_{n-p}(\mathcal{C}')) \to H_n(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}') \to \bigoplus_p Tor_1(H_p(\mathcal{C}), H_{n-p-1}(\mathcal{C}')) \to 0.$$

Observación 10.9 Así, existe un isomorfismo

$$H_n(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \simeq \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathcal{C}) \otimes H_q(\mathcal{C}')) \oplus \bigoplus_{p+q=n-1} Tor_1(H_p(\mathcal{C}), H_q(\mathcal{C}')).$$

Observación 10.10 La sucesión de Künneth escinde, pero no de manera canónica: en efecto, la sucesión (10.1) escinde, con lo que se tienen sendas proyecciones

$$\pi\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{Z}_* \quad \text{y} \quad \pi'\colon \mathcal{C}'_* \longrightarrow \mathcal{Z}'_*.$$

Si se componen estas proyecciones con los homomorfismos cociente

$$\psi\colon \mathcal{C}_* \longrightarrow H_*(\mathcal{C}) \quad \text{y} \quad \psi'\colon \mathcal{C}'_* \longrightarrow H_*(\mathcal{C}'),$$

se obtiene el homomorfismo

$$H_*(\psi \otimes_R \psi')\colon H_*(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}') \longrightarrow H_*(H(\mathcal{C}) \otimes_R H(\mathcal{C}')) = H_*(\mathcal{C}) \otimes_R H_*(\mathcal{C}'),$$

que es una proyección y hace de $H_*(\mathcal{C}) \otimes_R H_*(\mathcal{C}')$ un factor directo.

En el caso topológico, en que $\mathcal{C}_* = S_*(X; R)$ y $\mathcal{C}'_* = S(Y; R)$, se puede usar el teorema de Eilenberg-Zilber para calcular la homomología de $X \times Y$ en función de la de X y la de Y, es decir, la **fórmula de Künneth topológica**

Teorema 10.11 *Si R es un anillo de ideales principales, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene un isomorfismo*

$$H_n(X \times Y) \simeq \bigoplus_{p=0}^{n} (H_p(X) \otimes_R H_{n-p}(Y)) \oplus \bigoplus_{p=0}^{n-1} Tor_1(H_p(X), H_{n-1-p}(Y)).$$

Corolario 10.12 *Si todos los módulos de homología de Y (o de X) son libres en dimensiones menores que n (por ejemplo, si R es un cuerpo) entonces*

$$H_n(X \times Y) \simeq \bigoplus_{p=0}^{n} (H_p(X) \otimes_R H_{n-p}(Y)) .$$

Observación 10.13 El cálculo de la homología del toro generalizado de la proposición 9.38, puede ahora calcularse fácilmente usando fórmula de Künneth.

Si se considera $\mathcal{C}_* = S_*(X, \mathbb{Z})$ y $\mathcal{C}'_*$ dado por $C'_0 = R$ y $C'_n = 0$ para $n \neq 0$, se tiene el isomorfismo

$$(\mathcal{C} \otimes_R \mathcal{C}')_n = S_n(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \simeq S_n(X, R),$$

y se obtiene el **teorema de los coeficientes universales**

Teorema 10.14 *La sucesión*

$$0 \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow H_n(X, R) \longrightarrow Tor_1(H_{n-1}(X, \mathbb{Z}), R)) \longrightarrow 0$$

es exacta y escinde.

Corolario 10.15 *Se tiene el isomorfismo*

$$H_n(X; R) \simeq (H_n(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus Tor_1(H_{n-1}(X, \mathbb{Z}), R)).$$

En particular, si R es libre de torsión, entonces $Tor_1(H_{n-1}(X, \mathbb{Z}), R)) = 0$ para cada n y es $H_n(X; R) \simeq H_n(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Ejemplo 10.16 Si $X = Y = \mathbb{RP}^2$, entonces

(i) $H_0(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$;

(ii) $H_1(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

(iii) $H_2(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

(iv) $H_3(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \simeq Tor_1\,(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Observación 10.17 En el caso relativo, se tiene la sucesión exacta

$$0 \to \bigoplus_{p=0}^{n} (H_p(X, A; R) \otimes_R H_{n-p}(Y, B; R)) \to H_n(S(X, A; R) \otimes_R S(Y, B; R)) \to$$

$$\to \bigoplus_{p=0}^{n-1} Tor_1(H_p(X, A; R), H_{n-p-1}(B; R)) \to 0$$

Dualidad

Altos muros del agua, torres altas,
aguas de pronto negras contra nada,
impenetrables, verdes, grises aguas,
aguas de pronto blancas, deslumbradas.

“Mar por la tarde”
Octavio Paz (1914–1998)

11.1 Cohomología de complejos

Sea un complejo de cadenas $(\mathcal{C}_*, d)$,

$$\dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \dots$$

y M un R-módulo. Se define el complejo de cocadenas $(Hom_R(\mathcal{C}_*, M), d^*)$, siendo

$$d^n := (-1)^n d^t_{n+1} \colon Hom_R(C_n, M) \longrightarrow Hom_R(C_{n+1}, M)$$

para $n \in \mathbb{Z}$, donde

$$d^t_{n+1} \colon Hom_R(C_n, M) \longrightarrow Hom_R(C_{n+1}, M),$$

se define por $d^t_{n+1}(\varphi) = \varphi \circ d_{n+1}$.

Definición 11.1 $Hom_R(C_n, M)$ es el *n-ésimo R-módulo de cocadenas* de $(\mathcal{C}_*, d)$ con valores en M. Un elemento de $Ker(d^n)$ se llama un *n-cociclo* y un elemento de $Im(d^{n-1})$ es un *n-coborde*.

Definición 11.2 Para $n \in \mathbb{Z}$ se define el *n-ésimo módulo de cohomología* de $(\mathcal{C}_*, d)$ con coeficientes en M como

$$H^n(\mathcal{C}_*, M) := H^n(Hom_R(\mathcal{C}_*, M), d^*) = Ker(d^n)/Im(d^{n-1}).$$

Observación 11.3 El coeficiente $(-1)^n$ que multipilica a la diferencial se explicará más tarde, a la hora de enunciar el teorema de dualidad de Poincaré. En algunos textos se elimina este factor corrector.

Se obtiene la **sucesión exacta larga de cohomología**

Lema 11.4 *Sean M un R-módulo y $\mathcal{C}_*$, $\mathcal{C}'_*$, $\mathcal{C}''_*$ complejos de cadenas. Si la sucesión*

$$\mathcal{O} \to Hom_R(\mathcal{C}'_*, M) \to Hom_R(\mathcal{C}_*, M) \to Hom_R(\mathcal{C}''_*, M) \to \mathcal{O}$$

es exacta, entonces existe otra sucesión natural, exacta y larga

$$\ldots \longrightarrow H^n(\mathcal{C}'_*, M) \longrightarrow H^n(\mathcal{C}_*, M) \longrightarrow H^n(\mathcal{C}''_*, M)v$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{C}'_*, M) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{C}_*, M) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{C}''_*, M) \longrightarrow \ldots .$$

Vamos a dar la relación entre $H_m(\mathcal{C}_*)$ y $H^m(\mathcal{C}_*, M)$.

Definición 11.5 Sea $\mathcal{C}_*$ un complejo de cadenas y M un R-módulo. Dadas una n-cocadena $\varphi \in Hom_R(C_n, M)$ y una cadena $c \in C_n$, se define

$$\langle \varphi, c \rangle := \varphi(c) \in M,$$

y se llama *producto escalar* o *producto de Kronecker* de φ y c. También se habla de la *evaluación* de φ en c. Cuando φ y c tienen distinta dimensión, es decir, $\varphi \in Hom_R(C_p, M)$ y $c \in C_q$ con $p \neq q$, se define $\langle \varphi, c \rangle = 0$.

Corolario 11.6 *Sea $\mathcal{C}_*$ un complejo de cadenas y M un R-módulo. El producto escalar es una aplicación bilineal y para $\varphi \in Hom_R(C_n, M)$ y $c \in C_{n+1}$, se tiene la fórmula*

$$\langle d^n(\varphi), c \rangle = (-1)^n \langle \varphi, d_{n+1}(c) \rangle.$$

Observación 11.7 El producto escalar induce una aplicación R-lineal, el *homomorfismo de evaluación,*

$$Hom_R(\mathcal{C}_*, M) \otimes_R \mathcal{C}_* \to M, \text{ por}$$
$$\sum_{p+q=n} \varphi_p \otimes c_q \longrightarrow \begin{cases} \langle \varphi_{\frac{n}{2}}, c_{\frac{n}{2}} \rangle, & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases},$$

donde $\langle \varphi_p, c_q \rangle = 0$ si $p \neq q$.

Lema 11.8 *Sea $\mathcal{C}_*$ un complejo de cadenas y M un R-módulo. El homomorfsmo de evaluación induce un homomorfismo natural*

$$\kappa\colon H^n(\mathcal{C}_*, M) \longrightarrow Hom_R(H_n(\mathcal{C}_*), M), \text{ por } \kappa([\varphi])([c]) = \varphi(c),$$

con las notaciones obvias. Si M es un R-módulo inyectivo, κ es un isomorfismo.

Se tiene el siguiente **teorema (algebraico) de los coeficientes en cohomología**

Teorema 11.9 *Sea $(\mathcal{C}_*, d_*)$ un complejo de cadenas tal que $Z_n(\mathcal{C}_*)$ y $B_n(\mathcal{C}_*)$ son proyectivos para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe una sucesión exacta natural y que escinde,*

$$\{0\} \to Ext^1_R(H_{n-1}(\mathcal{C}_*), M) \to H^n(\mathcal{C}_*, M) \xrightarrow{\kappa} Hom_R(H_n(\mathcal{C}_*), M) \to \{0\},$$

donde $\kappa([\varphi]) = ([c] \to \varphi(c))$.

11.2 Cohomología singular

Los módulos de cohomología para espacios topológicos no se conocen hasta que se alcanza un mayor desarrollo de la Topología Algebraica en 1930, cuando Lefschetz formula algunos de los teoremas de dualidad para variedades.

La cohomología es dual de la homología en dos sentidos

(i) hay una aplicación bilineal entre cadenas y cocadenas,

(ii) H^q es un functor contravariante.

Definición 11.10 Sea (X, A) un par de espacios topológicos y M un R-módulo. Se introducen

(i) el *grupo de las n-cocadenas singulares* de (X, A) con valores en M es el R-módulo $S^n(X, A; M) := Hom_R(S_n(X, A; R), M)$;

(ii) el *operador cocadena singular*

$$d^n \colon S^n(X, A; M) \longrightarrow S^{n+1}(X, A; M);$$

se define por $d^n(\varphi)(\sigma) = (-1)^n \varphi(d_{n+1}(\sigma))$, para $\varphi \in S^n(X, A; M)$ y $\sigma \in S_{n+1}(X, A; R)$ y se extiende por linealidad. $(S^*(X, A; M), d^*)$ resulta ser un complejo de R-módulos;

(iii) diremos que $\varphi \in S^n(X, A; M)$ es un *n-cociclo* cuando $d^n(\varphi) = 0$ y un *n-coborde* si $\varphi \in Im(d^{n-1})$. Se denota por $Z^n(X, A; M)$ al grupo de los n-cociclos y por $B^n(X, A; M)$ el grupo de los n-cobordes, y entonces

$$H^n(X, A; M) := Z^n(X, A; M)/B^n(X, A; M) = H^n(S^*(X, A; M), d^*),$$

se llama *n-grupo de cohomología singular de (X, A) con valores en M*.

Observación 11.11 Se tiene un isomorfismo

$$S^n(X, A; M) \simeq \{\varphi \in Hom_R(S_n(X, R), M) : \varphi|_{S_n(A;R)} = 0\}.$$

Aquí, $S_n(X, A; R)$ es un R-módulo libre sobre el conjunto $S_n(X)/S_n(A)$ de los n-símplices singulares $\sigma \colon \Delta_n \longrightarrow X$ con $Im(\sigma) \not\subset A$. Por lo tanto, $S^n(X; M)$ y $S^n(X, A; M)$ pueden interpretarse como los espacios de funciones $\varphi \colon S_n(X) \longrightarrow M$ y $\psi \colon S_n(X)/S_n(A) \longrightarrow M$ respectivamente. Los R-módulos $S^n(X; M)$ y $S^n(X, A; M)$ son, por lo tanto, isomorfos a la suma directa de $\sharp S_n(X)$ y $\sharp(S_n(X)/S_n(A))$ de copias de M, respectivamente.

Observación 11.12 Si M es un R-módulo libre (respectivamente, proyectivo, llano), por ejemplo, si $M = R$, entonces $S^n(X, A; M)$ es un R-módulo libre (respectivamente, proyectivo, llano).

Observación 11.13 En virtud de los anteriores argumentos, $S^n(X, A; M)$ puede definirse también como $Hom_{\mathbb{Z}}(S_n(X, A; \mathbb{Z}), M)$.

Definición 11.14 Sea M un R-módulo y una aplicación entre pares $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$. Sobre los complejos de cadenas se tiene la aplicación inducida $f_*\colon S_*(X,A;R) \longrightarrow S_*(Y,B;R)$, y se define entonces el *homomorfismo dual* de f_*,

$$f^* := Hom_R(f_*;M)\colon S^*(Y,B;M) \longrightarrow S^*(X,A;M),$$

dado por $f^*(\varphi) = \varphi \circ f_*$. f^* es un homomorfismo de complejos de cocadenas, que induce a su vez un homomorfismo entre los R-módulos de cohomología

$$f^n := H^n(f;M)\colon H^n(Y,B;M) \longrightarrow H^n(X,A;M).$$

Corolario 11.15 *En las condiciones anteriores, $H^n\colon$* **ParTop** $\longrightarrow$ **Mod**$_R$ *es un functor contravariante de la categoría de pares de espacios topológicos en la categoría de R-módulos.*

Observación 11.16 De hecho, $H^n\colon$ **HomParTop** $\longrightarrow$ **Mod**$_R$ es un functor contravariante de la categoría de homotopía de pares de espacios topológicos en la categoría de R-módulos.

Se obtiene el **teorema (topológico) de los coeficientes en cohomología**

Teorema 11.17 *Sea R un anillo de ideales principales, M un R-módulo y (X,A) un par de espacios. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe una sucesión natural exacta, que escinde*

$$\{0\} \to Ext^1_R(H_{n-1}(X,A;R),M) \to H^n(X,A;M) \xrightarrow{\kappa} Hom_R(H_n(X,A;R),M) \to \{0\},$$

donde $\kappa([\varphi]) = ([c] \to \varphi(c))$ es la aplicación inducida.

Corolario 11.18 *Sea R un anillo de ideales principales, M un R-módulo y (X,A) un par de espacios. Si $H_{n-1}(X,A;R)$ es libre (por ejemplo, si R es un cuerpo) o M es inyectivo, se obtiene un isomorfismo*

$$\kappa : H^n(X,A;M) \xrightarrow{\cong} Hom_R(H_n(X,A;R),M),$$

dado por $\kappa([\varphi]) = ([c] \to \varphi(c))$

11.3 Productos cup y cap

Algo que distingue la cohomología de la homología es la existencia de una operación interna natural, el *producto cup*, que hace de los R-módulos de cohomología una R-álgebra graduada. Y este anillo de cohomología operará sobre los R-módulos de homología a través del *producto cap*.

11.3.1 El producto cup

Vamos a definir el producto cup sobre $S^*(X;R) = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} S^q(X;R)$

Definición 11.19 Sea X un espacio topológico. Se define

(i) para $p,q \in \mathbb{N}$, sea Δ_{p+q} el $(p+q)$-símplice estándar. Tenemos dos inclusiones naturales

$$\lambda_p\colon \Delta_p \longrightarrow \Delta_{p+q}, \quad \lambda_p = (e_0 \dots e_p)$$
$$\rho_q\colon \Delta_q \longrightarrow \Delta_{p+q}, \quad \rho_q = (e_p, \dots, e_{p+q});$$

(ii) para $p,q \in \mathbb{N}$, sean $c \in S^p(X;R)$ y $d \in S^q(X;R)$ dos cocadenas singulares. Se define una $(p+q)$-cocadena singular $c \cup d \in S^{p+q}(X;R)$ del modo siguiente: para cada $(p+q)$-símplice singular $\sigma\colon \Delta_{p+q} \longrightarrow X$ sea

$$(c \cup d)(\sigma) := \langle c \cup d, \sigma\rangle := \langle c, \sigma \circ \lambda_p\rangle\langle d, \sigma \circ \rho_q\rangle;$$

c opera sobre la p-cara frontal de σ y d opera sobre la q-cara dorsal;

(iii) dadas $c,d \in S^*(X,R)$, existen $k,l \in \mathbb{N}$ tales que $c = \sum_{p=0}^{k} c_p$ y $d = \sum_{q=0}^{l} d_q$, donde para cada $p = 0,\dots,k$ y $q = 0,\dots,l$ es $c_p \in S^p(X;R)$ y $d_q \in S^q(X;R)$. Entonces se define

$$c \cup d := \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} c_p \cup d_q \in S^*(X;R).$$

Queda así definida una operación bilineal

$$\cup\colon S^*(X;R) \times S^*(X;R) \longrightarrow S^*(X;R) \quad \text{por} \quad \cup(c,d) = c \cup d,$$

llamada el *cup-producto* de $S^*(X;R)$.

Definición 11.20 Si M es un R-módulo, es una R-álgebra si para cada $a,b \in M$ y $r,s \in R$ es $(ra)(sb) = rs(ab)$. Si además $M = \bigoplus_q M_q$, con M_q R-submódulos tales que $M_qM_p \subset M_{p+q}$, entonces M es un *álgebra graduada*. Un *homomorfismo* de R-álgebras $f\colon M \longrightarrow M'$ es una aplicación R-lineal y tal que $f(ab) = f(a)f(b)$.

Lema 11.21 *Sea X un espacio topológico. Entonces*

(i) $(S^*(X;R), +, \cup)$ es un anillo con elemento unidad $1 \in S^0(X;R)$ tal que $\langle 1,\sigma\rangle = 1$ para cada $\sigma \in S_0(X;R)$. Sin embargo, este anillo no es en general conmutativo;

(ii) sean $a \in S^p(X;R)$ y $b \in S^q(X;R)$; para la diferencial d en $S^*(X;R)$ se verifica

$$d^{p+q}(a \cup b) = (-1)^q(d^p a) \cup b + a \cup (d^q b),$$

es decir, el operador coborde es una derivación del anillo graduado $S^*(X;R)$;

(iii) $Z^*(X;R) := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} Z^p(X;R)$ *es un subanillo de* $S^*(X;R)$ *y* $B^*(X;R) := \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} B^q(X;R)$ *es un ideal bilátero de* $Z^*(X;R)$*. Así, por paso del cup al cociente, se deduce que* $H^*(X;R) := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} H^p(X;R)$ *es un* R*-álgebra graduada con unidad;*

(iv) si $f\colon X \longrightarrow Y$ *es continua, se obtienen dos homomorfismos de* R*-álgebras*

$$f^*\colon S^*(Y;R) \longrightarrow S^*(X;R) \quad \text{y} \quad f^*\colon H^*(Y;R) \longrightarrow H^*(X;R),$$

definidos de la manera obvia.

Observación 11.22 S^* y H^* son functores contravariantes de la categoría **Top** de espacios topológicos en la categoría $\mathbf{GradAlg}_R$ de R-álgebras graduadas.

Teorema 11.23 $(H^*(X;R), +, \cup)$ *es un anillo anticomutativo, es decir, si* $[a] \in H^p(X;R)$ *y* $[b] \in H^q(X;R)$*, es* $[a] \cup [b] = (-1)^{pq}[b] \cup [a]$*. En particular, si* $a = b$ *y* p *impar, es* $[a] \cup [a] = 0$*, si* R *tiene característica distinta de 2.*

Ejemplo 11.24 La anterior identidad no es válida en $(S^*(X;R), +, \cup)$: en efecto, sean $X = \Delta_1$, $a \in S^0(\Delta_1;R)$ y $b \in S^1(\Delta_1;R)$ definidos de modo que

$$\text{si} \quad \sigma \in S_0(\Delta_1;R), \quad \text{es} \quad \langle a, \sigma \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = e_0 \\ 0 & \text{si } \sigma \neq e_0 \end{cases}$$

$$\text{si} \quad \sigma \in S_1(\Delta_1;R), \quad \text{es} \quad \langle b, \sigma \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = 1_{\Delta_1} \\ 0 & \text{si } \sigma \neq 1_{\Delta_1} \end{cases}.$$

Entonces

$$\langle a \cup b, 1_{\Delta_1} \rangle = \langle a, 1_{\Delta_1} \circ \lambda_0 \rangle \langle b, 1_{\Delta_1} \circ \rho_1 \rangle = \langle a, e_0 \rangle \langle b, 1_{\Delta_1} \rangle = 1.1 = 1,$$

$$\langle b \cup a, 1_{\Delta_1} \rangle = \langle b, 1_{\Delta_1} \circ \lambda_1 \rangle \langle a, 1_{\Delta_1} \circ \rho_0 \rangle = \langle b, 1_{\Delta_1} \rangle \langle a, e_1 \rangle = 1.0 = 0.$$

11.3.2 El producto cap

Este producto es esencial para enunciar los teoremas de dualidad.

Definición 11.25 Sea X un espacio topológico. Dadas una cocadena singular $a \in S^p(X;R)$ y un símplice singular $\sigma \in S_{p+q}(X;R)$ se define

$$a \cap \sigma := \langle a, \sigma \circ \lambda_p \rangle (\sigma \circ \rho_q) \in S_q(X;R).$$

Extendiendo la definición por linealidad, se obtiene una aplicación lineal

$$\cap\colon S^*(X;R) \times S_*(X;R) \longrightarrow S_*(X;R),$$

llamada *producto cap* de $S^*(X;R)$ y $S_*(X;R)$.

Observación 11.26 Para $q \in \mathbb{N}$, puede identificarse $S_q(X;R)$ con $Hom_R(S^q(X;R),R)$, asociando a $\sigma \in S_q(X;R)$, la aplicación que lleva $b \in S^q(X;R)$ en$\langle b,\sigma\rangle$.

Lema 11.27 *Sean $a \in S^p(X;R)$ y $\sigma \in S_{p+q}(X;R)$. Entonces se puede mirar $a \cap \sigma$ como un elemento de $Hom_R(S^q(X;R),R)$, donde para cada $b \in S^q(X;R)$ es*

$$(a \cap \sigma)(b) := \langle b, a \cap \sigma\rangle = \langle a \cup b, \sigma\rangle.$$

Lema 11.28 *Se verifica*

(i) $\cap$ es bilineal y define una multiplicación escalar del anillo $S^*(X;R)$ sobre $S_*(X;R)$: esto hace de $S_*(X;R)$ un $S^*(X;R)$-módulo a la derecha;

(ii) para cada $a \in S^p(X;R)$ y cada $z \in S_{p+q}(X;R)$, la diferencial posee la propiedad $d_p(a \cap z) = (-1)^p(a \cap d_{p+q}(z)) - (d^p(a) \cap z)$;

(iii) $\cap$ induce una multiplicación escalar

$$\cap \colon H^p(X;R) \times H_{p+q}(X;R) \longrightarrow H_q(X;R)$$

de $H^*(X;R)$ en $H_*(X;R)$. Así, el producto cap hace de $H_*(X;R)$ un $H^*(X;R)$-módulo graduado;

(iv) si $f \colon X \longrightarrow Y$ es continua, se tiene un homomorfismo de módulos $f_* \colon H_*(X;R) \longrightarrow H_*(Y;R)$ sobre el homomorfismo de anillos $f^* \colon H^*(Y;R) \longrightarrow H^*(X;R)$, es decir, para $a \in H^*(Y;R)$ y $z \in H_*(X;R)$ es $f_*(f^*(a) \cap z) = a \cap f_*(z)$.

11.4 Orientación

11.4.1 Orientación en variedades

Si se toma homología con coeficientes en $\mathbb{Z}$, la idea ahora es mirar las dos posibles elecciones de generadores en $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$ como las dos orientaciones alternativas en $\mathbb{R}^n$. Esto puede justificarse heurísticamente como sigue: si la posición del n-símplice estándar Δ_n en $\mathbb{R}^n$ es tal que $0 \in \mathbb{R}^n$ está en el interior de Δ_n, entonces la inclusión de Δ_n en $\mathbb{R}^n$ representa un generador i de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$, ya que esta inclusión induce un isomorfismo

$$H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}),$$

y $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ está generada por la identidad de Δ_n en Δ_n. Si $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal inversible, entonces la restricción $f|_{\Delta_n}$ es un ciclo relativo que representa la clase $H_n(f)(i) \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$. Pero $H_n(f)(i)$ es i ó $-i$ dependiendo del signo del determinante de f, luego $H_n(f)$ preserva los generadores de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$, lo cual significa que f preserva la orientación en $\mathbb{R}^n$, con lo que es natural identificar los dos generadores de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ con las dos orientaciones de $\mathbb{R}^n$.

Lema 11.29 *Sea M una variedad n-dimensional, $n \geq 1$. Para cada $x \in M$ y $q \in \mathbb{Z}$, es*

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R) \simeq H_q(M, M - \{x\}; R) \simeq H_q(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R = \begin{cases} R & \textit{si } q = n \\ \{0\} & \textit{si } q \neq n \end{cases}.$$

Definición 11.30 Sea M una variedad de dimensión n y $x \in M$. La elección de un generador de $H_n(M, M - \{x\}; R) \simeq R$ se llama una *R-orientación local de M en x*. Para $R = \mathbb{Z}$ se habla de *orientación local de M en x*.

Observación 11.31 Si $R = \mathbb{Z}$, hay dos $\mathbb{Z}$-orientaciones locales de M en x, al tener $\mathbb{Z}$ dos generadores. Si $R = \mathbb{Z}_2$, hay una única $\mathbb{Z}_2$-orientación local de M en x.

Una orientación global para M existe, cuando las orientaciones locales se *pegan de manera coherente*. ¿Cómo elegir coherentemente una orientación local en cada punto de la variedad? En pequeños entornos, esto siempre funciona

Lema 11.32 *Sea M una variedad de dimensión n y $x \in M$. Existe una base local $\mathcal{B}_x$ en el punto x, tal que para cada $U \in \mathcal{B}_x$ y cada $y \in U$ el homomorfismo inducido por la inclusión*

$$j_y^U : H_n(M, M - U; R) \longrightarrow H_n(M, M - \{y\}; R),$$

es un isomorfismo.

Definición 11.33 Sea M una variedad de dimensión n y $U \subset M$ un abierto. Para cada $y \in U$ sea

$$j_y^U : H_n(M, M - U; R) \longrightarrow H_n(M, M - \{y\}; R)$$

la aplicación inducida por la inclusión. Un elemento $o \in H_n(M, M-U; R)$ es una *R-orientación local de M en U*, si para cada $y \in U$, $\alpha_y = j_y^U(o)$ es un generador de $H_n(M, M - \{y\}; R)$. Una $\mathbb{Z}$-orientación local de M en U, se llama sencillamente *orientación local* de M en U.

Proposición 11.34 *Sea M una variedad de dimensión n y α_x una R-orientación local en $x \in M$. Existe un entorno abierto U de x, tal que α_x se extiende de forma única a una R-orientación local sobre U.*

Definición 11.35 Sea M una variedad de dimensión n, $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de M y para cada $i \in I$ sea o_i una R-orientación local de M en U_i. Al sistema $\{U_i, o_i\}_{i \in I}$ se le llama *sistema de R-orientación local de M*. Si $R = \mathbb{Z}$, se habla de un *sistema de orientación local* de M.

Definición 11.36 Se dice que un tal sistema es *coherente*, cuando dados $i, j \in I$ y $x \in U_i \cap U_j$, es $j_x^{U_i}(o_i) = j_x^{U_j}(o_j)$, con las notaciones obvias

Definición 11.37 M se dice *R-orientable*, si admite al menos un sistema de orientación local coherente.

Definición 11.38 Sea M una variedad de dimensión n. Se puede siempre inducir un sistema coherente a partir de uno R-orientado $\{(U_i, o_i)\}_{i\in I}$ del modo siguiente

$$x \to o_x := j_x^{U_i}(o_i) \quad \text{para} \quad i \in I \quad \text{y} \quad x \in U_i,$$

en cada punto $x \in M$, y esto proporciona una R-orientación local bien definida. Dos sistemas coherentes se dicen *equivalentes*, si sus R-sistemas locales inducidos coinciden.

Definición 11.39 Una *R-orientación* para M es una clase de equivalencia de sistemas locales R-orientados coherentes de M. Una variedad se dice *R-orientada* si se ha fijado una R-orientación en M. Se dice *orientada* si es R-orientada y $R = \mathbb{Z}$.

Proposición 11.40 *Se verifican las siguientes propiedades*

(i) si R tiene característica 2, toda variedad topológica es R-orientable. En particular, toda variedad está $\mathbb{Z}_2$-orientada: el grupo de homología relativo $H_n(M, M - \{x\}, \mathbb{Z}_2)$ es cíclico de orden 2, por lo que tiene un único generador o_x. Si o es la función que asigna a cada $x \in M$ el elemento o_x, se dice que es una orientación (mod 2) para M;

(ii) dos R-orientaciones de una variedad topológica conexa son iguales si y sólo si coinciden en un punto;

(iii) una variedad es orientable si y sólo si es R-orientable para todo anillo R.

Para estudiar el problema de la orientación en variedades, resulta útil asociar a una variedad M otra variedad orientable

Definición 11.41 Sea M una variedad de dimensión n. Sea

$$\widetilde{M} := \{(x, o_x) : x \in M, o_x \text{ orientación local del } M \text{ en } x\}.$$

El *revestimiento de las orientaciones* p de $\widetilde{M}$ de M es la proyección $p\colon \widetilde{M} \longrightarrow M$, que lleva $p(x, o_x) = x$. Una aplicación $s\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ con $p \circ s = 1_M$ se llama una *sección* de p.

Observación 11.42 Para cada $x \in M$, $p^{-1}(x)$ posee dos puntos $o_x^{\pm} \in H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Por el lema 11.29 para cada punto $x \in M$ existe un entorno U_x tal que

$$p^{-1}(U_x) = \widetilde{U_x^+} \cup \widetilde{U_x^-} = \{(y, o_y^+) : y \in U_x\} \cup \{(y, o_y^-) : y \in U_x\}$$

con $o_y^{\pm} = j_y^U \circ (j_x^U)^{-1}(o_x^{\pm})$ y donde $o_x^{\pm}$ es la orientación local elegida para el punto x. Se puede definir una topología sobre $\widetilde{M}$ del modo siguiente: un conjunto $V \subset \widetilde{M}$ será abierto, si para cada $x \in M$ los conjuntos $p(V \cap \widetilde{U_x^+})$ y $p(V \cap \widetilde{U_x^-})$ son abiertos en M.

Teorema 11.43 *Sea M una variedad n-dimensional y $p\colon \widetilde{M} \longrightarrow M$ el revestimiento de las orientaciones. Entonces*

(i) p es un revestimiento de dos hojas de M;

(ii) la aplicación $M \to \bigcup_{x\in M} H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z})$ que lleva x en o_x, donde o_x es un generador de $H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z})$ es continua. Así, queda fijada una orientación de M, en cuanto se da la aplicación $s\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ definida por $s(x) = (x, o_x)$.

Corolario 11.44 *Sea M una variedad de dimensión n. Entonces*

(i) si M está orientada, lo está cualquier subespacio abierto de M;

(ii) M está orientada cuando cada una de sus componentes conexas lo está;

(iii) si M es conexa, existen excatamente dos orientaciones;

(iv) M es orientable cuando el revestimiento de las orientaciones $p\colon \widetilde{M} \longrightarrow M$es equivalente al fibrado trivial $p_1\colon M \times \mathbb{S}^0 \longrightarrow M$;

(v) si M es conexo, es orientable si y sólo si $\widetilde{M}$ tiene dos componentes.

Corolario 11.45 *Sea M una variedad de dimensión n y $x_0 \in M$. Si M es conexo por caminos y el grupo $\pi_1(M, x_0)$ no contiene ningún subgrupo de índice 2 (en particular, si es simplemente conexo), entonces M es orientable.*

Lema 11.46 *Si M es una variedad de dimensión n, entonces $\widetilde{M}$ es una variedad de dimensión n y orientable.*

11.4.2 Fibrado de las orientaciones y clase fundamental

Sea M una variedad topológica de dimensión n. Ya hemos construido el revestimiento de dos hojas de las orientaciones $p\colon \widetilde{M} \longrightarrow M$, con fibra

$$p^{-1}(x) = \{(x, o_x) : o_x \in H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) : o_x \text{ es generador}\} \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Vamos a construir ahora un revestimiento de infinitas hojas $q\colon \mathcal{O}_M \longrightarrow M$.

Definición 11.47 Sea $\mathcal{O}_M := \{(x, \alpha_x) : x \in M, \alpha_x \in H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z})\}$. Para cada abierto $U \subset M$ y $x \in U$, sea $j_x^U\colon H_n(M, M - U; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z})$ la aplicación inducida por la inclusión. Para $U \subset M$ abierto y $\alpha_U \in H_n(M, M - U; \mathbb{Z})$, se define el conjunto $\langle U, \alpha_U\rangle = \{(x, \alpha_x) : x \in U, \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}$. Sea $p\colon \mathcal{O}_M \longrightarrow M$ la proyección canónica $p(x, \alpha_x) = x$. La terna $(\mathcal{O}_M, p, M)$ se llama *fibrado de las orientaciones* de M.

Lema 11.48 *En las condiciones anteriores*

(i) la familia $\{\langle U, \alpha_U\rangle : U \subset M$ *abierto*, $\alpha_U \in H_n(M, M-U;\mathbb{Z})\}$ *es base de una topología sobre* $\mathcal{O}_M$*;*

(ii) $p\colon \mathcal{O}_M \longrightarrow M$ *es un revestimiento con fibra discreta* $p^{-1}(x) = H_n(M, M-\{x\};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$*.*

En las condiciones anteriores, se define la aplicación $\beta\colon \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathbb{Z}$, por $\beta(x,\alpha_x) = |\alpha_x|$ y se denota $\mathcal{O}_M(r) := \beta^{-1}(r)$ para $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Observación 11.49 Para cada $x \in M$, tenemos dos isomorfismos $H_n(M, M-\{x\};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$, lo que garantiza que

(i) β está bien definida, es localmente constante y por lo tanto continua;

(ii) $\mathcal{O}_M$ es la suma topológica de los $\mathcal{O}_M(r)$ para $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$;

(iii) $\mathcal{O}_M(1)$ es homeomorfo a $\widetilde{M}$;

(iv) $\mathcal{O}_M(r) \simeq \mathcal{O}_M(1)$ para $r \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{O}_M(0) \simeq M$.

Definición 11.50 Sea M una variedad de dimensión M y $Z \subset M$. El conjunto de las *secciones de* $\mathcal{O}_M$ *sobre* Z es

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_M) := \{s\colon Z \longrightarrow \mathcal{O}_M : \text{ continua y } p\circ s = 1_Z\}.$$

Se identifica cada sección $s \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_M)$ con la aplicación $x \to (x, o_x)$ a través de la aplicación continua $x \to o_x \in H_n(M, M-\{x\};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, es decir, se puede pensar s como una aplicación continua $Z \to \mathbb{Z}$.
$\Gamma(M, \mathcal{O}_M)$ se denomina el conjunto de las *secciones globales de* M.

Definición 11.51 Para $s \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_M)$, su *soporte*, sop$(s)$, es la clausura de $\{x \in Z : s(x) \neq 0\}$. El conjunto de las *secciones sobre* Z *con soporte compacto* se define por

$$\Gamma_C(Z, \mathcal{O}_M) := \{s \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_M) : \text{sop}(s) \text{ es compacto}\}.$$

Se verifica

Proposición 11.52 *Dada una variedad* M *de dimensión* n*, existe una biyección entre*

(i) el conjunto de las orientaciones sobre M*;*

(ii) el conjunto de las secciones globales $s \in \Gamma(M, \mathcal{O}_M)$ *tales que* $im(s) \subset \mathcal{O}_M(1)$*; y*

(iii) el conjunto de las trivializaciones del revestimiento de las orientaciones $\mathcal{O}_M(1)$ *de* M*.*

Sea M una variedad de dimensión M y $A \subset M$. Para $\alpha \in H_n(M, M-A,\mathbb{Z})$, sea la aplicación $j_A(\alpha)\colon A \longrightarrow \mathcal{O}_M$ dada por $j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha))$, que es continua. j_A es además una sección de $\mathcal{O}_M$ sobre A. $\Gamma(A, \mathcal{O}_M)$, es un grupo abeliano con la suma

$$(s_1+s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x) \in H_n(M, M-\{x\};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

Y se tiene

Teorema 11.53 *En las condiciones anteriores, si $A \subset M$ es cerrado, entonces*

(i) $H_q(M, M - A; \mathbb{Z}) = \{0\}$ *para cada* $q > n$*;*

(ii) el homomorfismo canónico $j_A \colon H_n(M, M - A; \mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma(A, \mathcal{O}_M)$ *dado por* $j_A(\alpha)$ *como antes, es inyectivo e* $im(j_A) = \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$*;*

(iii) en particular, para $A = M$*, es* $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \Gamma_C(M, \mathcal{O}_M)$ *y* $H_q(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$ *para cada* $q > n$*.*

Observación 11.54 Claramente, si A es compacto, es $\Gamma(A, \mathcal{O}_M) = \Gamma_C(A, \mathcal{O}_M)$.

Corolario 11.55 *Sea* M *una variedad de dimensión* n *y* $A \subset M$ *cerrado, conexo, pero no compacto. Entonces,* $H_n(M, M - A; \mathbb{Z}) = \{0\}$*.*
En particular, si M *una variedad de dimensión* n *conexa y no compacta, es* $H_n(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$*.*

Definición 11.56 Sea M una variedad topológica de dimensión n y $A \subset M$. Si existe una sección $s \in \Gamma(A, \mathcal{O}_M)$ tal que para cada $x \in A$ el elemento $s(x) \in H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z})$ es generador, se dice que M *es orientable a lo largo de* A.

Corolario 11.57 *Sea* M *una variedad de dimensión* n *y* $A \subset M$ *compacto con* k *componentes conexas. Entonces,* M *es orientable a lo largo de* A *y* $H_n(M, M - A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^k$*.*

Corolario 11.58 *Sea* M *una variedad de dimensión* n *compacta y conexa. Entonces,*

$$H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } M \textit{ orientable} \\ \{0\} & \textit{en otro caso} \end{cases}.$$

Observación 11.59 Son orientables $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{CP}^n$ y $\mathbb{RP}^n$ para n impar. No son orientables la botella de Klein, la banda de Möbius $\mathbb{M}$ y $\mathbb{RP}^n$ para n par. Además, al ser $\mathbb{S}^1$ orientable y $\mathbb{M}$ no orientable, se deduce que la orientabilidad no es una propiedad de homotopía.

Definición 11.60 Un elemento $\alpha \in H_n(M; \mathbb{Z})$ se llama *clase fundamental de* M cuando para cada $x \in M$ el elemento $j_x^M(\alpha) \in H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z})$ es un generador.

Ejemplo 11.61 Para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}^n$ posee una clase fundamental. Sin embargo, $\mathbb{R}^n$ no posee clase fundamental, pues $H_n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = \{0\}$ y $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Corolario 11.62 *Sea* M *una variedad de dimensión* n*, entonces*

(i) si M *posee una clase fundamental,* M *es orientable;*

(ii) si M *es compacta y orientable, posee una clase fundamental;*

(iii) si M *es compacta y orientable, existe una correspondencia uno a uno entre las clases fundamentales de* M *y las orientaciones de* M*.*

11.5 Teorema de dualidad de Poincaré

11.5.1 El caso compacto

Empecemos con el teorema de **dualidad de Poincaré para variedades compactas**

Teorema 11.63 *Sean M una n-variedad orientable, conexa y compacta y z_M una clase fundamental de M. Para cada $q \in \mathbb{Z}$, el* homomorfismo de Poincaré

$$P\colon H^p(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-q}(M;\mathbb{Z})$$

definido por $P(c) = c \cap z_M$ es un isomorfismo.

Teorema 11.64 *Sean M una n-variedad orientable, conexa y compacta. Entonces*

(i) para cada $q \in \mathbb{N}$ se tiene un isomorfismo

$$H_q(M;\mathbb{Z})/T(H_q(M;\mathbb{Z})) \simeq H_{n-q}(M;\mathbb{Z})/T(H_{n-q}(M;\mathbb{Z})),$$

donde $T((H_q(M;\mathbb{Z}))$ y $T(H_{n-q}(M;\mathbb{Z}))$ son los respectivos grupos de torsión. En particular, para los números de Betti definidos por $\beta_q = rg(H_q(M;\mathbb{Z}))$, se deduce la igualdad $\beta_q = \beta_{n-q}$;

(ii) para cada $q \in \mathbb{N}$, se tiene un isomorfismo $T((H_q(M;\mathbb{Z})) \simeq T(H_{n-q}(M;\mathbb{Z}))$.

Ejemplo 11.65 Sea M una variedad de dimensión 3, orientable, compacta y conexa. Vamos a calcular los grupos de homología de M, a través de $H_1(M;\mathbb{Z})$

(i) como M es conexa, es $H_0(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, que no depende de $H_1(M;\mathbb{Z})$;

(ii) por el teorema 11.64, es

$$H_2(M;\mathbb{Z}) \simeq H_2(M;\mathbb{Z})/T(H_2(M;\mathbb{Z})) \oplus T(H_2(M;\mathbb{Z})) \simeq$$

$$\simeq H_1(M;\mathbb{Z})/T(H_1(M;\mathbb{Z})) \oplus T(H_0(M;\mathbb{Z})) \simeq H_1(M;\mathbb{Z})/T(H_1(M;\mathbb{Z}));$$

(iii) como $T(H_3(M;\mathbb{Z})) \simeq T(H_{-1}(M;\mathbb{Z})) \simeq \{0\}$, es $H_3(M;\mathbb{Z}) \simeq H_0(M;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Teorema 11.66 *Sea M una variedad de dimensión n, orientable, compacta y conexa. Si n es impar, $\chi(M) = \sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \beta_q = 0$.*

11.5.2 El caso no compacto

El primer paso para probar la dualidad de Poincaré en variedades arbitarias es construir clases fundamentales.

Lema 11.67 *Sea M una n-variedad y $K \subset M$ compacto. Entonces*

(i) $H_q(M, M-K; R) = \{0\}$ para $q > n$ y $H_n(M, M-K; R) = \{0\}$ si y sólo si su imagen en $H_n(M, M-\{x\}; R)$ es trivial para cada $x \in K$;

(ii) si $x \to o_x$ es una R-orientación de M, existe una única clase $o_K \in H_n(M, M-K; R)$ cuya imagen en $H_n(M, M-\{x\}; R)$ es o_x para cada $x \in K$;

(iii) en particular si M es cerrada y orientable, tomando $K = M$ en (ii) se obtiene una clase fundamental para M.

Proposición 11.68 *Sea X un espacio topológico, $X = \bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha$, unión de una familia dirigida de subespacios con la propiedad de que cada compacto en X está contenido en algún X_α. Entonces la aplicación natural $\varinjlim H_q(X_\alpha; R) \to H_q(X; R)$ es un isomorfismo para cada q.*

Definición 11.69 Sea X un espacio topológico. La familia de sus subespacios compactos forma un sistema dirigido para la inclusión, ya que la unión de dos compactos es un conjunto compacto. A cada compacto K se le asocia el grupo $H^q(X, X-K; R)$ con q fijo y a cada inclusión $K_1 \subset K_2$ de compactos se le asocia el momomorfismo natural

$$H^q(X, X-K_1; R) \longrightarrow H^q(X, X-K_2; R).$$

El grupo resultante

$$H^q_C(X; R) = \varinjlim \quad H^q(X, X-K; R),$$

es el *q-ésimo grupo de cohomología singular con soporte compacto* de X.

Observación 11.70 El nombre se debe a que los elementos de este grupo se representan con cocadenas φ que se anulan sobre todos los símplices singulares en el complementario de un compacto $K_\varphi \subset X$. Si X es compacto, $H^q_C(X; R) = H^q(X; R)$ pues X es el único compacto maximal que contiene a los compactos de X.

Observación 11.71 En realidad es

$$H^q_C(X; R) := \left(\bigoplus_{K \subset X, \text{compacto}} H^q(X, X-K; R) \right) / \sim,$$

donde si $K_1, K_2 \subset X$ son dos compactos, dados dos elementos $\alpha \in H^q(X, X-K_1; R)$ y $\beta \in H^q(X, X-K_2; R)$, es $\alpha \sim \beta$ cuando existe $K \subset X$ compacto tal que $K_1 \cup K_2 \subset K$ y $i_1^*(\alpha) = i_2^*(\beta)$, donde $i_j \colon (X, X-K) \longrightarrow (X, X-K_j)$ es la inclusión natural para $j = 1, 2$.

Observación 11.72 Si X es un espacio topológico y $\Gamma \subset \{K \subset X : K \,\text{compacto}\}$ es un sistema cofinal de espacios compactos (es decir, para cada compacto $K \subset X$, existe $K' \in \Gamma$ tal que $K \subset K'$), entonces para cada $q \in \mathbb{Z}$ es

$$H^q_C(X; R) = \varinjlim \{H^q(X, X-K; R) : K \in \Gamma\}.$$

Ejemplos 11.73 Se tienen los ejemplos

1. sea X compacto; entonces

$$H^q_C(X;\mathbb{Z}) = H^q_C(X, X - X; \mathbb{Z}) = H^q(X;\mathbb{Z}),$$

ya que $\Gamma = \{X\}$ es un sistema cofinal de conjuntos compactos;

2. sea $X = \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{S}^n - \{x\}$. El espacio $\{\overline{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^n : r \in \mathbb{R}^+\}$ de las bolas cerradas centradas en el origen, es un sistema cofinal de compactos. Para $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n - \{x\}$ el homeomorfismo usual. Con las notaciones del problema 12.3 del capítulo 12, se obtiene

$$H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \overline{B}_r(0); \mathbb{Z}) \simeq H^q(\mathbb{S}^n - \{x\}, \mathbb{S}^n - (\{x\} \cup f(\overline{B}_r(0)); \mathbb{Z}) \simeq$$
$$H^q(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n - f(\overline{B}_r(0)); \mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H^q}(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}).$$

Y entonces

$$H^q_C(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}) = \varinjlim\{H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \overline{B}_r(0); \mathbb{Z})) : r \in \mathbb{R}^+\} = \widetilde{H^q}(\mathbb{S}; \mathbb{Z}).$$

Observación 11.74 Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua y $K \subset X$ compacto, entonces $f(K) \subset Y$ es compacto, pero en general $f(X - K) \not\subset Y - f(K)$, es decir, f no induce ninguna aplicación $H^q(Y, Y - f(K); \mathbb{Z}) \to H^q(X, X - K; \mathbb{Z})$, y en general tampoco induce ninguna aplicación $H^q_C(Y;\mathbb{Z}) \to H^q_C(X;\mathbb{Z})$.

Sean o una R-orientación de M, $K \subset M$ compacto y $o_K \in H_n(M, M - K; \mathbb{Z})$ la única clase que le corresponde según el lema 11.67. El producto cap con o_K produce un homomorfismo

$$- \cap o_K\colon H^q(M, M - K; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-q}(M;\mathbb{Z}), \qquad a \to a \cap o_K.$$

Por la naturalidad del producto cap, los homomorfismos así definidos para diferentes conjuntos compactos son compatibles en el siguiente sentido: si K_1 y K_2 son compactos y $K_1 \subset K_2$, entonces si $f\colon H^q(M, M - K_1) \longrightarrow H^q(M, M - K_2)$ es una aplicación, se verifica que $(- \cap o_{K_1}) = (- \cap o_{K_2}) \circ f$. Pero, por las propiedades básicas de los límites directos

Definición 11.75 Una tal familia compatible de homomorfismos induce un homomorfismo del límite directo,

$$P\colon H^q_c(M;\mathbb{Z}) = \varinjlim \quad H^q(M, M - K; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-q}(M;\mathbb{Z}),$$

que se llama *homomorfismo de Poincaré*.

Y se deduce el **teorema de Mayer-Vietoris relativo en cohomología**

Teorema 11.76 *Sea X un espacio topológico, $A, B \subset X$, de modo que A y B son abiertos en $A \cup B$. Entonces, existe la sucesión exacta larga*

$$H^q(X, A \cup B; \mathbb{Z}) \to H^q(X, A; \mathbb{Z}) \oplus H^q(X, B; \mathbb{Z}) \to H^q(X, A \cap B; \mathbb{Z}) \to H^{q+1}(X, A \cup B; \mathbb{Z})$$

Lema 11.77 *El límite directo* $\varinjlim$ *es un functor exacto.*

Y usando el teorema 11.76 y el lema 11.77, se concluye el **teorema de dualidad de Poincaré**

Teorema 11.78 *Sea* M *una variedad de dimensión* n *y orientable. Entonces el homomorfismo de Poincaré,* $P\colon H_c^q(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-q}(M;\mathbb{Z})$ *es un isomorfismo, para cada* q*.*

11.6 Otros teoremas de dualidad

11.6.1 La dualidad módulo 2

La versión mod 2 del teorema de dualidad de Poincaré es más débil puesto que sólo se aplica a la homología y cohomología de grupos con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Pero tiene la ventaja de que se aplica a todas las variedades, orientables o no.

Si M es una variedad de dimensión n arbitraria, para cada $x \in M$, sea o_x el único elemento no nulo del grupo de homología local $H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}_2)$ y para cada compacto $K \subset M$ sea o_K el único elemento de $H_n(M, M - K; \mathbb{Z}_2)$ que le corresponde para cada $x \in K$, según el lema 11.67.

Sea G un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$. Se define el homomorfismo

$$- \cap o_K\colon H_n(M, M - K; G) \longrightarrow H_{n-q}(M; G)$$

por la fórmula $(- \cap o_K)(x) = x \cap o_K$, usando el isomorfismo natural $G \otimes \mathbb{Z}_2 \simeq G$ para definir este producto cap. Los homomorfismos así definidos para cada compacto K son compatibles, y queda definido un homomorfismo sobre el grupo límite directo, $P_2\colon H_c^q(M; G) \longrightarrow H_{n-q}(M, G)$, que es el homomorfismo (mod 2) de Poincaré.

Teorema 11.79 *Para cada variedad* M *de dimensión* n *y cada* $\mathbb{Z}_2$*-espacio vectorial* G*,* P_2 *es un isomorfismo.*

11.6.2 La dualidad sobre variedades cerradas. Dualidad de Lefschetz

Definición 11.80 Una *variedad de dimensión* n con borde es un espacio de Hausdorff M, en que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ o al semiespacio

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Si $x \in M$ corresponde por un tal homeomorfismo a un punto $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ con $x_n = 0$, entonces por excisión se tiene

$$H_n(M, M - \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+ - \{x\}) = 0,$$

y si x corresponde a $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ con $x_n > 0$ o a un punto de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$H_n(M, M - \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) = \mathbb{Z}.$$

Definición 11.81 Los puntos de M con $H_n(M, M - \{x\}) = 0$ forman un subespacio ∂M bien definido, el *borde de* M, que es una variedad de dimensión $n - 1$, con frontera vacía. Por ejemplo, $\partial\mathbb{R}^n_+ \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ y $\partial\mathbb{D}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Definición 11.82 Si M es una variedad con borde ∂M, un *entorno collar* de ∂M es un entorno abierto homeomorfo a $\partial M \times [0, 1)$, a través de un homeomorfismo que lleva ∂M en $\partial M \times \{0\}$.

Proposición 11.83 *Si M es compacta con borde, ∂M posee un entorno collar.*

Observación 11.84 Más en general, se pueden construir collares para los bordes de variedades paracompactas.

Definición 11.85 Una variedad compacta con borde M se dice *R-orientable* si $M - \partial M$ es R-orientable como variedad sin borde.

Si $\partial M \times [0, 1) \subset M$ es un entorno collar de ∂M, entonces $H_q(M, \partial M; R)$ es naturalmente isomorfo a $H_q(M - \partial M, \partial M \times (0, 1/2); R)$. Así, si M es R-orientable, tenemos una clase fundamental relativa $z_\partial \in H_n(M, \partial M; R)$, por restricción a una orientación dada en cada punto de $M - \partial M$.

Así, se puede generalizar la dualidad de Poincaré a variedades cerradas

Teorema 11.86 *Sea M una variedad de dimensión n, compacta y R-orientable, cuyo borde ∂M se descompone en la unión de dos variedades A y B de dimensión $n - 1$, compactas, tales que $A \cap B = \partial A = \partial B$. Entonces, el producto cap por una clase fundamental $z_\partial \in H_n(M, \partial M; R)$ define isomorfismos $D^q_M \colon H^q(M, A; R) \longrightarrow H_{n-q}(M, B; R)$, para cada q.*

Observación 11.87 En el anterior teorema, no se excluye el caso en que A, B ó $A \cap B = \emptyset$. Los casos en que A ó $B = \emptyset$ se suelen llamar *dualidad de Lefschetz*.

11.6.3 Cohomología de Čech

Hay una manera de extender estos teoremas de dualidad, reemplazando la cohomología singular por otra cohomología llamada *cohomología de Čech*. Esta cohomología se define del modo siguiente

Definición 11.88 A cada $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ cubrimiento abierto de un espacio X, se le asocia un complejo simplicial $N(\mathcal{U})$ llamado *nervio* de $\mathcal{U}$, donde

(i) a cada abierto U_α, se le asocia un vértice v_α,

(ii) un conjunto de $k+1$ vértices $\{v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{k+1}}\}$ define un k-símplice, siempre que los $k+1$ abiertos correspondientes $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_{k+1}}\}$ tengan intersección no vacía.

Si otro cubrimiento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, cada V_β está contenido en algún U_α y estas inclusiones inducen una aplicación simplicial $N(\mathcal{V}) \to N(\mathcal{U})$ que está bien definida, salvo homotopía. Se puede entonces formar el límite directo $\underrightarrow{\lim} H^q(N(\mathcal{U}); G)$ con respecto a cubrimientos abiertos cada vez más finos. El grupo límite es por definición el *grupo de cohomología de Čech*, $\check{H}^q(X; G)$.

Observación 11.89 Con una definición análoga de grupos relativos, la cohomología de Čech verifica los mismos axiomas que la cohomología singular.

Para espacio homotópicamente equivalentes a CW-complejos, la cohomología de Čech coincide con la cohomología singular, pero para espacios con anomalías locales, esta cohomología resulta en general más razonable

Ejemplo 11.90 Si X es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que consiste en la unión de las circunferencias $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S\left(\left(\frac{1}{n}, 0, 0\right), \frac{1}{n}\right)$, contrariamente a lo que se pudiera esperar es $H^3(X; \mathbb{Z}) \neq 0$. Pero, $\check{H}^3(X; \mathbb{Z}) = 0$ y $\check{H}^2(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\infty$ suma directa de una familia contable de copias de $\mathbb{Z}$. Sin embargo, los correspondientes grupos de homología de Čech definidos usando límites inversos, no se comportan tan bien, porque el axioma de exactitud falla, pues el límite inverso de sucesiones exactas no es necesariamente una sucesión exacta. Pero, hay una manera de salvar este problema, usando una definición más refinada, que es la teoría de *homología de Steenrod*.

Existen muchas más teorías de homología y cohomología, adaptadas a diversas situaciones. Y para cada una de ellas, se pueden dar los correspondientes teoremas de dualidad.

Algunos ejercicios

En las noches claras,
resuelvo el problema de la soledad del ser.
Invito a la luna y con mi sombra somos tres.

"En las noches claras"
Gloria Fuertes (1917-1998)

12.1 Números de Betti y característica de Euler

La característica de Euler-Poincaré de un espacio topológico es un poderoso invariante que tiene numerosas aplicaciones fuera del ámbito de la topología, por ejemplo

1. sólo las esferas impares admiten campos de vectores que no se anulan. Estas son justo las esferas con característica de Euler-Poincaré nula. Se puede definir la noción de campo de vectores sobre una variedad diferenciable X (la diferenciabilidad se precisa para poder hablar de vectores tangentes). Si X es compacto y conexo, existe un campo de vectores tangente no nulo si y sólo si $\chi(X) = 0$. Luego, para superficies compactas, sólo $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{K}^2$ poseen un tal campo de vectores. Si X es de dimensión impar y compacta, siempre admite uno. Con argumentos de geometría diferencial, se prueba que si X no es compacto, siempre admite un tal campo de vectores;

2. una clase un poco más general de característica de Euler juega un papel clave en el teorema de Riemann-Roch para variedades algebraicas proyectivas no singulares.

Si G es un grupo abeliano finitamente generado, se sabe que los elementos de orden finito en G constituyen el subgrupo de torsión T y que el grupo cociente G/T es abeliano libre. El número minimal de generadores de G/T es el *rango* de G.

El rango de $H_n(X;\mathbb{Z})$ (para aquellos espacios X en que los que tenga sentido esta definición) se llama *n-ésimo número de Betti*, $\beta_n(X)$, de X. Si $H_n(X;\mathbb{Z})$ es un grupo abeliano libre, está caracterizado por su rango; en otro caso, hay más información contenida en el grupo de homología.

Se define también la *característica de Euler*, $\chi(X)$, por la fórmula

$$\chi(X) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\beta_n(X),$$

cuando esta suma es finita.

Estos dos números son, por supuesto, invariantes topológicos. Se pide

(i) calcular los números de Betti y la característica de Euler de $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$, la rosa de r pétalos y la superficie compacta de género g;

(ii) dada una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} \ldots \xrightarrow{i_{n-1}} A_n \longrightarrow 0,$$

probar que $rg(A_1) - rg(A_2) + \ldots + (-1)^{n+1}rg(A_n) = 0$;

(iii) si Z se obtiene a partir de Y adjuntándole una n-celda y $\chi(Y)$ está definido, entonces $\chi(Z) = \chi(Y) + (-1)^n$;

(iv) aditividad de la característica de Euler: si X es un espacio topológico, $A, B \subset X$ y $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ (condición de Mayer-Vietoris), entonces si $\chi(X)$, $\chi(A)$, $\chi(B)$ y $\chi(A\cap B)$ están definidos, es $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A\cap B)$;

(v) si X es un poliedro regular en el espacio de dimensión tres (homeomorfo a $\mathbb{S}^2$), se divide su superficie en triángulos de modo que si dos de ellos se cortan, lo hacen en un vértice o una arista común. Si F es el número de caras, E el de aristas y V el de vértices, entonces $V - E + F = 2$: éste es un viejo teorema de Euler;

(vi) si R es un dominio de ideales principales, los resultados sobre grupos abelianos se pueden generalizar a módulos sobre R. Y se puede definir

$$\chi(X;R) = \sum_{q\geq 0}(-1)^q H_q(X;R).$$

Probar que si las características de Euler $\chi(X;R)$ y $\chi(Y;R)$ están definidas, entonces $\chi(X\times Y;R)$ está también definida y $\chi(X\times Y;R) = \chi(X;R)\chi(Y;R)$.

12.2 Teorema del punto fijo de de Lefschetz

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, con base $\{v_1,\ldots,v_n\}$ y sea $\psi\colon V\longrightarrow V$ una aplicación lineal dada por $\psi(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j$. Sea $tr(\psi) = \sum_{j=1}^{n} a_{ii}$ la *traza* de ψ (que no depende de la base elegida). Sean X un espacio topológico y $f\colon X\longrightarrow X$ una aplicación continua. Para $n\in\mathbb{N}$, sea

$$\lambda_n(f) := tr\left(H_n(f)\colon H_n(X;\mathbb{R})\longrightarrow H_n(X;\mathbb{R})\right).$$

Se define el *índice de Lefschetz* de f por $\lambda(f) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \lambda_n(f) \in \mathbb{R}$. Se pide probar

(i) los anteriores números están bien definidos, es decir, no dependen de las bases elegidas;

(ii) $\lambda_n(id_X) = \beta_n(X)$ y $\lambda(id_X) = \chi(X)$;

(iii) si $f, g: X \longrightarrow X$ son aplicaciones homótopas, entonces $\lambda(f) = \lambda(g)$;

(iv) si $c: X \longrightarrow X$ es una aplicación constante, es $\lambda(c) = 1$;

(v) *teorema del punto fijo de Lefschetz:* Sea X un poliedro compacto y $f: X \longrightarrow X$ tal que $\lambda(f) \neq 0$. Entonces, f tiene un punto fijo.

12.3 Espacios asféricos

Sea $(\mathcal{C}_*, d)$ un complejo de cadenas, con $C_n = 0$ si $n < 0$. Se define

Definición 12.1 Una *aumentación* sobre el anillo R para el complejo $\mathcal{C}_*$ es un epimorfismo $\varepsilon: C_0 \longrightarrow R$, tal que $\varepsilon \circ \delta_1 = 0$ y $C_0/Ker(\varepsilon) \simeq R$.

Dado un complejo de cadenas $(\mathcal{C}_*, d)$ con aumentación $\varepsilon: C_0 \longrightarrow R$, se puede formar el complejo de cadenas reducido $(\widetilde{\mathcal{C}}_*, \widetilde{d})$, tomando $\widetilde{C_q} = C_q$ si $q \geq 1$, $\widetilde{C_0} = Ker(\varepsilon)$ y $\widetilde{d_q} = d_q$. Como $Im(d_1) \subset Ker(\varepsilon)$, se tiene $\widetilde{d_1}: \widetilde{C_1} \longrightarrow \widetilde{C_0}$.

Definición 12.2 Un complejo de cadenas con aumentación es *acíclico* si el complejo de cadenas reducido lo es, es decir, si $Im(d_{q+1}) = Ker(d_q)$ e $Im(d_1) = Ker(\varepsilon)$.

Se pide probar la siguiente propiedad

Proposición 12.3 *Un complejo $(\mathcal{C}_*, d)$ con aumentación $\varepsilon: C_0 \longrightarrow R$, es acíclico si y sólo si $H_q(\mathcal{C}) = 0$ para $q > 0$ y $H_0(\mathcal{C}) \simeq R$.*

Definición 12.4 Un espacio X es *asférico* si toda función continua $f: \mathbb{S}^n \longrightarrow X$ se extiende al disco $\overline{f}: \mathbb{D}^{n+1} \longrightarrow X$. Para $n = 0$, la propiedad dice simplemente que X es conexo por caminos.

Ejemplos 12.5 Algunos ejemplos de espacios asféricos son

1. un convexo X en un espacio euclídeo: sea $p \in X$; representamos los puntos de $\mathbb{D}^{n+1}$ por coordenadas polares (t, x) con $0 \leq t \leq 1$, $x \in \mathbb{S}^n$ y $(0, x) = (0, x')$ es el origen. Los puntos de $\mathbb{S}^n$ tienen coordenadas $(1, x)$. Dada $f: \mathbb{S}^n \longrightarrow X$, definimos $\overline{f}: \mathbb{D}^{n+1} \longrightarrow X$ por $\overline{f}(t, x) = (1 - t)p + tf(x)$;

2. un espacio contráctil X: sea $H: X \times [0, 1] \longrightarrow X$ la homotopía que contrae, es decir, para $x \in X$ es $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = p$ para algún punto fijo $p \in X$. Se define entonces $\overline{f}: \mathbb{D}^{n+1} \longrightarrow X$ por $\overline{f}(t, x) = H(f(x), 1 - t)$;

3. la curva seno topológico $S = \left\{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ junto con un arco de curva que va de $(0, -1)$ a $(1, \text{sen}1)$ (y sólo corta a S en estos puntos) es asférica, pero no es contráctil.

Se pide probar la siguiente propiedad

Teorema 12.6 *Si X es un espacio asférico, entonces $S_*(X; \mathbb{Z})$ es acíclico.*

12.4 Homología reducida

Dado un espacio topológico X, el R-módulo $H_0^\sharp(X; R)$ se obtiene al considerar un operador borde diferente sobre las 0-cadenas: $\partial_0^\sharp(\sum_x n_x \nu_x) = \sum\limits_x \nu_x$. Con esta definición, se verifica que $\partial_0^\sharp \partial_1 = 0$, y se define la *homología reducida* de X por

$$H_0^\sharp(X; R) = Ker(\partial_0^\sharp)/Im(\partial_1) \quad \text{y para} \quad q > 0, \quad H_q^\sharp(X) = H_q(X).$$

Se pide probar

(i) si X es conexo por caminos, entonces $H_0^\sharp(X; R) = 0$;

(ii) si X tiene k componentes conexas, $H_0^\sharp(X; R)$ es un R-módulo libre con $(k-1)$ generadores.

12.5 Homología de un ejemplo de complejo de cadenas

Sea $(\mathcal{C}_*, d)$ un complejo de cadenas tal que

$$H_n(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z}_3 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Probar que

$$H_n(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } n = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{si } n > 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad H_n(\mathcal{C}; \mathbb{Z}_3) = \begin{cases} \mathbb{Z}_3 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z}_3 & \text{si } n = 2, 3 \\ 0 & \text{si } n > 3 \end{cases}$$

12.6 Algunos ejemplos de homología de espacios

Demostrar que

Lema 12.7 *Para la k-esfera $\mathbb{S}^k$, $H_n(\mathbb{S}^k;\mathbb{Z})$ es libre en cualquier dimensión.*

Deducir la siguiente propiedad

Proposición 12.8 *Sea Y un espacio topológico, entonces*

$$H_n(\mathbb{S}^k \times Y;\mathbb{Z}) \simeq H_n(Y;\mathbb{Z}) \oplus H_{n-k}(Y;\mathbb{Z}).$$

Usando esta propiedad, calcular las homologías de

(i) $\mathbb{T}^2$ y el toro generalizado;

(ii) $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{S}^3$ y $\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{S}^2$: sus grupos fundamentales son isomorfos, pero sus grupos de homología no lo son, de lo que se deduce que no tienen el mismo tipo de homotopía;

(iii) $\mathbb{CP}^3$ y $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^2$: sus grupos fundamentales no son isomorfos, aunque si lo son sus grupos de homología.

12.7 El teorema de separación de Jordan-Brouwer

Probar las siguientes propiedades, consecuencias del teorema de separación de Jordan-Brouwer

(i) si A es una $(n-1)$-esfera embebida en $\mathbb{R}^n$ (donde $n \geq 2$), entonces $\mathbb{R}^n - A$ tiene exactamente dos componentes conexas, una de las cuales es acotada y la otra no. La componente acotada es acíclica y la no acotada posee la misma homología que $\mathbb{S}^{n-1}$;

(ii) **invarianza del dominio**: si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $V \subset \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a U, entonces V es también abierto;

(iii) **invarianza de la dimensión**: si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos homeomorfos, entonces $m = n$.

12.8 ¿Es mejor la cohomología que la homología?

Sea la unión por un punto de dos copias de $\mathbb{S}^1$ y una copia de $\mathbb{S}^2$, es decir, $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$. El espacio así obtenido X es conexo, por lo que $H_0(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Para $n > 0$ es fácil ver que

$$H_n(X;\mathbb{Z}) \simeq H_n(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \oplus H_n(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \oplus H_n(\mathbb{S}^2;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n > 2 \end{cases}.$$

Luego X tiene la misma homología que el toro $\mathbb{T}^2$, es decir, es un *toro homológico*.

¿Es X homotópicamente equivalente al toro? Usando sólo homología, no se puede responder a esta pregunta, pero la cohomología resulta muy útil en este caso, se pide probar

Proposición 12.9 *En calidad de anillos graduados $H^*(X;\mathbb{Z})$ y $H^*(\mathbb{T}^2;\mathbb{Z})$ no son isomorfos.*

Y de lo anterior, se deduce que X e $\mathbb{T}^2$ no son homotópicamente equivalentes.

12.9 ¿Por qué la dualidad?

¿Por qué no es $H_p(X;\mathbb{Z}) \simeq H_{n-p}(X;\mathbb{Z})$, en vez del isomorfismo $H_p(X;\mathbb{Z}) \simeq H^{n-p}(X;\mathbb{Z})$?

La dualidad de Poincaré es *casi* el isomorfismo $H_p(X;\mathbb{Z}) \simeq H_{n-p}(X;\mathbb{Z})$, excepto porque existen espacios orientables *"con torsión"*. Estos espacios tienen una especie de propiedad de *autoenrollamiento*. Entre estos espacios, los más sencillos son los espacios lenticulares $L(p,q)$, con p y q enteros relativamente primos: sea la esfera $\mathbb{S}^3$ considerada como subconjunto del plano complejo

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

y el homeomorfismo $h\colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3$, definido por $h(z_1,z_2) = (z_1.e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2.e^{\frac{2\pi iq}{p}})$. Se comprueba fácilmente que que $h^p = 1_{\mathbb{S}^3}$. El grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ opera sobre $\mathbb{S}^3$ por

$$n.(z_1,z_2) = h^n(z_1,z_2) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{Z}_p.$$

La aplicación cociente $p\colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ es un revestimiento y el espacio cociente $L(p,q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$, se llama *espacio lenticular*. Se pide probar

(i) el grupo fundamental de $L(p,q)$ es cíclico de orden p;

(ii) $L(2,1)$ es el plano proyectivo real de dimensión 3, $\mathbb{RP}^3$;

(iii) para estos espacios es

$$H_n(L(p,q);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0,3 \\ \mathbb{Z}_p & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Pero

$$H^m(L(p,q);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0,3 \\ \mathbb{Z}_n & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, es $H_1(L(p,q);\mathbb{Z}) \simeq H^2(L(p,q);\mathbb{Z})$, pero $H_1(L(p,q);\mathbb{Z}) \not\simeq H_2(L(p,q);\mathbb{Z})$.

Bibliografia

[AB] E. Artin and H. Braun, *Introduction to Algebraic Topology*, Merry Publ. Co., 1969.

[ADQ] R. Ayala, A. Dominguez y A. Quintero, *Elementos de teoría de homología clásica*, Pub. Universidad de Sevilla, 2002.

[BBIF] Y. Borisovich, N. Blinznyakov, Y. Izrailevich and T. Fomenko, *Introduction to Topology*, Mir, 1985.

[Br] G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, 1993.

[BRS] S. Buoncristiano, C.P. Rourke and B.J. Sanderson, *A geometric approach to homology theory*, Cambridge, 1976.

[CH] A. Cavicchioli y F. Hegenbarth, *Lezioni di Topologia Algebrica e differenziale*, Pitagora, 1997.

[CC] J.M. Cohen y F. Colonna, *Introduzione alla Topologia Algebrica*, Mediterranean Press, 1990.

[DK] J.F. Davis and P. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics 35, A.M.S., 2001.

[De] S. Deo, *Algebraic topology: a primer*, Hindustain Book Agency, 2003.

[Di] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differerential topology 1900-1960*, Birkhäuser, 1989.

[DP] C.J.J. Dodson and P.E. Parker, *A user's guide to Algebraic Topology*, Kluwer, 1997.

[Do] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1980.

[ES] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952.

[ET] L. Evens and R. Thomson, *Algebraic Topology*, New York University Press, 2001.

[F] W. Fulton, *Algebraic Topology: a first course*, Springer, 1995.

[God] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, 1998.

[GH] M.J. Greenberg y J. Harper, *Algebraic topology: a first course,* Addison Wesley, 1981.

[Ha] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

[HY] J.G. Hocking and G.S. Young, *Topology*, Dover, 1961.

[J] I.M. James (editor), *History of Topology*, North-Holland, 1999.

[Law] T. Lawson, *Topology: a geometric approach*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 9, Oxford University Press, 2003.

[Lee] J.M. Lee, *Introduction to topological manifolds,* Graduate Texts in Maths 202, Springer, 2000.

[Lef] S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, AMS Colloquium Publications 27, 1991.

[Mas1] W.S. Massey, *Singular homology theory*, Springer, 1980.

[Mas2] W.S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Reverté, 1982.

[Mau] C.R.F. Maunder, *Algebraic topology*, Dover, 1996.

[May] J.P. May, *A concise course in Algebraic Topology*, Chicago Lecture Mathematical Series, 1999.

[McL] S. McLane, *Homology*, Springer, 1963.

[Mu] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[Nak] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics,* IOP Publ., 1990.

[NS] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicists*, Academic Press, 1983.

[NP] V. Navarro y P. Pascual, *Topologia Algebraica*, Col-lecció UB 34, 1999.

[P] J.C. Pont, *Topologie algébrique des origines à Poincaré,* Presses Universitaires de France, 1974.

[R] J.J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Springer, 1988.

[ST] I.M. Singer and J.A. Thorpe, *Lecture Notes on elementary topology and geometry*, Springer, 1976.

[Sp] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw Hill, 1966.

[Vi] J.W. Vick, *Homology theory: an introduction to algebraic topology*, Springer, 1994.

[Wa1] A.H. Wallace, *An introduction to algebraic topology*, Pergamon Press, 1957.

[Wa2] A.H. Wallace, *Algebraic Topology*, W.A. Benjamin Inc., 1970.

[Z] M. Zisman, *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Collin, 1972.