Grafos de grupos transversos en espacios foliados

Marta Macho Stadler (UPV–EHU)*

Existen numerosos invariantes algebraicos y analíticos asociados a espacios foliados. Nuestro trabajo se centra en la representación de la estructura transversa de una foliación por medio de diferentes grupoides equivalentes, que permiten a su vez definir otros invariantes C*-algebraicos y K-teóricos.

En este póster estudiamos la dinámica transversa de algunos ejemplos de foliaciones, a través de grafos de grupos transversos, Morita–equivalentes al grupoide de holonomía de la foliación.

1. DEFINICIONES

DEF 1 Un grafo orientado es una 4-tupla $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, s, r)$, donde:

(i) Γ^0 y Γ^1 son los vértices y las aristas, respectivamente;

(ii) las aplicaciones de incidencia $s, r : \Gamma^1 \longrightarrow \Gamma^0$ asocian a cada arista $a \in \Gamma^1$, su origen $s(a) \in \Gamma^0$ y extremo $r(a) \in \Gamma^0$.

Γ es localmente finito, si sus vértices tienen valencia (cardinal de sus aristas de incidencia) finita.

DEF 2 Sea Γ un grafo orientado, donde Γ^0 y Γ^1 están provistos de la topología discreta.
Sobre la unión disjunta $T = \Gamma^0 \bigsqcup (\Gamma^1 \times [0,1])$, se considera la relación de equivalencia:

$$s(a) \sim (a,0) \quad \text{y} \quad r(a) \sim (a,1), \quad a \in \Gamma^1.$$

El cociente $R(\Gamma) = T/\sim$, es la realización topológica de Γ.

DEF 3 Un grafo localmente finito y orientado de grupos es:

(i) un grafo $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, s, r)$ localmente finito y orientado,

(ii) para cada $s \in \Gamma^0$ y $a \in \Gamma^1$, existen grupos G_s y H_a y homomorfismos entre ellos:

$$S_a : H_a \longrightarrow G_{s(a)} \quad \text{y} \quad R_a : H_a \longrightarrow G_{r(a)}.$$

2. TRABAJO PREVIO

En [HM], se asocia de manera canónica a toda foliación casi sin holonomía de tipo finito $(M, \mathcal{F})$, un grafo finito y orientado de grupos abelianos de tipo finito, $\Gamma(\mathcal{F})$ (el grafo de la foliación), que es Morita–equivalente al grupoide de holonomía de $\mathcal{F}$.

Este grafo puede interpretarse (es consecuencia de su construcción) como un grupoide transverso relativamente a una cierta transversal total a la foliación.

Siguiendo [HM], damos dos ejemplos sencillos del grafo de una foliación:

(EJ1) La foliación de Reeb $(\mathbb{S}^3, \mathcal{R})$ tiene una única hoja compacta $C \simeq \mathbb{T}^2$ y $\mathbb{S}^3 - C$ posee dos componentes conexas U_1 y U_2.

El grafo de la foliación posee una arista única (la hoja C) y dos vértices (los abiertos U_1 y U_2). Los grupos que definen el grafo son:

(i) sobre el vértice U_i (para $i = 1, 2$), $G_{U_i} \simeq \mathbb{Z}$ es el grupo de holonomía de la foliación inducida $(U_i, \mathcal{F}_{U_i})$ (un fibrado);

(ii) $H_C \simeq \mathbb{Z}^2$ es el grupo de holonomía de C.

Los homomorfismos del grafo, que expresan la contribución de cada componente conexa a la holonomía de C, son:

(1) $R_C : H_C \longrightarrow G_{U_1}$, donde $R_C(m,n) = n$, y

(2) $S_C : H_C \longrightarrow G_{U_2}$, donde $S_C(m,n) = m$.

(EJ2) Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre el toro $\mathbb{T}^2$, con una única hoja compacta $C \simeq \mathbb{S}^1$ y el resto de las hojas rectas, obtenida por suspensión de un homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$, con un único punto fijo. $\mathbb{T}^2 - C$ tiene una única componente conexa U.

El grafo de esta foliación consiste en una arista única (la hoja C) y un solo vértice (el abierto U). Los grupos que definen el grafo representan:

(i) sobre el vértice U, $G_U \simeq \mathbb{Z}$ el grupo de holonomía de la foliación inducida $(U, \mathcal{F}_U)$ (foliación sin holonomía);

(ii) $H_C \simeq \mathbb{Z}$ es el grupo de holonomía de la hoja compacta C.

El homomorfismo del grafo es la identidad $R_C : H_C \longrightarrow G_U$.

3. TRABAJO EN MARCHA

Nuestro interés es generalizar este tipo de resultados a foliaciones arbitrarias, con el siguiente plan de trabajo:

(1) asociar a ciertos espacios foliados $(M, \mathcal{F})$ un (o un límite inductivo de) grafo localmente finito y orientado de grupos;

(2) este grafo representaría el grupoide de holonomía de una transversal completa y, así, sería Morita–equivalente al grupoide de holonomía de $\mathcal{F}$;

(3) la realización topológica M_Γ de este grafo proporcionaría un espacio topológico provisto de una relación de equivalencia $\sim_\Gamma$ inducida por los grupos definiendo el grafo. Obtendríamos así una laminación $(M_\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma)$, de estructura más sencilla que $(M, \mathcal{F})$, y por equivalencia de Morita, consegiríamos información, entre otros, sobre la C*-álgebra de la foliación $C^*(M, \mathcal{F})$.

Hemos comenzado este plan de trabajo intentando completar los casos no resueltos en [HM] para las foliaciones casi sin holonomía. Posteriormente, sustituiremos los grupos abelianos por grupos mediables (y grupos más generales) e investigaremos ejemplos de foliaciones conocidas.

BIBLIOGRAFÍA

[C] A. Connes, Non commutative Geometry, Academic Press, 1994.

[HH] G. Hector and U. Hirsch, Introduction to the Geometry of Foliations (A and B), Friedr. Vieweg and Sohn, 1986 and 1987.

[HM] G. Hector et M. Macho Stadler, *Isomorphisme de Thom pour les feuilletages presque sans holonomie*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences, Série I, 325 (9), 1015-1018, 1997.

*Trabajo parcialmente financiado por proyecto **UPV–EHU 00127.310-E-15916**

XIV ENCUENTRO DE OTOÑO DE GEOMETRÍA Y FÍSICA