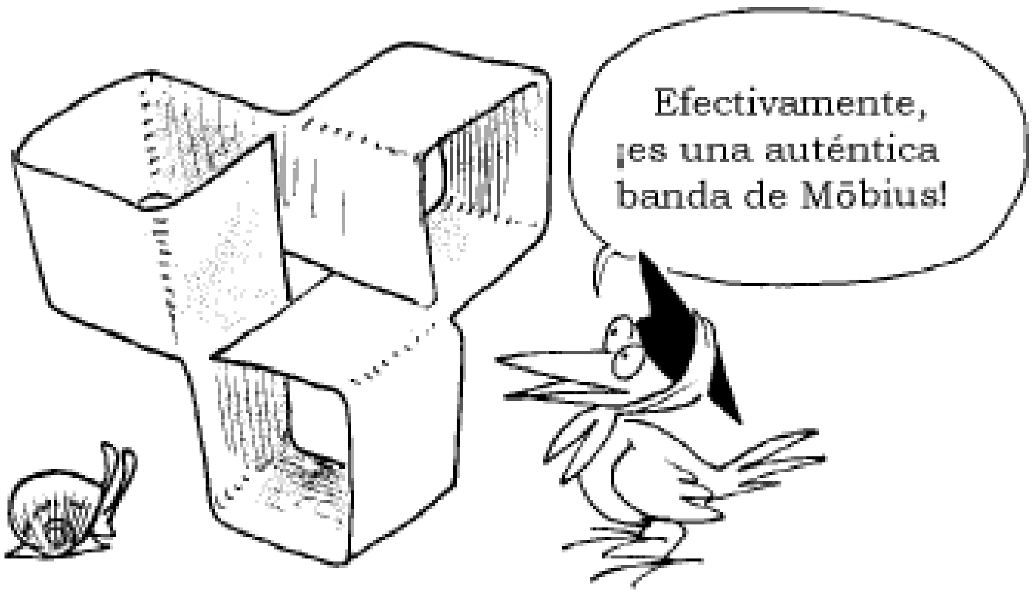
LECCIONES DE TOPOLOGÍA

Managua, Enero de 2008



Prof. Marta Macho Stadler

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: *marta.macho@ehu.es*
http://www.ehu.es/~mtwmastm
Tlf: +34-946015352 Fax: +34-946012516

Índice general

Introducción

Entre lo que veo y digo,
entre lo que digo y callo,
entre lo que callo y sueño,
entre lo que sueño y olvido,
la poesía.

"Decir: hacer"
Octavio Paz (1914-1998)

La Topología estudia aquellas propiedades de los espacios que permanecen inalterables al someterlas a deformaciones *continuas*, es decir, a distorsiones que ni *rompen* ni *pegan* algo que no lo estaba previamente.

Por ejemplo, el carácter circular de una circunferencia no es una propiedad topológica: se pueden pegar las extremidades de una cuerda para hacer una circunferencia, y sin cortar ni despegar, deformar esta figura en un cuadrado, una elipse, etc. Pero, la cualidad de *no tener extremidades* permanece constante durante estas transformaciones.

Se suele bromear, comentando que las personas que se dedican al estudio de la topología no distinguen la rosquilla de la taza de café:, como se muestra en la figura de debajo:

en efecto, hemos pasado de la rosquilla a la taza sin realizar ni roturas ni cortes: ha sido una transformación topológica.

La topología es pues *matemática cualitativa*, matemática sin números: trata de propiedades cualitativas intrínsecas de los espacios, que son independientes de su tamaño, posición y forma.

Los *espacios métricos* son los primeros ejemplos de espacios topológicos, los que primero surgieron en el estudio cualitativo de espacios: generalizan las propiedades de los espacios euclídeos, donde sabemos *medir* la distancia entre dos puntos dados.

En este texto, se trata de dar una introducción a la Topología, a través de la teoría de espacios métricos: aunque son un caso especialmente sencillo de espacios topológicos, se hace una revisión de sus propiedades topológicas más importantes, intentando dar una visión más *topológica* que *métrica* en los enunciados y las demostraciones.

El curso está organizado en siete capítulos.

El primero de ellos recopila aquellos preliminares sobre teoría de conjuntos y lógica matemática que son necesarios para una buena comprensión del texto.

Los siguientes cinco capítulos estudian las propiedades más importantes de espacios métricos: sólo están demostrados aquellos enunciados cuya prueba no es trivial, se han incluido una gran cantidad de ejemplos y cada capítulo finaliza con una amplia colección de ejercicios, donde los más complicados están marcados con el símbolo ♣.

El último capítulo se dedica al estudio de espacios normados y espacios de funciones, especialmente destacados en análisis real y complejo.

La bibliografía indicada se refiere en su mayoría a textos sobre espacios métricos, aunque aparecen también algunos libros dedicados a los espacios topológicos en general, donde se puede continuar el estudio iniciado en este curso.

Managua, enero de 2008

Repaso de algunos conceptos matemáticos

Y aquí estoy yo, brotado entre las ruinas,
mordiendo solo todas las tristezas,
como si el llanto fuera una semilla
y yo el único surco de la tierra.

"Barrio sin luz"
Pablo Neruda (1904-1973)

1.1. Un poco de Lógica

La Lógica es una herramienta básica en Matemáticas; damos aquí un repaso de algunos conceptos fundamentales.

1.1.1. Símbolos y conectores

En Matemáticas, es fundamental la utilización de símbolos y conectores que sirven para modificar o combinar sentencias.

Definición 1.1. Los siguientes símbolos se llaman *cuantificadores*:

1) el *cuantificador universal*: $\forall$ (para todo);

2) el *cuantificador existencial*: $\exists$ (existe).

Definición 1.2. También es esencial el uso de los *conectores*:

1) la *negación*: no;

2) la *conjunción*: $\wedge$ (y);

3) la *disyunción*: $\vee$ (o);

4) la *implicación*: $\Longrightarrow$ (si –, entonces);

5) la *doble implicación*: $\Longleftrightarrow$ (si y sólo si o equivale).

El manejo es sencillo, pero es preciso tener cuidado al utilizarlos. Por ejemplo, si $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son propiedades relativas a los elementos de un conjunto X, para expresar que x cumple $\mathfrak{P}$, se escribirá $\mathfrak{P}(x)$. Y entonces:

Proposición 1.1. $\mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x)$, *significa una de las tres posibilidades (mutuamente excluyentes) siguientes:*

(i) $\mathfrak{P}(x)$ *y* $\mathfrak{Q}(x)$*;*

(ii) $\mathfrak{P}(x)$ *y no-*$\mathfrak{Q}(x)$*;*

(iii) no-$\mathfrak{P}(x)$ *y* $\mathfrak{Q}(x)$.

Proposición 1.2. *¿Cómo se niega una proposición?*

1) no-$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ *es lo mismo que decir que* $(\exists x \in X :$ *no-*$\mathfrak{P}(x))$.

2) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x))$ *equivale a* $(\forall x \in X,$ *no-*$\mathfrak{P}(x))$.

3) no$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$ *es lo mismo que decir que* $(\exists x \in X :$ *no-*$\mathfrak{P}(x)$ *o no-*$\mathfrak{Q}(x))$.

4) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x) \Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$ *es equivalente a* $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \not\Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$.

En general, cuando aparecen varios cuantificadores en un enunciado, el orden en el que se escriben no importa, siempre que los cuantificadores involucrados sean del mismo tipo:

1) $(\forall x, \forall y, \mathfrak{P}(x,y))$ es lo mismo que decir que $(\forall y, \forall x, \mathfrak{P}(x,y))$.

2) $(\exists x, \exists y : \mathfrak{P}(x,y))$ es equivalente a $(\exists y \exists y : \mathfrak{P}(x,y))$.

Pero, hay que tener cuidado cuando se ven involucrados cuantificadores de distinto tipo:

3) $(\forall x, \exists y : \mathfrak{P}(x,y)) \not\Longleftrightarrow (\exists y : \forall x, \mathfrak{P}(x,y))$.

Ejemplo 1.1. Si $X = \mathbb{N}$ *y* $\mathfrak{P}(x,y)$ *es "*$x \leq y$*"*. La primera expresión de 3) se lee como que todo número natural posee otro mayor (que es cierta); la segunda significa que existe un número natural mayor que todos los demás (que es falsa).

El cuantificador existencial y el conector disyunción se pueden intercambiar, así como el cuantificador universal y el conector conjunción:

1) $(\forall x, \mathfrak{P}(x))$ y $(\forall y, \mathfrak{Q}(y))$ es lo mismo que decir que $(\forall x, y, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(y))$.

2) $(\exists x : \mathfrak{P}(x))$ o $(\exists y : \mathfrak{Q}(y))$ es equivalente a $(\exists x, y : \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(y))$.

Pero, no se pueden utilizar indistintamente:

3) el cuantificador universal y el conector conjunción:
$(\forall x, \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x)) \not\Longrightarrow (\forall x, \mathfrak{P}(x))) \vee (\forall x : \mathfrak{Q}(x))$.

Ejemplo 1.2. Si $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}(x)$ *es "ser par" y* $\mathfrak{Q}(x)$ *es "ser impar"*. La primera expresión se lee como que un número natural es par o impar (que es verdadera) y la segunda dice que todo número natural es par o todo número natural es impar (que es falsa).

4) el cuantificador existencial y el conector disyunción:
$(\exists x : \mathfrak{P}(x)) \wedge (\exists x : \mathfrak{Q}(x)) \not\Longrightarrow (\exists x : \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$.

Ejemplo 1.3. Si $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}(x)$ *es "ser par" y* $\mathfrak{Q}(x)$ *es "ser impar"*. La primera expresión se lee como que existe un número natural par y existe un número natural impar (que es cierta), y la segunda significa que existe un número natural a la vez par e impar (que es falsa).

1.1.2. Los objetos del razonamiento

Definir una teoría matemática es establecer las *reglas del juego* sobre los objetos manipulados. En Matemáticas, estas reglas se llaman axiomas.

Definición 1.3. Un *axioma* es todo enunciado que:

1) sirve de fundamento para la construcción de una teoría;

2) se admite como cierto y no es pues objeto de discusión.

Cuando un único axioma no basta para definir una teoría, se pide además:

3) que los diferentes axiomas usados no se contradigan y sean independientes los unos de los otros.

Ejemplos 1.1. Algunos ejemplos de axiomas son los siguientes:

1) *axioma de Euclides*: dos rectas paralelas del plano euclídeo no se cortan; es la base de la Geometría Euclídea;

2) *axioma de elección*: dado un conjunto X, existe una *función de elección* (ver la definición 1.18), $f\colon \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \longrightarrow X$, que asigna a todo A no vacío, $f(A) = a \in A$, que se llama *punto distinguido*;

3) *lema de Zorn*: sea un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ (ver la definición 1.31), tal que todo conjunto bien ordenado (ver la definición 1.33) admite una cota superior; entonces $(X, \leq)$ posee un elemento maximal (ver la definición 1.32);

4) *axioma de Zermelo*: todo conjunto puede ser bien ordenado.

Observación 1.1. 2), 3) y 4) son formulaciones equivalentes del mismo axioma.

Definición 1.4. Una *definición* es una proposición que sirve para explicar o introducir una nueva noción.

Una vez conocidos los axiomas y algunas definiciones, *el juego* puede comenzar, puesto que las reglas ya se han planteado.

Definición 1.5. Un *teorema* es un enunciado que se deduce:

1) directamente de los axiomas,

2) de los axiomas y los teoremas precedentes, y

con las reglas de deducción que se llaman *demostraciones*, que aseguran su validez.

Definición 1.6. A veces, se da únicamente el nombre de teorema a los verdaderamente importantes, a los que han pasado a la historia con un nombre, o a los que precisan una demostración muy larga, dejando el nombre de *proposición* al resto.

Definición 1.7. Un *lema* es una proposición preliminar a la demostración de un teorema.

Definición 1.8. Un *corolario* es una proposición que se deduce inmediatamente de un teorema, por una demostración, sino inmediata, cuando menos corta y fácil.

1.1.3. Condiciones necesarias y suficientes

Definición 1.9. (La implicación) Sea X un conjunto. Sean $\mathfrak{P}(x)$ y $\mathfrak{Q}(x)$ dos fórmulas matemáticas, definiendo los conjuntos $A = \{x \in X : \mathfrak{P}(x)\}$ y $B = \{x \in X : \mathfrak{Q}(x)\}$ respectivamente. Si $A \subset B$, todo elemento verificando la fórmula $\mathfrak{P}$, cumple también $\mathfrak{Q}$. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *implica* $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$. Se dice también que $\mathfrak{P}$ es una *condición suficiente* de $\mathfrak{Q}$. En efecto, para obtener $\mathfrak{Q}$, basta con conocer $\mathfrak{P}$. Se dice también que $\mathfrak{Q}$ es una *condición necesaria* de $\mathfrak{P}$.

Definición 1.10. (La equivalencia) Sea X un conjunto. Sean $\mathfrak{P}(x)$ y $\mathfrak{Q}(x)$ dos fórmulas matemáticas, definiendo los conjuntos $A = \{x \in X : \mathfrak{P}(x)\}$ y $B = \{x \in X : \mathfrak{Q}(x)\}$ respectivamente. Si $A = B$, todo elemento verificando la fórmula $\mathfrak{P}$, cumple también $\mathfrak{Q}$ y todo elemento verificando la fórmula $\mathfrak{Q}$ cumple a su vez $\mathfrak{P}$. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *es equivalente* a $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$. Como $A = B$ es idéntico a $A \subset B$ y $B \subset A$, la equivalencia $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$ significa las dos implicaciones: $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q} \Longrightarrow \mathfrak{P}$.

Es decir, las dos propiedades equivalentes $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ caracterizan el mismo conjunto. Observar que en tal caso $\mathfrak{P}$ es una *condición necesaria y suficiente* de $\mathfrak{Q}$.

1.1.4. Los métodos de demostración

Hay muchos métodos de demostración, entre los cuales los más importantes son:

(i) Método de la hipótesis auxiliar: *para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, se supone $\mathfrak{P}$ cierta.*

Esta forma de razonamiento, la más directa, es también la más conocida. De manera práctica consiste en demostrar el teorema $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, donde $\mathfrak{P}$ es la *hipótesis* y $\mathfrak{Q}$ la *conclusión o tesis*, suponiendo que se verifica $\mathfrak{P}$ (la hipótesis es cierta) y ayudándose de los axiomas y de los otros teoremas de la teoría demostrados anteriormente.

(ii) Disjunción de los casos: *para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, se descompone $\mathfrak{P}$ en la forma $\mathfrak{P}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{P}_n$, y se prueba que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, es $\mathfrak{P}_i \Longrightarrow \mathcal{Q}$.*

Es decir, se descompone el conjunto $A = \{x \in X : \mathfrak{P}(x)\}$ en una unión disjunta de subconjuntos $A_1, \cdots, A_n$. Si $B = \{x \in X : \mathfrak{Q}(x)\}$, se prueba que para cada $1 \le i \le n$, se tiene $A_i \subset B$. Y como $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, se tendrá $A \subset B$.

Ejemplo 1.4. *Probar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n(n+1)$ es par.*
Demostración: Distinguimos dos posibilidades: si n es par, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k$, y entonces $n(n+1) = 2k(2k+1)$. Si n es impar, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k+1$, y entonces $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$, que es claramente par. ∎

(iii) Método de contraposición: *para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, se demuestra el contrarecíproco no-$\mathfrak{Q} \Longrightarrow$ no-$\mathfrak{P}$.*

Es un primer método de prueba indirecta. Descansa sobre el hecho de que la inclusión $A \subset B$ es equivalente a decir que los conjuntos complementarios (ver la definición 1.13 3)) verifican la inclusión $B^c \subset A^c$.

Ejemplo 1.5. *Probar que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que n^2 es par, entonces n es par.*
Demostración: Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces n^2 es impar. ∎

(iv) Demostración por reducción al absurdo: *para probar un enunciado $\mathfrak{P}$, se supone su negación no-$\mathfrak{P}$, y se busca una contradicción en la teoría en la que se trabaja.*

Como se admite evidentemente que esta teoría no admite contradicciones, la suposición no-$\mathfrak{P}$ será falsa, lo cual es equivalente a decir que $\mathfrak{P}$ es cierta. ¿A qué contradicción se debe llegar? A contradecir un axioma, un teorema anteriormente probado o la suposición no-$\mathfrak{P}$.

De modo similar, para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ razonando por reducción al absurdo, se admite lo contrario, es decir, que no-($\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$), o lo que es equivalente, $\mathfrak{P}$ y no-$\mathfrak{Q}$. Y se busca entonces encontrar una contradicción.

(v) El contraejemplo: para probar que una fórmula matemática $\mathfrak{P}$ es cierta sobre un conjunto X, hay que probar que todos los elementos de X la verifican. Pero, se sabe que la negación de $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ es $(\exists x \in X, \text{no-}\mathfrak{P}(x))$. Así, para probar que esta fórmula es falsa, basta con encontrar un elemento de X que no verifique $\mathfrak{P}$. Esto es lo que se llama *dar un contraejemplo*, lo que permite probar que una conjetura es falsa.

Ejemplo 1.6. *Si $x \in \mathbb{R}$, ¿es cierto que si $x \leq x^2$, entonces es $x \geq 1$?*
Demostración: La respuesta es falsa, tomando $x = -2$. ∎

(vi) La demostración por recurrencia: este tipo de demostración está ligada a la definición del conjunto de los enteros naturales. Es una técnica útil para probar que una propiedad $\mathfrak{P}(n)$ es cierta para todos los enteros naturales n, o para los que son iguales o superiores a un cierto n_0. Sean n_0 un entero natural y $\mathfrak{P}(n)$ una fórmula del lenguaje matemático que depende de un entero n. Para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,

2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para $n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots k\}$, que $\mathfrak{P}(k + 1)$ es cierta.

La primera etapa se trata de una simple verificación, el segundo paso descrito es, de hecho, el objeto de una demostración.

Ejemplo 1.7. *Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
Demostración: Para $n = 1$, es cierto que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Si la propiedad se verifica para $n \in \{1, \dots, k\}$, entonces: $1+2+\cdots+k+(k+1)=(1+2+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$. ∎

Hay una forma débil de la demostración por recurrencia: para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,

2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ se verifica para $k > n_0$, que $\mathfrak{P}(k+1)$ es cierta.

Observar que, en este caso, para probar que $\mathfrak{P}(k+1)$ se verifica, nos apoyamos sólo sobre la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ es cierta.

1.2. Teoría de conjuntos

Definición 1.11. Un *conjunto* es una colección de objetos, llamados *elementos* o *puntos*.

Son conjuntos importantes en Matemáticas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\cdots$.

Si x es un elemento de X, se denota por $x \in X$. Análogamente, $x \notin X$ denota la "no pertenencia" de x al conjunto X. El *conjunto vacío* $\emptyset$ es el conjunto sin elementos.

Se puede definir un conjunto:

1) por *extensión*, nombrando todos sus elementos: por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares es $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$;

2) a través de una *propiedad* $\mathfrak{P}$ válida en un universo $\mathfrak{U}$, que servirá para caracterizarlo $\{x \in \mathfrak{U} : \mathfrak{P}(x)\}$. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares se puede expresar por $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 2\}$.

Definición 1.12. Dados $A, B \subset X$, se dice que A *está contenido* en B, $A \subset B$, si para cada $x \in A$, es $x \in B$. Y A es *igual* a B, $A = B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Definición 1.13. Si $A, B \subset X$, se definen:

1) la *intersección* de A y B, por $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$. Claramente, $A \cap B \subset A, B$. A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$;

2) la *unión* de A y B, por $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Es decir $x \in A \cup B$, si se verifica una (y sólo una) de las condiciones siguientes:

   (i) $x \in A$ y $x \in B$,

   (ii) $x \in A$ y $x \notin B$,

   (iii) $x \notin A$ y $x \in B$.

Claramente, $A, B \subset A \cup B$;

3) el *complementario* de A en X, por $X - A = \{x \in X : x \notin A\}$. Si no hay duda de respecto a que conjunto se está tomando el complementario, se suele denotar por A^c;

4) la *diferencia* de A y B, por $A - B = A \cap B^c = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Proposición 1.3. *Las anteriores operaciones verifican las siguientes propiedades:*

1) leyes idempotentes: $A \cap A = A = A \cup A$*;*

2) leyes asociativas: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *y* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$*;*

3) leyes conmutativas: $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$*;*

4) leyes distributivas: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *y* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*;*

5) identidades: $A \cap X = A = A \cup \emptyset$*,* $A \cup X = X$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$*;*

6) propiedades del complementario: $A \cup A^c = X$*,* $A \cap A^c = \emptyset$*,* $(A^c)^c = A$ *y* $X^c = \emptyset$*;*

7) leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *y* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$*.*

Definición 1.14. Se llama *partes de X* o *conjunto potencia de X* al conjunto de todos los subconjuntos de X, y se denota por $\mathcal{P}(X)$ o 2^X. Es decir, $A \subset X$ si y sólo si $A \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 1.15. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ es el *producto cartesiano* de A por B. Sus elementos son *pares ordenados*.

Claramente, $A \times B \neq B \times A$. Y $A \times B = \emptyset$, si y sólo si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$. Dos pares ordenados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, son iguales $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Luego, $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 \neq a_2$ o $b_1 \neq b_2$.

En general, dada una familia finita de conjuntos $\{A_1, \cdots, A_n\}$, se define su producto cartesiano por $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Si $A_i = A$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, el producto cartesiano se denota por A^n.

Proposición 1.4. *El producto cartesiano verifica las siguientes propiedades:*

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$*;*

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$*;*

3) si $C \neq \emptyset$ *y* $A \times C = B \times C$*, entonces* $A = B$*;*

4) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$*;*

5) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$*;*

6) $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$*;*

7) si $B \subset C$*, entonces* $A \times B \subset A \times C$*;*

8) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$*;*

9) si A, B, C *y* D *son conjuntos no vacíos, entonces* $A \times B \subset C \times D$ *si y sólo si* $A \subset C$ *y* $B \subset D$*.*

Definición 1.16. Sea $I \neq \emptyset$ un *conjunto de índices*. Se considera una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$, y se dice que esta familia está *indicada* por I. Los conjuntos A_i no tienen porque ser diferentes.

Definición 1.17. Dada una familia indicada $\{A_i : i \in I\}$, con $A_i \subset X$, se define:

1) la *intersección generalizada* $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I, x \in A_i\}$, y

2) la *unión generalizada* $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I$ tal que $x \in A_i\}$.

Si el conjunto de índices I es finito, estas definiciones coinciden con las dadas en la definición 1.13. Se cumplen también en este caso las propiedades distributivas, las leyes de De Morgan $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$ y $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$, etc.

1.3. Funciones y sus propiedades

Definición 1.18. Dados dos conjuntos X e Y, una *aplicación* o *función* $f \colon X \longrightarrow Y$, es una correspondencia que asocia a cada $x \in X$, un elemento y sólo uno de Y, que se denota por $f(x)$.

Ejemplos 1.2. Algunos ejemplos de aplicaciones son:

1) la *aplicación identidad*, $1_X \colon X \longrightarrow X$, definida por $1_X(x) = x$;

2) la *aplicación inclusión*: si $A \subset X$, $i_A \colon A \longrightarrow X$, se define por $i_A(x) = x$;

3) la *aplicación constante*, $c_{y_0} \colon X \longrightarrow Y$, definida por $c_{y_0}(x) = y_0$, donde y_0 es un punto fijo de Y;

4) la *i-ésima proyección coordenada*, $p_i\colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_i$, definida por la igualdad $p_i((a_1, \cdots, a_n)) = a_i$;

5) la *inyección diagonal*, $d\colon X \longrightarrow X^n$, definida por $d(x) = (x, \cdots, x)$;

6) la *función característica de un conjunto*: si $A \subset X$, $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0,1\}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

7) dada $f\colon X \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, la *restricción* de f a A, $f|_A\colon A \longrightarrow Y$, está definida por $f|_A(a) = f(a)$;

8) si $g\colon A \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es una *extensión* de g a X, si $f|_A = g$; una aplicación puede tener varias extensiones;

9) si $f\colon A \longrightarrow Y$ y $g\colon B \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones, donde $A \cup B = X$ y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A \cap B$, se puede definir la *combinada* de f y g, como la aplicación $h\colon X \longrightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Definición 1.19. Dada una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, X se llama el *dominio* de f e Y es su *codominio*. El *grafo* de f es el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$, que en muchas ocasiones se identifica con f.

Definición 1.20. Dos aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Z \longrightarrow W$ son *iguales*, cuando coinciden sus dominios ($X = Z$), sus codominios ($Y = W$) y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in X$. Por ejemplo, si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación y $A \subset X$, f y $f|_A$ no son iguales.

Definición 1.21. Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, $f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = y\}$ es la *imagen directa* de A. $f(X)$ se llama *rango* de la aplicación.

Definición 1.22. Si $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ es su *imagen recíproca*.

Proposición 1.5. *Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, se verifica:*

1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) \subset Y$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $f(A) \neq \emptyset$;

2) si $A_1, A_2 \subset X$, y $A_1 \subset A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$;

3) Si $A_i \subset X$ para $i \in I$, $f(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f(A_i)$ y $f(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \subset \bigcap\limits_{i \in I} f(A_i)$;

4) si $A_1, A_2 \subset X$, $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$ y en particular $f(X) - f(A_2) \subset f(X - A_2)$ (entre $Y - f(A_2)$ y $f(X - A_2)$ no hay en general ninguna relación);

5) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, y puede existir $\emptyset \neq B \subset Y$, tal que $f^{-1}(B) = \emptyset$;

6) $f^{-1}(Y) = X$;

7) si $B_1, B_2 \subset Y$ y $B_1 \subset B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

8) si $B_i \subset Y$ para $i \in I$, $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ y $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

9) Si $B_1, B_2 \subset Y$, $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$, y en particular, $f^{-1}(Y - B_2) = X - f^{-1}(B_2)$;

10) si $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$;

11) si $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subset B$;

12) si $A \subset X$ y $B \subset Y$, $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Definición 1.23. Dadas $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$, se define la *composición* de g y f, por $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$, donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in X$.

Proposición 1.6. *Sean $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ y $h\colon Z \longrightarrow W$ aplicaciones, entonces:*

1) la composición de funciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

2) $f \circ 1_X = f$ y $1_Y \circ g = g$;

3) si $C \subset Z$, es $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$;

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow X$, en general, $f \circ g \neq g \circ f$.

Definición 1.24. Se dice que $f\colon X \longrightarrow Y$ es *sobreyectiva*, si $f(X) = Y$, es decir, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Y es *inyectiva*, si dados $x_1 \neq x_2$ en X, es $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equivalentemente, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$).

Proposición 1.7. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$, entonces:*

1) $B = f(f^{-1}(B))$ para cada $B \subset Y$, si y sólo si f es sobreyectiva;

2) $Y - f(A) \subset f(X - A)$ para cada $A \subset X$ si y sólo si f es sobreyectiva;

3) si $g, h\colon Y \longrightarrow Z$ y f es sobreyectiva, entonces $g \circ f = h \circ f$ implica que $h = g$;

4) si $g\colon Y \longrightarrow X$ y $f \circ g = 1_Y$, entonces f es sobreyectiva;

5) $A = f^{-1}(f(A))$ para cada $A \subset X$, si y sólo si f es inyectiva;

6) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ para cada familia indicada de conjuntos $\{A_i \subset X\}_{i\in I}$ si y sólo si f es inyectiva;

7) si f es sobreyectiva, entonces para cada $A \subset X$ es $Y - f(A) = f(X - A)$ si y sólo si f es inyectiva;

8) si $g, h\colon Z \longrightarrow X$ y f es inyectiva, entonces $f \circ g = f \circ h$ implica que $h = g$;

9) si $g\colon Y \longrightarrow X$ y $g \circ f = 1_X$, entonces f es inyectiva.

Definición 1.25. $f\colon X \longrightarrow Y$ es *biyectiva* si es sobreyectiva e inyectiva a la vez. En tal caso, la correspondencia definida por $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$, donde $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$, es una función.

Proposición 1.8. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$, entonces:*

1) si f es biyectiva, entonces f^{-1} también lo es;

2) si f es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = 1_X$, $f \circ f^{-1} = 1_Y$ y $(f^{-1})^{-1} = f$;

3) si $g\colon Y \longrightarrow X$ y $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, entonces f es biyectiva y $g = f^{-1}$;

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ son biyectivas, entonces $g \circ f$ lo es y además $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.4. Relaciones binarias

Definición 1.26. Dado un conjunto X, una *relación binaria* es $\mathfrak{R} \subset X \times X$. $\mathfrak{R}$ se llama:

1) *reflexiva*, si para cada $x \in X$, es $(x, x) \in \mathfrak{R}$;

2) *simétrica*, si dado $(x, y) \in \mathfrak{R}$, entonces $(y, x) \in \mathfrak{R}$;

3) *antisimétrica*, si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ e $(y, x) \in \mathfrak{R}$ implica que $x = y$;

4) *transitiva*, si dados $(x, y), (y, z) \in \mathfrak{R}$, entonces $(x, z) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.27. Una relación de *equivalencia* es una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva. Se suele denotar por $x\mathfrak{R}y$ en vez de $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.28. Dada $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia, se llama *clase de x* al conjunto $[x] = \{y \in X : x\mathfrak{R}y\}$. El *conjunto cociente* $X/\mathfrak{R}$, es el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Proposición 1.9. *Algunas propiedades son:*

1) $x \in [x]$ *(*x *se llama representante de su clase), luego* $[x] \neq \emptyset$*;*

2) $x\mathfrak{R}y$ *si y sólo si* $[x] = [y]$*;*

3) $[x] \neq [y]$ *si y sólo si* $[x] \cap [y] = \emptyset$*.*

Definición 1.29. Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X, tales que:

(i) $X = \bigcup_{i \in I} P_i$, y

(ii) si $P_i \neq P_j$, entonces $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Lema 1.10. *Es equivalente dar una partición de* X *que una relación de equivalencia sobre él.*

Definición 1.30. Existe una aplicación canónica, $p\colon X \longrightarrow X/\mathfrak{R}$, que asigna a cada elemento x su clase de equivalencia $p(x) = [x]$. Se llama *aplicación cociente* y es sobreyectiva. Una vez dada la aplicación cociente, cada clase de equivalencia en X es precisamente $p^{-1}(p(x))$.

Definición 1.31. Una relación $\leq$ sobre X es un *orden parcial* si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice también que X está *parcialmente ordenado*. El orden se llama *total*, si dos elementos cualesquiera de X son comparables por esta relación.

Definición 1.32. Si X está parcialmente ordenado por $\leq$, entonces:

(i) $a \in X$ se llama *elemento máximo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \leq a$;

(ii) $a \in X$ es un *elemento maximal* de X, si $a \not\leq x$ para cada $x \neq a$;

(iii) $a \in X$ se llama *elemento mínimo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \geq a$,

(iv) $a \in X$ es un *elemento minimal* de X, si $x \not\leq a$ para cada $x \neq a$.

Ejemplo 1.8. Si $X = \{a, b, c\}$ con el orden parcial $a \leq b$ y $a \leq c$, entonces b es un elemento maximal de X, pero no un máximo.

Definición 1.33. Un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo $A \subset X$ no vacío posee un elemento mínimo, se llama conjunto *bien ordenado*. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, \leq)$ no está bien ordenado.

1.5. Propiedades de los números reales

$(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, donde $\leq$ denota el orden usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.34. Si $A \subset \mathbb{R}$, se tiene:

1) si $u \in \mathbb{R}$ es tal que $a \leq u$ para cada $a \in A$, se dice que u es una *cota superior* de A;

2) la menor de las cotas superiores de A (es decir, u es cota superior de A y para cada z cota superior de A es $z \geq u$) es el *supremo* de A, y se denota $\sup(A)$;

3) si $l \in \mathbb{R}$ es tal que $a \geq l$ para cada $a \in A$, se dice que l es una *cota inferior* de A;

4) la mayor de las cotas inferiores de A (es decir, l es cota inferior de A y para cada z cota inferior de A es $z \leq l$) es el *ínfimo* de A, y se denota $\inf(A)$.

Teorema 1.11. ***(Axioma de la cota superior)*** *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $M \geq a$, para cada $a \in A$), existe el supremo de A. Y en tal caso, $s = \sup(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \leq s$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon > s - \varepsilon$.

Del axioma anterior, se deduce que:

Corolario 1.12. *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente (es decir, existe $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq a$, para cada $a \in A$), existe el ínfimo de A. Y entonces, $i = \inf(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \geq i$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon < i + \varepsilon$.

$\mathbb{R}$ es *arquimediano*, es decir, el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. De aquí se deducen la siguientes propiedades:

Teorema 1.13. ***(Propiedad arquimediana)*** *Para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.*

Teorema 1.14. ***(Densidad de los racionales)*** *Dados dos números reales $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x < r < y$.*

Teorema 1.15. ***(Propiedad de los intervalos de encaje)*** *Dada $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$, familia de intervalos cerrados y encajados (es decir, si $n \leq m$, es $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$), entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

1.6. Nociones sobre cardinalidad de conjuntos

Definición 1.35. Dos conjuntos se llaman *equipotentes*, si existe una correspondencia biyectiva entre ellos.

Definición 1.36. X se dice *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que X es equipotente a $\{1, \cdots, n\}$. X es *infinito*, si no es finito, lo cual equivale a decir que es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo. X es *numerable* si es equipotente a $\mathbb{N}$ y es *contable* si es finito o numerable.

Observación 1.2. Dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si poseen el mismo número de elementos. No sucede lo mismo si X es infinito: $\mathbb{N}$ es equipotente al conjunto $\mathbb{P}$ de los números pares, y sin embargo $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$.

Lema 1.16. *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.*

Definición 1.37. A cada clase de equipotencia se le puede asignar un *número cardinal*, que es un objeto matemático ω tal que existe un conjunto X con $Card(X) = \omega$.

Definición 1.38. Un conjunto A es *de potencia menor o igual* que B, si existe una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ inyectiva, con lo cual $Card(A) \leq Card(B)$ (equivalentemente, si existe una aplicación $f\colon B \longrightarrow A$ sobreyectiva).

Definición 1.39. Dados dos números cardinales ω_1 y ω_2, se dice que $\omega_1 \leq \omega_2$, si existen conjuntos X e Y con $Card(X) = \omega_1$ y $Card(Y) = \omega_2$ y tales que la potencia de X es menor o igual a la potencia de Y. Se trata de una relación de orden. Si $\omega_1 \leq \omega_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$, se dice que ω_1 es estrictamente menor que ω_2.

Proposición 1.17. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1) si X es contable y $A \subset X$, entonces A es contable;

2) si X no es contable y $X \subset Y$, entonces Y no es contable;

3) si X es infinito, existe $A \subset X$, numerable y propio;

4) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable y como consecuencia, el producto cartesiano de una familia finita de conjuntos contables, es contable;

5) la unión de una familia contable de conjuntos contables es contable;

6) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son contables, pero $\mathbb{R}$ no lo es.

El $Card(\emptyset) = 0$, es el cardinal mínimo. Sin embargo no existe un cardinal máximo, ya que:

Teorema 1.18. ***(de Cantor)*** *Para cada conjunto X, $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$.*

Demostración: En efecto, si $X = \emptyset$, $Card(\mathcal{P}(X)) = 1$, pues $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Si $X \neq \emptyset$, y existiera una aplicación $f\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ biyectiva, sea $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. $A \in \mathcal{P}(X)$ y como f es sobreyectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = A$. Si $x_0 \in A$, esto significaría que $x_0 \notin f(x_0) = A$, lo cual es imposible. Luego, es $x_0 \notin A$, lo cual significa que $x_0 \in f(x_0) = A$, imposible de nuevo. Por otro lado, la aplicación $h\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $h(x) = \{x\}$ es inyectiva, y entonces $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$. ∎

En particular, $Card(\mathbb{N}) = \aleph_0 < Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$ (notación que proviene de la propiedad descrita en el ejercicio 9 del apartado 1.7). Puede probarse que $2^{\aleph_0} = Card(\mathbb{R}) = c$, que se llama el *cardinal del continuo*. De aquí se concluye que $\aleph_0 < c$.

Desde principios de siglo, se ha intentado en vano establecer si existe un número cardinal $\aleph_1$, entre $\aleph_0$ y c. Cantor hace la siguiente conjetura:

Teorema 1.19. ***(Hipótesis del continuo)*** *$c = \aleph_1$, es decir, no existe ningún conjunto A, tal que $\aleph_0 < Card(A) < c$.*

Cohen establece en 1963 que la hipótesis del continuo es indecidible: añadiendo como axioma su veracidad o su falsedad, los fundamentos de la Matemática siguen siendo coherentes.

1.7. Ejercicios

1.- Con ayuda del lenguaje simbólico, decidir si son correctas las siguientes deducciones lógicas:

a) Los gusanos reptan. Las cosas que reptan se manchan. Por lo tanto, los gusanos están sucios.

b) Si se firma el Acuerdo de Limitación de Armas o las Naciones Unidas aprueban el Plan de Desarme, la Industria de Armamento caerá. Se sabe que el poder de la Industria de Armamento no va a caer, por lo tanto, se firmará el Acuerdo de Limitación de Armas.

c) Ninguna pelota de tenis es de cristal. Ningún objeto de cristal es indestructible. Luego, ninguna pelota de tenis es indestructible.

d) Si Gran Bretaña abandona la U.E. o el déficit comercial se reduce, el precio de la mantequilla bajará. Si Gran Bretaña continúa en la U.E., las exportaciones no aumentarán. El déficit comercial se incrementará, a no ser que las exportaciones aumenten. Por lo tanto, la mantequilla no bajará de precio.

e) Los profesores son sádicos. Algunos sádicos usan látigo. Por lo tanto, algunos profesores usan látigo.

f) Los caramelos son dulces. Ningún alimento dulce contiene sal. Luego, los caramelos no contienen sal.

g) Los pájaros silban. Algunos nativos de Nicaragua son pájaros. Luego, algunas criaturas nicaragüenses silban.

h) Si no trabajo duro, me dormiré. Si estoy preocupado, no dormiré. Por lo tanto, si estoy preocupado, trabajaré duro.

i) Las nubes son mullidas. Algunos objetos mullidos son rosas. Luego, algunas nubes son rosas.

j) Los osos polares tocan el violín. Los violinistas no vuelan. Por lo tanto, los osos polares no vuelan.

k) Las tortugas leen a Rubén Darío. Algunas criaturas de Gálapagos son tortugas. Por lo tanto, algunos habitantes de Galápagos leen a Rubén Darío.

l) Las polillas salen de noche. Los caminantes nocturnos fuman. Por lo tanto, las polillas fuman.

m) Si Thor se enfada, hay tormentas. Está comenzando una tormenta. Por lo tanto, Thor está enfadado.

n) Si en Marte hubiera grandes cantidades de agua, podría haber vida. No hay grandes extensiones de agua en Marte. Por lo tanto, no hay vida en Marte.

ñ) Los buenos políticos son honestos. Juan es honesto. Juan sería un buen político.

o) Algunas personas no beben café. Los matemáticos son humanos. Por lo tanto, algunos matemáticos no beben café.

p) Ningún elefante sabe hacer ganchillo. Yo no sé hacer ganchillo. Luego, soy un elefante.

q) Algunos poetas son nerviosos. Hay gente nerviosa que se come las uñas. Luego, algunos poetas se comen las uñas.

r) Si hago estos ejercicios, aprenderé lógica. Ya he terminado de hacerlos... ¡Sé lógica!

2.- Negar los siguientes enunciados:

a) Los políticos son gordos y feos.

b) Hay un matemático que sabe sumar.

c) Algunas personas de California tienen paraguas.

d) El Athletic de Bilbao ganará la Liga de fútbol española.

e) Nadie en Managua habla swahili.

f) Al menos dos faraones egipcios eran ciegos.

g) Como mucho, la mitad de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, son pares.

h) A veces, llueve en Masaya.

i) Siempre hace frío en Groenlandia.

j) Ni Alejandro Magno, ni Julio César eran pelirrojos.

k) $x \in A$ o $x \in B$.

l) $x \in A$ y $x \in B$.

m) $x \in A$, pero $x \notin B$.

n) $A \subset B$.

ñ) para cada $i \in I$, es $x \in A_i$.

o) existe $i \in I$, tal que $x \in A_i$.

3.- Sea X el conjunto de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la UNAN Managua, H el conjunto de los hombres, M el de la mujeres, C el de los estudiantes que van en coche a la Universidad, A el de los estudiantes que van en autobús a la Universidad, E el de los estudiantes de Matemáticas y F el de los estudiantes de Físicas. Describir los siguientes conjuntos: $X - H$, $X - M$, $X - C$, $X - A$, $X - E$, $X - F$, $H \cap C$, $H \cap A$, $H \cap E$, $H \cap F$, $M \cap C$, $M \cap A$, $M \cap E$, $M \cap F$, $C \cap A$, $C \cap E$, $C \cap F$, $A \cap E$, $A \cap F$, $E \cap F$, $M \cup H$, $H - M$, $H - C$, $H - A$, $H - E$, $H - F$, $H - M$, $M - H$, $M - C$, $M - A$, $M - E$, $M - F$, $C - A$, $C - E$, $C - F$, $A - C$, $A - M$, $A - H$, $A - E$, $A - F$, $E - H$, $E - M$, $E - C$, $E - A$ y $E - F$.

4.- Cuatro compañeros inseparables han faltado a la clase de Matemáticas en el Instituto. Delante del Jefe de Estudios y en presencia de su profesor, se defienden del modo siguiente:

Pedro: “No he faltado.”

Elena: “Lo admito, he faltado, pero estaba con Juan.”

Juan: “Yo también he faltado; pero no estaba con Elena, sino con Pedro.”
María: “Yo estaba en clase, pero no he visto a Pedro.”
El profesor: “Estaba concentrado en mis cosas, pero he visto a Pedro en clase.”
¿Puedes ayudar al Jefe de Estudios, sabiendo que tres de estas afirmaciones son ciertas y sólo tres?

5.- Traducir las siguientes frases del lenguaje natural en un lenguaje utilizando una o varias propiedades $\mathfrak{P}(x)$. Dar para cada enunciado su negación y traducirla al lenguaje natural:

a) No hay amor feliz.

b) Una puerta está abierta o cerrada.

c) Ser o no ser.

d) Las verdades son fáciles de decir.

e) Los hombres prefieren las rubias a las morenas.

6.- Probar la propiedad siguiente: Si $x \in \mathbb{R}$ y para cada $\varepsilon > 0$, es $|x| < \varepsilon$, entonces $x = 0$.

7.- Sea $A = \{a, b\}$ donde a y b son números reales, ¿se verifican las relaciones siguientes?
(i) $a \in A$; (ii) $\{a\} \in A$; (iii) $\emptyset \in A$; (iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$; (v) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

8.- Sean A, B y C tres conjuntos finitos de cardinales a, b y c respectivamente. Sea $p = Card(A \cap B)$, $q = Card(B \cap C)$, $r = Card(A \cap C)$ y $s = Card(A \cap B \cap C)$. Calcular el cardinal de $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$.

9.- Se pide:

a) calcular $\mathcal{P}(X)$, si $X = \{1, 2\}$, $X = \{\emptyset\}$ y $X = \{1, 2, 3, 4\}$;

b) probar que si $Card(X) = n$, entonces $Card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$;

c) sean A y B dos conjuntos; probar que si $A \subset B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. ¿Es cierto el recíproco?

10.- Si $A, B \subset X$, probar que son equivalentes: (i) $A \subset B$; (ii) $A \cap B = A$; (iii) $A \cup B = B$; (iv) $B^c \subset A^c$; (v) $A \cap B^c = \emptyset$; (vi) $B \cup A^c = X$.

11.- Probar las propiedades siguientes para conjuntos, dando un contraejemplo en el caso de inclusión estricta:

a) $A \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cup B_i)$, b) $A \cap \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cap B_i)$,

c) $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$, d) $\bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$,

e) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$, f) $\bigcap_{(i,j)\in I^2}(A_i \cup B_j) \subset \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$,

g) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$, h) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subset \bigcup_{(i,j)\in I^2}(A_i \cap B_j)$,

i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$,

j) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$,

k) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A_i \times B_i)$,

l) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i - B_j)$,

m) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i - B_j)$.

12.- Para cada uno de los siguientes conjuntos de índices I y cada familia dada de conjuntos indicados por I, calcular las uniones e intersecciones siguientes:

a) si $I = \mathbb{R}^2$ y para cada $p \in I$, $S_p = \{p\}$, hallar $\bigcup_{p\in I} S_p$;

b) si $I = (0, \infty)$ y para cada $x \in I$, $C_x = [0, x]$, hallar $\bigcup_{x\in I} C_x$ y $\bigcap_{x\in I} C_x$;

c) si $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y para cada $r \in I$, B_r es el círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} B_r$ y $\bigcap_{r\in I} B_r$;

d) si $I = (0, 1)$ y para cada $r \in I$, N_r es el interior del círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} N_r$ y $\bigcap_{r\in I} N_r$;

e) si $I = [1, 2]$ y para cada $x \in I$, $A_x = [\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}]$, hallar $\bigcup_{x\in I} A_x$ y $\bigcap_{x\in I} A_x$;

f) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, hallar $\bigcup_{n\in I} A_n$ y $\bigcap_{n\in I} A_n$;

g) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $B_n = (\frac{1}{n}, 1]$, hallar $\bigcup_{n\in I} B_n$ y $\bigcap_{n\in I} B_n$;

h) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $C_n = (-n, n)$, hallar $\bigcup_{n\in I} C_n$ y $\bigcap_{n\in I} C_n$.

13.- Dados $A, B \subset X$, probar

(i) $\chi_{A\cap B} = \chi_A.\chi_B$; (ii) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;

(iii) $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$; (iv) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

14.- Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones. Probar:

a) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

b) si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g también lo es, pero el recíproco no es cierto;

c) si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva;

d) si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

e) si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f también lo es, pero el recíproco no es cierto;

f) si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

15.- Sea $f\colon X \longrightarrow Y$; probar

a) si existe $g\colon Y \longrightarrow X$, tal que $g \circ f = 1_X$, entonces f es inyectiva;

b) si existe $h\colon Y \longrightarrow X$, tal que $f \circ h = 1_Y$, entonces f es sobreyectiva;

c) f es biyectiva si y sólo si existen $g, h\colon Y \longrightarrow X$, tales que $g \circ f = 1_X$, $f \circ h = 1_Y$ y en tal caso $h = f^{-1} = g$.

16.- Sean dos conjuntos X_1, X_2 y para cada $i \in \{1, 2\}$, $A_i \subset X_i$. Sea $p_i\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ la i-ésima proyección coordenada. Probar las siguientes propiedades:

a) $A_1 \times X_2 = p_1^{-1}(A_1)$, $X_1 \times A_2 = p_2^{-1}(A_2)$ y $A_1 \times A_2 = p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2)$,

b) Si $A \subset X_1 \times X_2$, entonces $A \subset p_1(A) \times p_2(A)$,

c) $p_i\,(A_1 \times A_2) = A_i$ $(i \in \{1, 2\})$.

17.- Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Estudiar las funciones: $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, si es que tienen sentido. Estudiar el carácter sobreyectivo e inyectivo de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$. Calcular $f(-5, 5]$, $g(-5, 5]$, $f^{-1}(-5, 5]$ y $g^{-1}(-5, 5]$.

18.- Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para las funciones: $f\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ dadas por: $f(x, y) = x^2 + y$ y $g(x) = (x, -2x)$.

19.- Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Estudiar si f es inyectiva o sobreyectiva. y calcular $f((1, 3))$, $f([-2, 2])$, $f^{-1}((0, 1))$, $f^{-1}([-4, 4])$. Si $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $g(x) = |x|$, determinar $f \circ g$ y calcular $(f \circ g)^{-1}((-2, 5])$.

20.- Probar que la aplicación $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, definida por: $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ es biyectiva y calcular f^{-1}.

21.- Calcular $f(A_i)$ y $f^{-1}(B_i)$ $(i \in \{1, 2\})$, para $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde:

(i) $f(x) = x^2$, $A_1 = (0, 2)$, $B_1 = (0, 4)$ y $B_2 = (-1, 0)$;

(ii) $f(x) = x^4$, $A_1 = (0, 2)$, $A_2 = \emptyset$, $B_1 = (0, 16]$ y $B_2 = (-1, 0]$;

(iii) $f(x) = \frac{1}{x}$ (para $x > 0$), $A_1 = \mathbb{N}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ y $B_2 = \mathbb{N}$;

(iv) $f(x) = x^3 - 3x$, $A_1 = [0, \infty)$, $B_1 = (0, 2)$ y $B_2 = \{2\}$.

22.- Dados $x, y \in \mathbb{R}$, utilizando el carácter arquimediano de $\mathbb{R}$, probar:

(i) si $x > 0$ e $y > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > y$;

(ii) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$;

(iii) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 \leq x < n$.

Espacios métricos

Silencio
Se oye el pulso del mundo como nunca pálido
La tierra acaba de alumbrar un árbol.

“Altazor”
Vicente Huidobro (1893-1948)

2.1. Definición de espacio métrico

2.1.1. Definición de distancia

Un espacio métrico es un conjunto en donde se introduce la noción de distancia entre sus elementos. Se intenta generalizar lo que sucede en el plano o el espacio: aquí conocemos perfectamente lo que es la distancia entre dos puntos. El problema, siendo X un conjunto abstracto, es definir lo que se entiende por distancia entre dos de sus elementos, cuya naturaleza específica desconocemos. Para abstraer el concepto de *distancia*, hay que captar lo esencial de dicho concepto, lo que da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.1. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, una *métrica* o *distancia* sobre X es una función $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, verificando:

(i) *positividad*: para cada $x, y \in X$, es $d(x, y) \geq 0$,

(ii) *propiedad idéntica*: dados $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iii) *simetría*: para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) *desigualdad triangular*: para cada $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La expresión $d(x, y)$ se lee como *distancia de x a y*, y el par (X, d) se denomina *espacio métrico*.

Sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas métricas, que dan lugar a diferentes espacios métricos.

Definición 2.2. En la definición 2.1, si se debilita la condición (ii) reemplazándola por

(ii)* para cada $x \in X$, $d(x,x) = 0$,

estamos contemplando la posibilidad de que existan $x \neq y$ en X con $d(x,y) = 0$. Entonces d recibe el nombre de *pseudométrica*.

Ejemplos 2.1. Los primeros ejemplos de espacios métricos son:

1) (X,d) donde

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

es la *métrica discreta* sobre X.

2) El par $(\mathbb{R}, d_u)$, donde $d_u(x,y) = |x-y|$, se llama la *recta real* y d_u es la *distancia usual* o *euclídea*.

3) Sean (X_1,d_1), ..., (X_n,d_n) una familia finita de espacios métricos. Vamos a definir lo que se denomina el *espacio métrico producto*, de tres maneras diferentes. Sean $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$. Tenemos tres distancias sobre X:

a) $D_1 \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $D_1(x,y) = \text{máx}\{d_i(x_i,y_i) : 1 \leq i \leq n\}$;

b) $D_2 \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $D_2(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$;

c) $D_3 \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $D_3(x,y) = \displaystyle\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i,y_i)}$, es la *distancia euclídea*. La única propiedad de métrica no inmediata es la desigualdad triangular, que en este caso recibe el nombre de *desigualdad de Minkowski*.

Para demostrar la desigualdad triangular en el último ejemplo, es preciso probar algunos resultados previos:

Lema 2.1. ***(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)*** *Dadas dos familias de números reales $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n$, es:*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Demostración: Suponemos que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0 \neq \sum_{i=1}^{n} b_i^2$; en caso contrario, para todo i sería $a_i = 0 = b_i$, y la desigualdad sería trivial. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i - \beta b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha^2 a_i^2 + \beta^2 b_i^2 - 2\alpha\beta a_i b_i\right),$$

es decir,

$$2\alpha\beta \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Tomando $\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ y $\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, queda probado el resultado. ∎

Lema 2.2. ***(Desigualdad de Minkowski)*** *En las condiciones del lema 2.1, es*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Demostración: Lo que se desea probar equivale a demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

es decir, simplificando

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

que es el lema 2.1. ∎

Como consecuencia de todo esto, se verifica la desigualdad triangular del ejemplo 2.1 3c), que equivale a probar que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, z_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(y_i, z_i)},$$

y para ello basta con tomar $a_i = d_i(x_i, y_i)$ y $b_i = d_i(y_i, z_i)$ en la desigualdad de Minkowski y utilizar la desigualdad triangular para las métricas d_i, $1 \leq i \leq n$.

Las tres métricas del ejemplo 2.1 3) están muy relacionadas, y para comprobarlo es preciso dar antes la siguiente definición:

Definición 2.3. Sea X un conjunto no vacío y d_1, d_2 dos métricas sobre X. Se dice que d_1 es *métricamente equivalente* a d_2, si existen $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $0 < \alpha < \beta$ y para cada $x, y \in X$ es
$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y).$$

Lema 2.3. *La anterior relación es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las métricas sobre X.*

Este lema permite hablar sencillamente de métricas *métricamente equivalentes* sobre X, y se dice que (X, d_1) y (X, d_2) son espacios *métricamente equivalentes*.

Proposición 2.4. *Las métricas D_1, D_2 y D_3 del ejemplo 2.1 3) son métricamente equivalentes, y cualquiera de los tres espacios (X, D_k) $(1 \leq k \leq 3)$ se llama* espacio métrico producto de la familia $\{(X_i, d_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

Demostración: $D_1(x,y) \leq D_2(x,y)$. Y $D_2(x,y) \leq nD_1(x,y)$. Luego D_1 y D_2 son métricamente equivalentes. Por otro lado, $D_1(x,y) \leq D_3(x,y)$. Y $D_3(x,y) \leq \sqrt{n}D_1(x,y)$. Luego D_1 y D_3 son métricamente equivalentes. Por tratarse de una relación de equivalencia, se deduce que D_2 y D_3 son también métricamente equivalentes. ∎

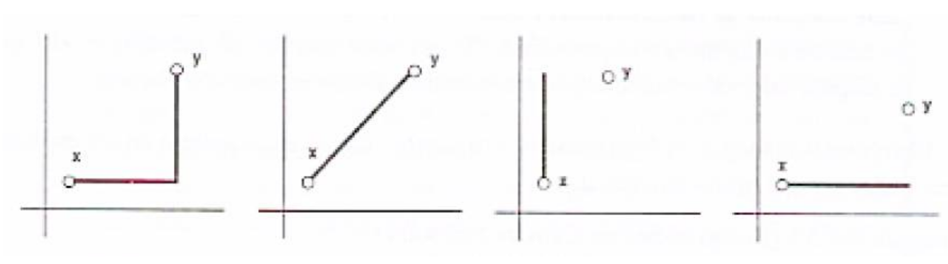
Ejemplos 2.2. En particular, sobre $\mathbb{R}^n$ puede definirse la métrica producto inducida por la usual sobre la recta (denotamos los puntos por $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$):

a) la *métrica del máximo* $D_1 = d_{\text{máx}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$d_{\text{máx}}(x,y) = \text{máx}\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$;

b) la *métrica de la suma* $D_2 = d_{sum} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_{sum}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

c) la *distancia euclídea* $D_3 = d_u \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_u(x,y) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$.

El par $(\mathbb{R}^n, d_u)$ se llama *espacio euclídeo de dimensión n.*



$d_{sum}(x,y)$, $d_u(x,y)$ y dos ejemplos de $d_{\text{máx}}(x,y)$

Proposición 2.5. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $x, y, z, w \in X$. *Entonces*

$$|d(x, z) - d(y, w)| \leq d(x, y) + d(z, w).$$

En particular, es $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Demostración: Aplicando dos veces consecutivas la desigualdad triangular, se tiene que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, w) + d(z, w)$, luego $d(x, z) - d(y, w) \leq d(x, y) + d(z, w)$. Del mismo modo, $d(y, w) \leq d(y, x) + d(x, z) + d(w, z)$, luego $d(y, w) - d(x, z) \leq d(y, x) + d(w, z)$. ∎

2.1.2. Distancia entre conjuntos

Dados (X, d), $\emptyset \neq A \subset X$ y $x \in X$, la familia de números reales $\{d(x, y) : y \in A\}$ está acotada inferiormente por 0. Por lo tanto, existe $\text{ínf}\{d(x, y) : y \in A\} \geq 0$, se denota por $d(x, A)$ y se llama *distancia de* x *a* A.

Ejemplo 2.1. Si $x \in A$, es claro que $d(x, A) = 0$. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_u)$, si $A = (0, 1)$ y $x = 0$, es $x \notin A$, pero $d_u(A, x) = 0$.

Proposición 2.6. *Sean un espacio métrico* (X, d)*,* $\emptyset \neq A \subset X$ *y* $x_0, y_0 \in X$. *Entonces, es* $|d(x_0, A) - d(y_0, A)| \leq d(x_0, y_0)$.

Demostración: Para cada $x \in A$ es $d(x_0, x) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, x)$, por lo tanto es $d(x_0, A) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, x)$ para cada $x \in A$. Así, $d(x_0, A) - d(x_0, y_0)$ es una cota inferior de la familia $\{d(y_0, x) : x \in A\}$, con lo que $d(x_0, A) - d(x_0, y_0) \leq d(y_0, A)$. De modo similar se demuestra la desigualdad $d(y_0, A) - d(x_0, y_0) \leq d(x_0, A)$, con lo que se obtiene el resultado deseado. ∎

Dados (X, d) y $\emptyset \neq A, B \subset X$, la familia de números reales $\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ está acotada inferiormente por 0. Por lo tanto, existe $\text{ínf}\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \geq 0$, se denota por $d(A, B)$ y se llama *distancia de* A *a* B.

Ejemplo 2.2. Si $A \cap B \neq \emptyset$, es claro que $d(A, B) = 0$. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_u)$, los conjuntos $A = (0, 1)$ y $B = (-1, 0)$ son disjuntos, pero $d_u(A, B) = 0$.

Proposición 2.7. *Dados* (X, d) *y* $\emptyset \neq A, B \subset X$*,* $d(A, B) = \text{ínf}\{d(A, y) : y \in B\} = \text{ínf}\{d(x, B) : x \in A\}$.

Demostración: Sea $x \in A$. Para cada $y \in B$ es $d(A, B) \leq d(x, y)$. Luego $d(A, B)$ es cota inferior de la familia $\{d(x, y) : y \in B\}$, y así $d(A, B) \leq d(x, B)$. Luego, para cada $x \in A$ es $d(A, B) \leq d(x, B)$, con lo que $d(A, B)$ es cota inferior de la familia $\{d(x, B) : x \in A\}$, y entonces $d(A, B) \leq \text{ínf}\{d(x, B) : x \in A\}$. Por la definición de $d(A, B)$, para cada

$\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in A, y_\varepsilon \in B$ tal que $d(A,B)+\varepsilon > d(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. Como $d(x_\varepsilon, B) \leq d(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$, es $d(x_\varepsilon, B) < d(A,B)+\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Como $\inf\{d(x,B) : x \in A\} \leq d(x_\varepsilon, B)$, concluimos que para cada $\varepsilon > 0$ es $\inf\{d(x,B) : x \in A\} < d(A,B)+\varepsilon$, es decir, $\inf\{d(x,B) : x \in A\} \leq d(A,B)$. ∎

2.1.3. Isometrías

Definición 2.4. Sean (X,d) e (Y,ρ) espacios métricos. Una *isometría* entre (X,d) e (Y,ρ) es una aplicación biyectiva $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ que *preserva la distancia*, es decir, para cada $a,b \in X$, es $d(a,b) = \rho(f(a),f(b))$. Se dice que (X,d) es *isométrico* a (Y,ρ).

Proposición 2.8. *La relación "ser isométrico" es una relación de equivalencia sobre la familia de espacios métricos.*

Así, podemos hablar sencillamente de espacios métricos isométricos. Dos espacios métricos isométricos pueden diferir en la naturaleza específica de sus puntos, pero son indistinguibles en cuanto a su comportamiento como espacios métricos.

2.2. Bolas abiertas y cerradas. Esferas

Definición 2.5. Sea (X,d) y $r > 0$. Se llama:

1) *bola abierta* de centro x y radio r, al conjunto $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$;

2) *bola cerrada* de centro x y radio r, al conjunto $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$;

3) *esfera* de centro x y radio r, al conjunto $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$.

Ejemplos 2.3. Damos algunos ejemplos de bolas en algunos espacios métricos:

(i) en (X,d), donde d es la métrica discreta, $B(x,1) = \{x\}$, $B(x,2) = X$, $\overline{B}(x,1) = X$, $\overline{B}(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$, $S(x,1) = X - \{x\}$ y $S(x,2) = \emptyset$;

(ii) en $(\mathbb{R}, d_u)$, $B(x,r) = (x-r, x+r)$, $\overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$ y $S(x,r) = \{x-r, x+r\}$;

(iii) en $(\mathbb{R}^n, d_{\text{máx}})$, la bola $B(x,r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r)$, el cubo de dimensión n, centrado en x y arista $2r$;

(iv) en $(\mathbb{R}^n, d_{sum})$, la bola $B(x,r)$ es el cubo de dimensión n centrado en x, de arista $2r$ y girado;

(v) en $(\mathbb{R}^n, d_u)$, $B(x,r)$ es la bola abierta de dimensión n, centrada en x y de radio r.

Se verifican las siguientes propiedades:

Proposición 2.9. *En un espacio métrico (X, d), se cumple:*

(i) para cada $x \in X$ y $r > 0$, es $B(x, r) \neq \emptyset \neq \overline{B}(x, r)$; pero $S(x, r)$ puede ser vacía;

(ii) si $0 < r \leq s$, es $B(x, r) \subset B(x, s)$, $\overline{B}(x, r) \subset \overline{B}(x, s)$, $\overline{B}(x, r) \subset B(x, s)$ (si $r < s$) y $S(x, r) \cap S(x, s) = \emptyset$ si $s \neq r$;

(iii) $B(x, r) \cup S(x, r) = \overline{B}(x, r)$ y $B(x, r) \cap S(x, r) = \emptyset$;

(iv) la intersección finita de bolas abiertas de un mismo centro (respectivamente, cerradas) es la bola abierta (respectivamente, cerrada) del mismo centro y radio el mínimo de los radios. La intersección arbitraria de bolas no tiene porque ser una bola.

Ejemplo 2.3. En $(\mathbb{R}, d_u)$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$, que no es una bola.

Teorema 2.10. ***(Propiedad de Hausdorff)*** *En un espacio métrico (X, d), dos puntos distintos se pueden separar por bolas abiertas disjuntas.*

Demostración: Sean $x \neq y$. Entonces $d(x, y) = r > 0$. Las bolas $B(x, \frac{r}{2})$ y $B(y, \frac{r}{2})$ son obviamente disjuntas. ∎

2.3. Conjuntos abiertos y cerrados

2.3.1. Conjuntos abiertos

Definición 2.6. En (X, d), un subconjunto A se dice *abierto*, si para cada $a \in A$, existe $r_a > 0$ (que depende sólo de a) tal que $B(a, r_a) \subset A$.

Teorema 2.11. *En un espacio métrico (X, d), los conjuntos X y $\emptyset$ son abiertos.*

Teorema 2.12. *En un espacio métrico (X, d), para cada $x \in X$ y $r > 0$, la bola $B(x, r)$ es un conjunto abierto.*

Demostración: Sea $y \in B(x, r)$ y $s = d(x, y) < r$; es $B(y, r - s) \subset B(x, r)$. ∎

Ejemplos 2.4. Algunos ejemplos de conjuntos abiertos son:

(i) En $(\mathbb{R}, d_u)$, los intervalos abiertos son conjuntos abiertos;

(ii) En (X,d), con d la métrica discreta, cualquier conjunto es abierto.

Teorema 2.13. *En (X,d), sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos. Entonces*

(i) $\bigcup_{i\in I} A_i$ *es abierto;*

(ii) si I es finito, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ *es abierto.*

Demostración: (i) Si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Como A_i es abierto, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

(ii) Si $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, para cada $i \in I$ es $x \in A_i$. Para todo $i \in I$, existe $r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subset A_i$. Si $r = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_n\}$, es $B(x, r) \subset \bigcap_{i\in I} A_i$. ∎

Observación 2.1. En el teorema 2.13 (ii), el conjunto de índices debe de ser finito: en efecto, en $(\mathbb{R}, d_u)$, si se toma $I = \mathbb{N}$ y la familia de abiertos $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$, que no es abierto.

Teorema 2.14. *En (X,d), A es abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas.*

Demostración: Por los teoremas 2.12 y 2.13, la unión de bolas abiertas es un conjunto abierto. Y recíprocamente, si A es abierto, para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \subset A$. Es obvio que $A = \bigcup_{a\in A} B(a, r_a)$. ∎

Observación 2.2. No todo abierto es una bola abierta, por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_u)$, $A = \mathbb{R}$ es abierto y no es una bola abierta.

2.3.2. Topología inducida por una métrica

Definición 2.7. Sean un conjunto X y una familia $\tau \subset \mathfrak{P}(X)$ verificando:

1) $\emptyset, X \in \tau$,

2) si $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$,

3) si $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \tau$, entonces $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$.

Se dice que τ es una *topología* sobre X y el par (X, τ) se llama *espacio topológico*.

Como consecuencia de los teoremas 2.11 y 2.13, se obtiene:

Proposición 2.15. *En (X, d), la familia $\tau_d = \{U \subset X : U$ es abierto$\}$ es una topología sobre X, llamada* topología métrica.

Ejemplos 2.5. Algunos ejemplos de topologías son:

(i) En $(\mathbb{R}^n, d_u)$, τ_{d_u} se denomina la *topología euclídea*;

(ii) en (X, d), con d la métrica discreta, $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ se llama la *topología discreta*.

Definición 2.8. Un espacio topológico (X, τ) se llama *metrizable*, si existe una métrica d sobre X tal que $\tau_d = \tau$.

Observación 2.3. Cualquier espacio topológico no es metrizable: $(\mathbb{R}, \tau)$, donde $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (la *topología indiscreta*) no es metrizable, pues no se cumple la propiedad de Hausdorff.

Definición 2.9. Dos métricas d_1 y d_2 sobre X se llaman *topológicamente equivalentes*, si inducen la misma topología sobre X, y en tal caso se dice que (X, d_1) y (X, d_2) son espacios métricos *topológicamente equivalentes*.

Lema 2.16. *La relación "ser topológicamente equivalentes" es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las métricas sobre X.*

Lema 2.17. *Con las notaciones obvias, (X, d_1) y (X, d_2) son topológicamente equivalentes si y sólo si para cada $x \in X$ y $r > 0$, existen $s_1, s_2 > 0$ tales que $B_{d_2}(x, s_2) \subset B_{d_1}(x, r)$ y $B_{d_1}(x, s_1) \subset B_{d_2}(x, r)$.*

Lema 2.18. *Si (X, d_1) y (X, d_2) son métricamente equivalentes, también son topológicamente equivalentes.*

Ejemplo 2.4. El recíproco no es cierto: sobre $\mathbb{N}$, las métricas discreta y usual son topológicamente equivalentes (ambas inducen la topología discreta), pero no son métricamente equivalentes.

Observación 2.4. Cualquier propiedad enunciada para espacios métricos en términos de conjuntos abiertos puede reformularse también para espacios topológicos: en este curso se trata precisamente de dar un repaso de los conceptos topológicos más importantes restringiéndonos al caso particular de los espacios metrizables.

2.3.3. Conjuntos cerrados

Definición 2.10. Dados (X, d) y $A \subset X$, $x \in X$ es un *punto de acumulación* de A (o *punto límite*), si para cada $r > 0$ es $(B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definición 2.11. Sean (X, d) y $A \subset X$. El *derivado* de A, A', es el conjunto de los puntos de acumulación de A. Si $x \in A - A'$, se dice que x es un *punto aislado*.

Definición 2.12. Sean (X, d) y $A \subset X$. A se llama *cerrado* si $A' \subset A$.

Ejemplos 2.6. Algunos ejemplos de puntos de acumulación son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_u)$, $(0, \infty)' = [0, \infty)$, $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\}$, $\mathbb{N}' = \emptyset$ y $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$;

(ii) en (X, d), con d la métrica discreta, para cada $A \subset X$ es $A' = \emptyset$.

Lema 2.19. *Sean (X, d) y $A \subset X$. Si $x \in A'$, entonces para cada $r > 0$, la intersección $(B(x, r) - \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos.*

Demostración: Supongamos que para $r > 0$ es $(B(x, r) - \{x\}) \cap A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Si $r_0 = \min\{d(x, x_k) : 1 \leq k \leq n\}$, entonces $(B(x, r_0) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, contra la hipótesis. ∎

Corolario 2.20. *En (X, d), si $A \subset X$ es finito, entonces es cerrado.*

Demostración: En este caso, es claramente $A' = \emptyset$. ∎

Teorema 2.21. *En (X, d), A es cerrado si y sólo si $X - A$ es abierto.*

Demostración: Si A es cerrado, sea $x \in X - A$. Como $A' \subset A$ y $x \notin A$, es $x \notin A'$. Luego, existe $r_x > 0$ tal que $(B(x, r_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, es decir, $B(x, r_x) - \{x\} \subset X - A$, y por lo tanto $X - A$ es abierto. Recíprocamente, si $X - A$ es abierto y $x \in A'$, supongamos que $x \notin A$. Existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset X - A$, es decir, $(B(x, r_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, contra la hipótesis. ∎

De los teoremas 2.11 y 2.21, se deduce:

Teorema 2.22. *En (X, d), X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados.*

Teorema 2.23. *En (X, d), para cada $x \in X$ y $r > 0$, la bola $\overline{B}(x, r)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración: Basta con probar que $X - \overline{B}(x, r)$ es abierto: sea $y \in X - \overline{B}(x, r)$, entonces $d(x, y) > r$. Para $r_1 = d(x, y) - r$, es $B(y, r_1) \subset X - \overline{B}(x, r)$. ∎

Ejemplos 2.7. Algunos ejemplos de conjuntos cerrados son:

(i) En $(\mathbb{R}, d_u)$, los puntos y los intervalos del tipo $[a, b]$ son cerrados;

(ii) En (X, d), con d la métrica discreta, todo $A \subset X$ es cerrado.

Usando el teorema 2.21, se deducen las propiedades duales del teorema 2.13:

Teorema 2.24. *En (X, d), sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces*

(i) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ es cerrado;

(ii) si I es finito, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ es cerrado.

Observación 2.5. En 2.24 (ii), el conjunto de índices debe de ser finito: en efecto, en $(\mathbb{R}, d_u)$, si se toma $I = \mathbb{N}$ y la familia de cerrados $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, entonces $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 1]$, que no es cerrado.

Corolario 2.25. *En (X, d), para cada $x \in X$ y $r > 0$, la esfera $S(x, r)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración: Es una consecuencia de la igualdad $S(x, r) = \overline{B}(x, r) - B(x, r)$. ■

2.4. Clausura, interior y frontera de un conjunto

2.4.1. Clausura de un conjunto

Definición 2.13. En (X, d), si $A \subset X$, la *clausura* de A es el conjunto $\overline{A} = A \cup A'$. Si $x \in \overline{A}$, se dice que es un *punto adherente* de A.

Teorema 2.26. *En (X, d), $A \subset X$ es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.*

Observación 2.6. En particular, $\overline{X} = X$ y $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Teorema 2.27. *En (X, d), $x \in \overline{A}$ si y sólo si para cada $r > 0$ es $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración: Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, la condición se cumple trivialmente. En caso contrario, debe ser $x \in A'$ y entonces $(B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, y se concluye el resultado. Recíprocamente, si para cada $r > 0$ es $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, pueden suceder dos cosas:

(i) si $x \in A$, es $x \in \overline{A}$;

(ii) si $x \notin A$, es $(B(x,r) - \{x\}) \cap A = B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ para cada $r > 0$, con lo que $x \in A' \subset \overline{A}$.

■

Teorema 2.28. *En (X,d), si $A, B \subset X$ se verifica:*

(i) si $A \subset B$, es $\overline{A} \subset \overline{B}$, es decir, la clausura preserva las inclusiones;

(ii) $\overline{A}$ es cerrado.

Demostración: Veamos (ii), y para ello basta con ver que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Sea $x \in \overline{\overline{A}}$, es decir, para cada $r > 0$ es $B(x,r) \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Sea $x_r \in B(x,r) \cap \overline{A}$ y $s_r = r - d(x,x_r) > 0$. Como $x_r \in \overline{A}$ es $B(x_r,s_r) \cap A \neq \emptyset$. Claramente, es $B(x_r,s_r) \subset B(x,r)$, con lo que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, y se deduce que $x \in \overline{A}$. ■

Teorema 2.29. ***(Caracterización de la clausura)*** *En (X,d), se cumple:*

(i) si F es cerrado y $A \subset F$, es $\overline{A} \subset F$;

(ii) $\overline{A} = \bigcap\{F$ cerrado: $A \subset F\}$, es decir, $\overline{A}$ es el menor cerrado en (X,d) que contiene a A.

Demostración: (i) Si $A \subset F$, por el teorema 2.28 (i), es $\overline{A} \subset \overline{F}$, y como F es cerrado, se deduce que $\overline{A} \subset F$.

(ii) Si F es cerrado y $A \subset F$, es $\overline{A} \subset F$, luego $\overline{A} \subset \bigcap\{F$ cerrado: $A \subset F\}$. Además, $\overline{A}$ es cerrado y contiene a A, luego $\overline{A} \supset \bigcap\{F$ cerrado: $A \subset F\}$. ■

Teorema 2.30. *En (X,d), si $A, B \subset X$ se verifica:*

(i) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$;

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demostración: (i) Como $A, B \subset A \cup B$, por el teorema 2.28 (i) es $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por otro lado, $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (que es cerrado) y $\overline{A \cup B}$ es el menor cerrado que contiene a $A \cup B$, luego $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

(ii) Como $A \cap B \subset A, B$, por el teorema 2.28 (i) es $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}, \overline{B}$. ■

Observación 2.7. En 2.30 (ii), la igualdad no es cierta en general: en $(\mathbb{R}, d_u)$, si $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$, es $\overline{A \cap B} = \emptyset$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Ejemplos 2.8. Algunos ejemplos de clausuras son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_u)$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$;

(ii) en (X, d), con d la métrica discreta, todo $A \subset X$, es $\overline{A} = A$.

Todo espacio métrico es *normal*, es decir, separa cerrados disjuntos por medio de abiertos (es una generalización del teorema 2.10) en el siguiente sentido:

Proposición 2.31. *En (X, d), si $A, B \subset X$ son cerrados disjuntos, existen abiertos disjuntos U y V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Demostración: Para cada $a \in A$, es $a \notin B$ y existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \cap B = \emptyset$. Del mismo modo, para todo $b \in B$, es $b \in X - A$, por lo que existe $s_b > 0$ tal que $B(b, s_b) \cap A = \emptyset$. Basta con tomar $U = \bigcup\limits_{a \in A} B\left(a, \frac{r_a}{3}\right)$ y $V = \bigcup\limits_{b \in B} B\left(b, \frac{s_b}{3}\right)$. ∎

Observación 2.8. En las condiciones de la proposición 2.31, observar que $U \subset X - V$, con lo que $\overline{U} \subset X - V \subset X - B$, y por lo tanto es $A \subset U \subset \overline{U} \subset X - B$.

Todo espacio métrico es *regular*, es decir, separa puntos de cerrados a través de abiertos en el siguiente sentido:

Corolario 2.32. *En (X, d), si $A \subset X$ es cerrado y $x \notin A$ existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V, tales que $x \in U$ y $A \subset V$.*

Demostración: Basta con aplicar la proposición 2.31 al caso de los cerrados disjuntos A y $\{x\}$. ∎

2.4.2. Interior de un conjunto

Definición 2.14. En (X, d), si $A \subset X$, $x \in A$, se llama *punto interior* de A si existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. El conjunto de los puntos interiores de A se llama *interior* de A y se denota por $\overset{\circ}{A}$. Es claro que $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Teorema 2.33. *En (X, d), si $A \subset X$, se cumple:*

(i) $X - \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X - A}}$;

(ii) $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - A}$.

Demostración: (i) Si $x \notin \overline{A}$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \emptyset$, es decir, $B(x,r) \subset X - A$, con lo que $x \in \overbrace{X - A}^{\circ}$.

(ii) Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, para cada $r > 0$ es $B(x,r) \not\subset A$, es decir, $B(x,r) \cap (X - A) \neq \emptyset$, luego $x \in \overline{X - A}$. ∎

Teorema 2.34. *En (X,d), $A \subset X$ es abierto si y sólo si $\overset{\circ}{A} = A$.*

Demostración: A es abierto si y sólo si $X - A$ es cerrado, es decir, $X - A = \overline{X - A}$, equivalentemente $\overset{\circ}{A} = A$, por 2.33 (ii). ∎

Observación 2.9. En particular, $\overset{\circ}{X} = X$ y $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.

Usando la dualidad con la clausura dada por el teorema 2.33 y el teorema 2.28, se demuestra fácilmente:

Teorema 2.35. *En (X,d), si $A, B \subset X$ se verifica:*

(i) si $A \subset B$, es $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;

(ii) $\overset{\circ}{A}$ es abierto.

Teorema 2.36. ***(Caracterización del interior)*** *En (X,d) se cumple:*

(i) si U es abierto y $U \subset A$, es $U \subset \overset{\circ}{A}$;

(ii) $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{U$ abierto: $U \subset A\}$, es decir, $\overset{\circ}{A}$ es el mayor abierto contenido en A.

Demostración: (i) Si U es abierto y está contenido en A, por el teorema 2.35 (i) es $\overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{A}$, y $U = \overset{\circ}{U}$ por ser abierto.

(ii) Como todo abierto contenido en A está también contenido en su interior, se verifica que $\overset{\circ}{A} \supset \bigcup\{U$ abierto: $U \subset A\}$. Y como $\overset{\circ}{A}$ es abierto contenido en A, es uno de los que participan en la unión, por lo que $\overset{\circ}{A} \subset \bigcup\{U$ abierto: $U \subset A\}$. ∎

Usando la dualidad con la clausura dada por el teorema 2.33 y las propiedades del teorema 2.30, se deduce que:

Teorema 2.37. *En* (X,d)*, si* $A,B\subset X$ *se verifica:*

(i) $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}=\overbrace{A\cap B}^{\circ}$*;*

(ii) $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}\subset\overbrace{A\cup B}^{\circ}$.

Observación 2.10. En 2.37 (ii), la igualdad no es cierta en general: en $(\mathbb{R},d_u)$, si $A=[0,1]$ y $B=[1,2]$, es $\overbrace{A\cup B}^{\circ}=(0,2)$ y $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}=(0,2)-\{1\}$.

2.4.3. Frontera de un conjunto

Definición 2.15. En (X,d), si $A\subset X$, $x\in X$ se llama *punto frontera* de A si para cada $r>0$ es $B(x,r)\cap A\neq\emptyset\neq B(x,r)\cap(X-A)$. El conjunto de los puntos frontera de A se llama *frontera* de A y se denota por $\mathrm{fr}(A)$.

Ejemplos 2.9. Algunos ejemplos de fronteras son:

(i) en $(\mathbb{R},d_u)$, $\mathrm{fr}((a,b])=\{a,b\}$, $\mathrm{fr}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$, $\mathrm{fr}(\mathbb{N})=\mathbb{N}$;

(ii) en (X,d), con d la métrica discreta, todo $A\subset X$, es $\mathrm{fr}(A)=\emptyset$.

Teorema 2.38. *En* (X,d)*, para* $A\subset X$ *es* $\mathrm{fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{X-A}=\overline{A}-\overset{\circ}{A}$.

Corolario 2.39. *En* (X,d)*, si* $A\subset X$*, se cumple:*

(i) $\mathrm{fr}(A)$ *es un conjunto cerrado;*

(ii) $\mathrm{fr}(A)=\mathrm{fr}(X-A)$*;*

(iii) $\mathrm{fr}(\overline{A})\subset\mathrm{fr}(A)$ *y* $\mathrm{fr}(\overset{\circ}{A})\subset\mathrm{fr}(A)$*;*

(iv) $\mathrm{fr}(X)=\mathrm{fr}(\emptyset)=\emptyset$.

Demostración: (iii) $\mathrm{fr}(\overline{A})=\overline{\overline{A}}\cap\overline{X-\overline{A}}=\overline{A}\cap\overline{X-\overline{A}}=\overline{A}\cap\overline{\overbrace{X-A}^{\circ}}\subset\overline{A}\cap\overline{X-A}=\mathrm{fr}(A)$. Del mismo modo, $\mathrm{fr}(\overset{\circ}{A})=\overline{\overset{\circ}{A}}\cap\overline{X-\overset{\circ}{A}}=\overline{\overset{\circ}{A}}\cap\overline{\overline{X-A}}=\overline{\overset{\circ}{A}}\cap\overline{X-A}\subset\overline{A}\cap\overline{X-A}=\mathrm{fr}(A)$. ∎

Observación 2.11. En (iii) no se da en general la igualdad: en $(\mathbb{R},d_u)$, es $\mathrm{fr}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$, pero $\mathrm{fr}(\overset{\circ}{\mathbb{Q}})=\mathrm{fr}(\emptyset)=\emptyset=\mathrm{fr}(\overline{\mathbb{Q}})=\mathrm{fr}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.40. *En (X,d), si $A \subset X$ se verifica:*

(i) A es abierto si y sólo si $A \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$;

(ii) A es cerrado si y sólo si $\mathrm{fr}(A) \subset A$.

Demostración: (i) Si A es abierto, es $A = \overset{\circ}{A}$ y $A \cap \mathrm{fr}(A) = A \cap (\overline{A} - A) = \emptyset$. Recíprocamente, si $A \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$, es $A \cap \overline{X - A} = \emptyset$, con lo que $A \subset X - \overline{X - A} = \overset{\circ}{A}$ y se deduce que A es abierto.

(ii) Se deduce usando (i) y por dualidad. ∎

El siguiente teorema nos permite dar una clara interpretación del interior, la clausura y la frontera de un conjunto:

Teorema 2.41. *En (X,d), si $A \subset X$ se verifica:*

(i) $\overset{\circ}{A} = A - \mathrm{fr}(A) = \overline{A} - \mathrm{fr}(A)$;

(ii) $\overline{A} = A \cup \mathrm{fr}(A) = \overset{\circ}{A} \cup \mathrm{fr}(A)$.

2.5. Subespacios de un espacio métrico

Dado (X,d) y $A \subset X$ no vacío, la restricción de la métrica d a $A \times A$, $d_A \colon A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$, es una distancia sobre A, que se denota por d_A. Se dice también que el par (A, d_A) es un *subespacio* de (X,d).

Es importante distinguir entre los espacios métricos (X,d) y (A,d_A), intentando dar una relación entre los abiertos de ambos espacios:

Lema 2.42. *En (X,d), si $A \subset X$ y $x \in A$, para $r > 0$ la bola en el subespacio es $B_A(x,r) = B(x,r) \cap A$.*

Observación 2.12. En (X,d), con las notaciones obvias, si $A \subset X$ y $x \in A$, para $r > 0$ es $\overline{B_A}(x,r) = \overline{B}(x,r) \cap A$ y $S_A(x,r) = S(x,r) \cap A$.

Teorema 2.43. *En (X,d), sean $B \subset A \subset X$, entonces:*

(i) B es abierto en (A,d_A) si y sólo si existe U abierto en (X,d) tal que $B = U \cap A$;

(ii) B es cerrado en (A,d_A) si y sólo si existe F cerrado en (X,d) tal que $B = F \cap A$.

Observación 2.13. Puede suceder que $B \subset A \subset X$ sea abierto (respectivamente, cerrado) en (A,d_A) y no lo sea en (X,d). Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_u)$, para $A = [0,1)$:

(i) $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en (A, d_A), pero no lo es en $(\mathbb{R}, d_u)$;

(ii) $[\frac{1}{2}, 1)$ es cerrado en (A, d_A), pero no lo es en $(\mathbb{R}, d_u)$.

Pero se cumple la propiedad:

Teorema 2.44. *Sea (X, d) y $A \subset X$, entonces:*

(i) todo subconjunto de A que es abierto en (A, d_A) es también abierto en (X, d) si y sólo si A es abierto en (X, d);

(ii) todo subconjunto de A que es cerrado en (A, d_A) es también cerrado en (X, d) si y sólo si A es cerrado en (X, d).

2.6. Diámetro de un conjunto. Conjuntos acotados

Definición 2.16. Sean un espacio métrico (X, d) y $A \subset X$. El *diámetro* de A es el número $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ si este supremo existe y es infinito en caso contrario. Por definición, $\delta(\emptyset) = 0$.

Observación 2.14. $\delta(A)$ está definido si la familia de números reales $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ está acotada superiormente.

Definición 2.17. En (X, d), un conjunto $A \subset X$ se llama *acotado* si $\delta(A) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos 2.10. Algunos ejemplos de conjuntos acotados son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_u)$, A está acotado si lo está superior e inferiormente;

(ii) en (X, d), con d la métrica discreta, todo $A \subset X$ está acotado, ya que si A tiene más de un punto, es $\delta(A) = 1$.

Observación 2.15. Si $\delta(A) = r$, no tienen porque existir dos puntos $x, y \in A$ tales que $d(x, y) = r$. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_u)$, $\delta((0, 1)) = 1$, pero los puntos en $(0, 1)$ distan entre ellos menos que 1.

Teorema 2.45. *En (X, d), si $A, B \subset X$ son no vacíos, se cumple:*

(i) si $A \subset B$, es $\delta(A) \leq \delta(B)$;

(ii) si $\delta(A) = 0$, entonces A se reduce a un punto;

(iii) $\delta(B(x, r)) \leq \delta(\overline{B}(x, r)) \leq 2r$.

Demostración: (i) Si A o B no están acotados, es inmediato. Supongamos entonces que ambos conjuntos están acotados, entonces $\{d(x,y) : x, y \in A\} \subset \{d(x,y) : x, y \in B\}$, y se deduce la propiedad. Aunque la inclusión sea propia, puede darse la igualdad: en $(\mathbb{R}, d_u)$, $\delta((0,1)) = 1 = \delta([0,1])$.

(iii) Si $a, b \in B(x,r)$, es $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < 2r$. Así, $2r$ es cota superior de la familia $\{d(a,b) : a, b \in B(x,r)\}$, y por lo tanto, $\delta(B(x,r)) \leq 2r$. Para la bola cerrada, se hace de manera similar. La igualdad no se verifica en general: para $(\mathbb{R}, d)$ donde d es la métrica discreta, es $\delta(B(x,1)) = 0 < 2$ y $\delta(\overline{B}(x,50)) = 1 < 100$. Sin embargo, para $(\mathbb{R}^n, d)$ donde $d = d_{\text{máx}}, d_{sum}, d_u$, es $\delta(B(x,r)) = \delta(\overline{B}(x,r)) = 2r$. ∎

Lema 2.46. *En (X,d), si $A, B \subset X$ están acotados y $a \in A$, $b \in B$, entonces para cada $x, y \in A \cup B$ es $d(x,y) \leq d(a,b) + \delta(A) + \delta(B)$.*

Demostración: Hay tres posibles casos:

(i) si $x, y \in A$, es $d(x,y) \leq \delta(A) \leq d(a,b) + \delta(A) + \delta(B)$;

(ii) si $x, y \in B$, es $d(x,y) \leq \delta(B) \leq d(a,b) + \delta(A) + \delta(B)$;

(iii) si $x \in A$ e $y \in B$, es $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$. ∎

Teorema 2.47. *En (X,d), la unión de cualquier familia finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado.*

Demostración: Sean A y B conjuntos acotados. Por el lema 2.46, fijados $a \in A$ y $b \in B$, el número $d(a,b) + \delta(A) + \delta(B)$ es cota superior de la familia $\{d(x,y) : x, y \in A \cup B\}$, por lo que existe $\delta(A \cup B)$. ∎

Observación 2.16. La unión debe ser finita: en $(\mathbb{R}, d_u)$, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ es un conjunto acotado, pero $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ no lo es.

Teorema 2.48. *En (X,d), un conjunto no vacío $A \subset X$ es acotado si y sólo si está contenido en alguna bola cerrada.*

Demostración: Si existen $x \in X$ y $r > 0$ tales que $A \subset \overline{B}(x,r)$, A está acotado por estarlo $\overline{B}(x,r)$. Recíprocamente, sea A acotado y $x \in X$ un punto cualquiera. Si $a \in A$, sea $r = d(x,a) + \delta(A)$. Entonces, $A \subset \overline{B}(x,r)$. ∎

2.7. Conjuntos densos y espacios separables

Definición 2.18. En (X, d), un conjunto $A \subset X$ se llama *denso* en X si $\overline{A} = X$.

Ejemplos 2.11. Algunos ejemplos de conjuntos densos son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_u)$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son densos;

(ii) en (X, d), con d la métrica discreta, A es denso si y sólo si $A = X$.

Teorema 2.49. *En (X, d), $A \subset X$ es denso si y sólo el único cerrado que contiene a A es X.*

Teorema 2.50. *En (X, d), $A \subset X$ es denso si y sólo A corta a cualquier abierto no vacío.*

Proposición 2.51. *En (X, d), para cada $A \subset X$ los conjuntos $A \cup (X - \overline{A})$ y $(X - A) \cup \overset{\circ}{A}$ son densos.*

Definición 2.19. (X, d) se llama *separable* si existe un subconjunto denso y contable. $A \subset X$ se llama *separable* si (A, d_A) lo es.

Ejemplos 2.12. Algunos ejemplos de conjuntos separables son:

(i) $(\mathbb{R}, d_u)$ es separable, ya que $\mathbb{Q}$ es denso;

(ii) (X, d), con d la métrica discreta, es separable si y sólo si X es contable.

2.8. Ejercicios

♣1.- Si ρ es una pseudométrica sobre X y $x, y \in X$, se define la relación $x \sim y$ si y sólo si $\rho(x, y) = 0$. Se pide:

(i) probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en X;

(ii) dados $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$, tales que $x_1 \sim x_2$ e $y_1 \sim y_2$, probar que $\rho(x_1, y_1) = \rho(x_2, y_2)$;

(iii) sean $Y = X/\sim$, $[x], [y] \in Y$. Dados $a \in [x]$ y $b \in [y]$, se define $d([x], [y]) = \rho(a, b)$. Probar que d es una métrica en Y, que se llama *asociada a* ρ.

2.- Sea $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, y $d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = |x_k - y_k|$, donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$. ¿Es d una métrica en $\mathbb{R}^n$?

3.- Decidir si las siguientes funciones son métricas sobre $\mathbb{R}$: $d_1(x, y) = |x^2 - y^2|$, $d_2(x, y) = |x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}|$, $d_3(x, y) = e^{|x-y|}$ y $d_4(x, y) = e^{\frac{1}{|x-y|}}$.

4.- Dadas $d_1, \cdots, d_n$ métricas sobre X, se pide:

(i) probar que $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x,y)$ es una métrica sobre X;

(ii) demostrar que $d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} d_i(x,y)$ es una métrica sobre X;

(iii) ¿define $d(x,y) = \min_{1 \le i \le n} d_i(x,y)$ una métrica sobre X?

5.- Sean (X,d) e (Y,ρ) espacios métricos y $f \colon X \longrightarrow Y$. Se pide:

(i) sea $D \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $D(x,y) = \rho(f(x), f(y))$; ¿cuándo es D una métrica en X?

(ii) si $(X,d) = (Y,\rho) = (\mathbb{R}, d_u)$ y $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente; ¿es D métrica?

(iii) sea $f(x) = x^3$ como en (ii); ¿es D equivalente a d_u?

6.- Sea (X,d) un espacio métrico. Para $i = 1, 2$, sean las aplicaciones $d_i \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $d_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ y $d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d_1 y d_2 son métricas acotadas sobre X.

7.- Sea $\mathcal{S}_C$ el conjunto de las sucesiones convergentes de números reales. Dadas las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_C$, se define $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n|$; ¿es d métrica sobre $\mathcal{S}_C$?

8.- Sea $\mathcal{S}_A$ el conjunto de las sucesiones acotadas de números reales (es decir, $\{x_n\} \in \mathcal{S}_A$ si y sólo si existe $K > 0$ tal que $|x_n| \le K$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Probar que la igualdad $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ define una métrica en $\mathcal{S}_A$.

9.- Sean $\mathbb{R} \supset A \neq \emptyset$ y $\mathcal{B}(A) = \{f \colon A \longrightarrow \mathbb{R} : \exists K > 0 : \forall x \in A, |f(x)| \le K\}$ el conjunto de las funciones acotadas sobre A. Probar que la función $d \colon \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$, es una métrica en $\mathcal{B}(A)$.

♣10.- Sea $X = \{f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$. Probar que las siguientes aplicaciones son distancias en X: $d_1(x,y) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ y $d_2(x,y) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.
Si $Y = \{f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ integrables en el sentido de Riemann}\}$, ¿es d_1 una distancia sobre Y?

11.- Se considera la recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Sea la aplicación $f \colon \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1,1]$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ si $x \in \mathbb{R}$, $f(-\infty) = -1$ y $f(\infty) = 1$. Probar que la aplicación $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre $\overline{\mathbb{R}}$.

12.- Probar que las siguientes aplicaciones son métricas. En los espacios métricos obtenidos, caracterizar las bolas, el interior, la clausura y la frontera:

(i) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si} \quad x_1 = y_1 \\ |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| & \text{si} \quad x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

(ii) $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si} \quad sg(x) = sg(y) \\ |x + y| + 1 & \text{si} \quad sg(x) \neq sg(y) \end{cases}$$

(donde 0 se considera con signo positivo),

(iii) $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si} \quad x \neq y, x > 0, y > 0 \\ |x - y| & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(iv) $d\colon [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in [0, \infty)$,

$$d(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

(v) $d\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in [0,1]$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 2 - x - y & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

(vi) $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x + a| + |y + a| & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

(vii) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} & \text{si} \quad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} & \text{si} \quad x_1^2 + x_2^2 \neq y_1^2 + y_2^2 \end{cases}$$

(viii) $d\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in \mathbb{N}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

(ix) $d\colon [0,\infty)\times[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ donde para $x,y\in[0,\infty)$,

$$d(x,y)=\begin{cases}\text{máx}\{x,y\} & \text{si} \quad x\neq y\\ 0 & \text{si} \quad x=y\end{cases}$$

(x) $d\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ donde para $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$d(x,y)=\begin{cases}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} & \text{si} \quad x_1y_2=y_1x_2\\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2} & \text{si} \quad x_1y_2\neq y_1x_2\end{cases}$$

13.- Probar que hay exactamente dos isometrías de $(\mathbb{R},d_u)$ en $(\mathbb{R},d_u)$, que dejan fijo un punto dado $a\in\mathbb{R}$.

14.- Probar que estas funciones son isometrías entre los espacios euclídeos dados:

(i) si $a\in\mathbb{R}^n$, la *traslación de vector* a, $t_a\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, dada por $t_a(x)=a+x$,;

(ii) si $\varphi\in\mathbb{R}$, la *rotación elemental de ángulo* φ, $r_\varphi\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, dada por

$$r_\varphi(x_1,x_2)=(x_1\cos(\varphi)-x_2\sin(\varphi),x_1\sin(\varphi)+x_2\cos(\varphi));$$

(iii) la *aplicación antipodal*, $a\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, dada por $a(x)=-x$.

15.- En el espacio métrico (X,d), para $a\in X$ y $r>0$, probar las propiedades siguientes:

(i) $\overline{B}(a,r)=\bigcap_{s>r}B(a,s)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B\left(a,r+\frac{1}{n}\right)$;

(ii) $\{a\}=\bigcap_{s>0}B(a,s)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B\left(a,\frac{1}{n}\right)$;

(iii) $B(a,r)=\bigcup_{s<r}\overline{B}(a,s)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{B}\left(a,r-\frac{1}{n}\right)$;

(iv) $\overline{B(a,r)}\subset\overline{B}(a,r)$;

(v) $B(a,r)\subset\overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ}$, y

(vi) $\text{fr}(B(a,r))\cup\text{fr}(\overline{B}(a,r))\subset S(a,r)$.

16.- Un espacio métrico (X, d) se llama *discreto*, si todo átomo (subconjunto formado por un único punto) es abierto. Probar:

(i) (X, d) es discreto si y sólo si todos los subconjuntos de X son abiertos;

(ii) (X, d) es discreto si y sólo si todos los subconjuntos de X son cerrados;

(iii) si d es la métrica discreta sobre X, entonces (X, d) es discreto;

(iv) el recíproco de (iii) no es cierto, es decir, existen espacios métricos discretos (X, d) para los cuales d no es la métrica discreta;

(v) si la intersección arbitraria de abiertos es abierta, entonces (X, d) es discreto;

(vi) si X es un conjunto finito, entonces (X, d) es discreto;

(vii) si $Y \subset X$, entonces (Y, d_Y) es discreto si y sólo si $Y \cap Y' = \emptyset$;

(viii) dar un ejemplo de dos subconjuntos discretos de la recta real, cuya unión no sea discreta.

♣**17.-** Sean (X, d), $\emptyset \neq A \subset X$, $r > 0$ y $V(A, r) = \bigcup\limits_{x \in A} B(x, r)$. Se pide probar:

(i) $V(A \cap B, r) \subset V(A, r) \cap V(B, r)$,

(ii) si $s < r$, $V(A, s) \subset V(A, r)$,

(iii) $V(A \cup B, r) = V(A, r) \cup V(B, r)$.

(iv) $d(a, A) = \text{ínf}\{r > 0 : a \in V(A, r)\}$,

(v) $\overline{A} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V\left(A, \frac{1}{n}\right)$. Concluir que $d(a, A) = 0$ si y sólo si $a \in \overline{A}$.

♣**18.-** Sean (X, d) un espacio métrico y R una relación de equivalencia sobre X verificando:

a) para cada $x \in X$, el conjunto $C_x = \{y \in X : xRy\}$ es cerrado en X,

b) si $[x] \neq [y] \in X/R$, todo representante $a \in [x]$, verifica que $d(a, C_y) = d(C_x, C_y)$.

Para $[x], [y] \in X/R$, se define $\delta([x], [y]) = d(C_x, C_y)$. Se pide:

(i) probar que δ es un distancia en X/R. Se dice que $(X/R, \delta)$ es el *espacio métrico cociente de* (X, d) *por* R;

(ii) sea $p\colon X \longrightarrow X/R$ la proyección canónica. Probar que para cada $x, y \in X$, se cumple la desigualdad $\delta(p(x), p(y)) \leq d(x, y)$. Hallar $p(B(a, r))$, si $a \in X$;

(iii) si A es abierto en (X, d), probar que $p(A)$ es abierto en $(X/R, \delta)$. Demostrar que $B \subset X/R$ es abierto en $(X/R, \delta)$, si y sólo si $p^{-1}(B)$ es abierto en (X, d);

(iv) probar que $B \subset X/R$ es cerrado en $(X/R, \delta)$, si y sólo si $p^{-1}(B)$ es cerrado en (X, d);

(v) sea $(X, d) = (\mathbb{R}, d_u)$ y la relación sobre $\mathbb{R}$ dada por (xRy si y sólo si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$) :

1) demostrar que se cumplen a) y b);

2) probar que existe un cerrado A en $(\mathbb{R}, d_u)$, tal que $p(A)$ no es cerrado en $(\mathbb{R}/R, \delta)$;

3) sea la aplicación $f\colon \mathbb{R}/R \longrightarrow \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ definida por $f([x]) = (\cos(x), \sin(x))$. Probar que f está bien definida y es biyectiva; ¿cuál es la distancia δ_0 obtenida sobre $\mathbb{S}^1$ al transportar δ por f? Probar que δ_0 es equivalente a la distancia inducida por la distancia euclídea de $\mathbb{R}^2$.

19.- Sea el espacio métrico (X, d), $a \in X$ y $\emptyset \neq A \subset X$. Si $d(a, A) = 2$, probar que existe $r > 0$ tal que $d(x, A) > 1$, si $x \in B(a, r)$.

20.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$. Probar:

(i) si A es abierto, para cada $B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $A \cap \overline{B} = \emptyset$;

(ii) si A es abierto, probar que para cada $B \subset X$, es $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ y $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$;

(iii) probar que A es abierto si y sólo si para cada $B \subset X$, es $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

♣**21.-** Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada subconjunto A de X, definimos $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ y $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Se pide:

(i) si A es abierto (respectivamente, cerrado), probar que $A \subset \alpha(A)$ (respectivamente, $\beta(A) \subset A$);

(ii) probar que para cada $A \subset X$, es $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ y $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$;

(iii) encontrar conjuntos A en $(\mathbb{R}, d_u)$ tales que sean distintos los conjuntos A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$, $\alpha(\overset{\circ}{A})$ y $\beta(\overline{A})$;

(iv) si A, B son abiertos disjuntos, entonces $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$ son también disjuntos.

22.- Sea (X,d) un espacio métrico. Dados A, B y $\{A_i\}_{i\in I}$ subconjuntos de X, probar:

(i) $\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}^{\circ} \subset \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$ y $\bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}^{\circ}$;

(ii) si $A \subset B$ entonces $A' \subset B'$. Además, $(A\cap B)' \subset A' \cap B'$, $(A\cup B)' = A' \cup B'$, $(A')' \subset A'$ (es decir, A' es cerrado), $(\bigcap_{i\in I} A_i)' \subset \bigcap_{i\in I} A_i'$ y $\bigcup_{i\in I} A_i' \subset (\bigcup_{i\in I} A_i)'$;

(iii) $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$, $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A-B}$ y $(\overline{A})' = A'$.

♣**23.-** Sea (X,d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos en X tales que existe un $\delta > 0$ tal que si $i \neq j$, entonces $d(A_i, A_j) \geq \delta$. Probar que $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.

♣**24.-** Sea (X,d) un espacio métrico. Una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X se llama *localmente finita* si para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \cap C_i \neq \emptyset$ sólo para un número finito de $i \in I$. Se pide:

(i) probar que $\{B(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ no es localmente finita en $(\mathbb{R}, d_u)$, pero si lo es la familia de sus complementarios;

(ii) dar una familia de conjuntos abiertos localmente finita en $(\mathbb{R}, d_u)$ cuya unión sea $\mathbb{R}$;

(iii) si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia localmente finita, probar que cada punto de X pertenece a lo más a un número finito de conjuntos C_i (es decir, la familia es *puntualmente finita*). Probar que no toda familia puntualmente finita es localmente finita;

(iv) si la familia $\{C_i\}_{i\in I}$ es localmente finita, probar que $\overline{\bigcup_{i\in I} C_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{C_i}$. Concluir de aquí, que la reunión localmente finita de cerrados es cerrada.

25.- En (X,d), probar:

(i) si $A \subset X$, $\overline{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{x\in A} B(x, \frac{1}{n})$;

(ii) todo cerrado puede expresarse como una intersección numerable de abiertos;

(iii) todo abierto puede escribirse como una reunión numerable de cerrados.

26.- Dado un espacio métrico (X,d) y $A,B\subset X$ no vacíos, probar:

(i) $d(A,B)=d(\overline{A},\overline{B})$.

(ii) $\overline{A}=\overline{B}$ si y sólo si para cada $x\in X$, es $d(x,A)=d(x,B)$.

27.- Sea (X,d) un espacio métrico. Probar:

(i) si A no posee puntos aislados, entonces $\overline{A}$ tampoco los posee;

(ii) si X no posee puntos aislados, tampoco tendrán puntos aislados los abiertos de X.

♣**28.-** Sea X un conjunto numerable. Probar que puede definirse sobre él una métrica, tal que ninguno de sus puntos sea aislado.

29.- Sea (X,d) un espacio métrico, donde X posee más de un punto; ¿pueden ser $\emptyset$ y X los únicos abiertos?

30.- Sean los espacios métricos $(X_1,d_1),\cdots,(X_n,d_n)$. Consideremos su producto cartesiano $X=X_1\times\cdots\times X_n$ y $d=d_{\text{máx}}$ la métrica del máximo sobre él. Probar:

(i) $\overset{\circ}{A}_1\times\cdots\times\overset{\circ}{A}_n=\overset{\circ}{\overbrace{A_1\times\cdots\times A_n}}$ y $\overline{A_1\times\cdots\times A_n}=\overline{A_1}\times\cdots\times\overline{A_n}$;

(ii) $A_1\times\cdots\times A_n$ es abierto en (X,d) si y sólo si A_i es abierto en (X_i,d_i) para cada $i\in I$ (análogamente para cerrados).

♣**31.-** Sea (X,d) un espacio métrico. Se pide:

(i) si $x\neq y\in X$, probar que existen U y V abiertos disjuntos en X, tales que $x\in U$, $y\in V$ y $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$;

(ii) sean A y B conjuntos cerrados y disjuntos en X. Probar que existen abiertos U y V disjuntos en X, tales que $A\subset U$ y $B\subset V$.

32.- Sea (X,d) y Δ la diagonal en el espacio métrico producto $(X\times X,D)$. Si el punto $x=(x_1,x_2)\notin\Delta$, probar que $D(x,\Delta)>0$.

♣**33.-** Un espacio métrico (X,d) se llama *ultramétrico*, si para cada $x,y,z\in X$, se verifica la desigualdad $d(x,y)\leq\text{máx}\{d(x,z),d(z,y)\}$. Demostrar:

(i) si $d(x,z)\neq d(y,z)$, entonces $d(x,y)=\text{máx}\{d(x,z),d(z,y)\}$;

(ii) $B(a,r)$ y $\overline{B}(a,r)$ son abiertos y cerrados a la vez;

(iii) si $y\in B(x,r)$, entonces $B(x,r)=B(y,r)$; ¿se tiene un resultado análogo para las bolas cerradas?

(iv) si $B(x,r)$ y $B(y,s)$ se cortan, entonces una de estas bolas contiene a la otra (lo mismo para bolas cerradas);

(v) si $B(x,r)$ y $B(y,r)$ son distintas y están contenidas en $\overline{B}(z,r)$, su distancia es r;

(vi) si d es la métrica discreta, probar que (X,d) es un espacio ultramétrico.

34.- Sea (X,d) un espacio métrico. Se pide:

(i) sea $\emptyset \neq A \subset X$. Si (X,d) es separable, probar que A es separable (es decir, el subespacio métrico (A,d_A) es separable);

(ii) si A es separable, probar que $\overline{A}$ es separable;

(iii) si $A_1,\cdots,A_n$ son separables, entonces $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es separable.

35.- Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $A \subset X$ tal que para cada $a \in A$, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a,\varepsilon_a) \cap A$ es contable. Si (X,d) es separable, probar que A es contable.

36.- Sea (X,d) un espacio métrico separable y $\emptyset \neq A \subset X$. Se pide:

(i) probar que el conjunto de los puntos aislados de A es contable;

(ii) si $A' = \emptyset$, probar que A es contable;

(iii) si A es discreto en X, probar que A es contable.

♣37.- Se dice que (X,d) posee la *propiedad de intersección contable*, si dada cualquier familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados, tal que $\bigcap\limits_{i\in J} F_i \neq \emptyset$ para cada subconjunto contable J de I, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Probar que un espacio métrico (X,d) es separable si y sólo si posee la propiedad de intersección contable.

38.- Si (X,d) es separable, probar toda familia de abiertos dos a dos disjuntos es contable.

39.- Sea (X,d) un espacio métrico. Si $A,B \subset X$, A es abierto y B es denso en X, probar que $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.

40.- Probar que la separabilidad en espacios métricos se conserva bajo equivalencias métricas y topológicas y bajo isometrías.

♣41.- Sea $X = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$. Se consideran las distancias d_1 y d_2 definidas en el ejercicio 10. Con las notaciones obvias, se pide:

(i) sea $f(x) = 2$ para cada $x \in [0,1]$. Calcular $B_{d_2}(f,1)$;

(ii) sean $r > 0$ y $g \in X$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 4 - \frac{4x}{r} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{r}{2} \\ 2 & \text{si} \quad \frac{r}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Probar que $g \in B_{d_1}(f, r)$, pero $g \notin B_{d_2}(f, 1)$;

(iii) Deducir que d_1 y d_2 no son topológicamente equivalentes. Sin embargo, $\tau_{d_1} \subset \tau_{d_2}$.

42.- Dado (X, d), probar que X es una reunión contable de conjuntos acotados.

43.- Probar que dos bolas abiertas (respectivamente, cerradas) del mismo radio son isométricas en $(\mathbb{R}^n, d_u)$.

44.- Sea (X, d) un espacio métrico y $\emptyset \neq A \subset X$. Se considera el subespacio métrico (A, d_A). Si $B \subset A$, probar:

(i) $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$, donde $\overline{B}^A$ denota la clausura de B en (A, d_A);

(ii) $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}{}^A$ y $\overset{\circ}{B}{}^A = (X - \overline{A - B}) \cap A$, donde $\overset{\circ}{B}{}^A$ denota el interior de B en (A, d_A);

(iii) si $B \subset A$ es cerrado en (A, d_A), probar que B es cerrado en (X, d) si y sólo si $\overline{B} \subset A$.

45.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ tales que $X = A \cup B$. Sea $C \subset A \cap B$. Probar que C es abierto en (X, d) si y sólo si lo es en (A, d_A) y en (B, d_B).

46.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ tales que $X = \overset{\circ}{A} \cup B = A \cup \overset{\circ}{B}$. Probar que para cada $C \subset X$, es $\overline{C} = \overline{C \cap A}^A \cup \overline{C \cap B}^B$.

47.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$, probar:

(i) si $\mathrm{fr}(A) \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$, entonces $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$,

(ii) si $\mathrm{fr}(A) \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$,

(iii) si $\mathrm{fr}(A) \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$, entonces $\mathrm{fr}(A \cap B) = (\overline{A} \cap \mathrm{fr}(B)) \cup (\mathrm{fr}(A) \cap \overline{B})$,

(iv) $\mathrm{fr}(A \cup B) \subset \mathrm{fr}(A) \cup \mathrm{fr}(B)$,

(v) si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces $\mathrm{fr}(A \cup B) = \mathrm{fr}(A) \cup \mathrm{fr}(B)$,

(vi) $\mathrm{fr}(A) = \emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado a la vez,

(vii) si A y B son abiertos, entonces:

$$(A\cap \mathrm{fr}(B))\cup(B\cap \mathrm{fr}(A)) \subset \mathrm{fr}(A\cap B) \subset (A\cap \mathrm{fr}(B))\cup(\mathrm{fr}(A)\cap B)\cup(\mathrm{fr}(A)\cap \mathrm{fr}(B)).$$

48.- Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ abierto (respectivamente, cerrado). Probar:

(i) $\overbrace{\mathrm{fr}(A)}^{\circ} = \emptyset$,

(ii) $\overset{\circ}{A} \cup \overbrace{X - A}^{\circ}$ es denso en X,

(iii) buscar un ejemplo en el que el conjunto de (ii) no sea denso,

(iv) probar que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

49.- Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $a \in X$, tales que $A \cap B(a,r) \neq \emptyset$ y $\delta(A) < r$. Probar que $A \subset B(a,2r)$.

♣**50.-** Sean (X,d) un espacio métrico acotado y $\Phi(X)$ la familia de los cerrados no vacíos de X. Dados $A,B \in \Phi(X)$, se define:

$$\rho(A,B) = \text{máx}\{\sup_{a\in A}\{d(a,B)\}, \sup_{b\in B}\{d(A,b)\}\}.$$

Probar que ρ define una métrica sobre $\Phi(X)$. $\rho(A,B)$ se conoce como la *distancia de Hausdorff* entre A y B. Probar que existe una isometría entre (X,d) y un subespacio cerrado de $(\Phi(X),\rho)$.

51.- Probar que la acotación en espacios métricos se conserva bajo isometrías y equivalencias métricas, pero no bajo equivalencias topológicas.

52.- Sea (X,d) y $A \subset X$. Probar:

(i) $\delta(A) = \delta(\overline{A})$, luego, A es acotado si y sólo si $\overline{A}$ lo es;

(ii) ¿puede decirse lo mismo de $\overset{\circ}{A}$ y A?

♣**53.-** Probar que todo cerrado de $(\mathbb{R}^n,d_u)$, se puede escribir como la frontera de algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

54.- Sea A un conjunto no vacío y acotado superiormente en $(\mathbb{R},d_u)$, se pide:

(i) probar que si $\sup(A) \notin A$, entonces $\sup(A) \in A'$.

(ii) si A es abierto en $(\mathbb{R},d_u)$, entonces $\sup(A) \notin A$.

55.- En el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_u)$, calcular el interior, el derivado, la clausura y la frontera de los siguientes conjuntos: $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $\{0 < x < 1 : x$ posee representación decimal con 0 en el primer dígito $\}$, $\{\frac{1}{x} : x \neq 0\}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$, $\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \cdots, \frac{1}{n}, n, \cdots\}$, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ (donde $\alpha \notin \mathbb{Q}$).

56.- Sea $(\mathbb{R}, d_u)$ y el conjunto $A = [0, 1) \cup (1, 3] \cup \{5\}$. Se pide:

(i) probar que $\{5\}$ es abierto y cerrado en (A, d_A);

(ii) lo mismo para $(1, 3]$;

(iii) calcular $\overline{[0, 1)}^A$ y $\overbrace{[0, \frac{1}{2})^A}^{\circ}$;

(iv) probar que $\{5\}$ no es aislado en $(\mathbb{R}, d_u)$, pero si lo es en (A, d_A).

57.- En $(\mathbb{R}^2, d_u)$, calcular el interior, el derivado, la clausura y la frontera de los siguientes conjuntos: $\{(x_1, x_2) : x_1(x_1-1) = 0\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1^2+x_2^2 > 0\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1^2+x_2^2 \geq 2\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1 < 0\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1 \leq 5, x_2 > 0\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, $\{(x_1, x_2) : x_2 = \lambda x_1\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

58.- Sea $(\mathbb{R}^2, d_u)$ y $A = \{(x_1, x_2) : |x_1| < 1, |x_2| < 2\}$. Probar que para $(a_1, a_2) \in A$ y $r \geq 2\sqrt{5}$, se tiene que $B_A((a_1, a_2), r) = A$.

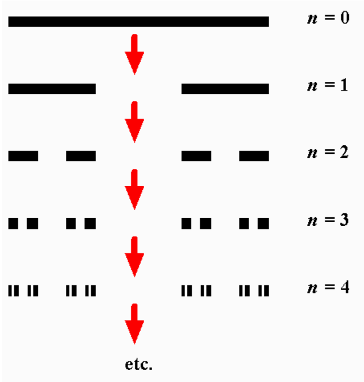
59.- Se pide:

(i) sea $(\mathbb{R}, d_u)$, $A = \mathbb{N}$ y $B = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$; calcular $d_u(A, B)$;

(ii) sea $(\mathbb{R}^2, d_u)$, $A = \{(x_1, x_2) : x_1x_2 = 1, x_1 > 0\}$ y $B = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0\}$; calcular $d_u(A, B)$;

(iii) probar que tanto en (i) como en (ii), A y B son conjuntos cerrados y disjuntos.

♣60.- Sea $([0, 1], d_u)$. Se divide $[0, 1]$ en tres intervalos de la misma amplitud, se elimina el intervalo abierto central $\delta = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (que se llamará intervalo abierto de tipo 1) y se conservan los intervalos cerrados $\Delta_0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $\Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1]$, que se llamarán intervalos cerrados de tipo 1. Se divide cada intervalo cerrado de tipo 1 en tres intervalos de la misma amplitud. Se eliminan de nuevo los intervalos abiertos centrales (intervalos abiertos de tipo 2), $\delta_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $\delta_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ respectivamente, y se conservan los intervalos cerrados (de tipo 2) resultantes: $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $\Delta_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $\Delta_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$. Se continúa de este modo el proceso, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$, 2^n intervalos cerrados $\Delta_{i_1\cdots i_n}$ de tipo n donde i_j es 0 o 1. Cada intervalo cerrado de tipo n se divide en tres partes de la misma amplitud, conservando dos intervalos cerrados $\Delta_{i_1\cdots i_n 0}$ y $\Delta_{i_1\cdots i_n 1}$ (llamados intervalos cerrados de tipo $n+1$) y eliminando cada intervalo abierto $\delta_{i_1\cdots i_n}$ de tipo $n+1$ que queda entre ellos.



Sea C_n la reunión de los intervalos cerrados de tipo n. Sea $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. C se llama *conjunto perfecto de Cantor* o *conjunto ternario de Cantor*. Se pide probar:

(i) C_n es cerrado en $[0,1]$ para cada n;

(ii) C es un conjunto cerrado no vacío;

(iii) todo número $x \in [0,1]$, admite un desarrollo triádico $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, donde $a_n \in \{0,1,2\}$, y se representa del modo: $x = 0.a_1a_2\cdots$. Si x admite un desarrollo triádico que no contiene la cifra 1, entonces este desarrollo es único. Probar que $x \in [0,1]$ pertenece a C si y sólo si x admite un desarrollo triádico que no contiene a la cifra 1. Concluir que existe una biyección entre los conjuntos $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ y C, y que por lo tanto C tiene la potencia del continuo, es decir, es no contable;

(iv) si se suman las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso, se obtiene la longitud del intervalo $[0,1]$;

(v) C no posee puntos aislados en $[0,1]$;

(vi) $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

♣61.- Sea $(\mathbb{R}^n, d_u)$. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *convexo* si para cada $x, y \in A$, el segmento que los une $[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$, está contenido en A. Se pide probar:

(i) la intersección arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo (admitiendo que $\emptyset$ es convexo);

(ii) si A y B son convexos y $\lambda \in \mathbb{R}$, los conjuntos $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ y $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ son convexos;

(iii) si A es convexo y $t_1, \cdots, t_m \geq 0$, entonces $t_1 A + \cdots + t_m A = (t_1 + \cdots + t_m)A$ (donde $t_1 A + \cdots + t_m A = \{t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m : a_i \in A\}$). Lo anterior puede ser falso si A no es convexo;

(iv) si $A \subset \mathbb{R}^n$, se llama *envolvente convexa* de A, $co(A)$, a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A. Por (i), $co(A)$ es el menor convexo que contiene a A. Probar que si $A \neq \emptyset$, entonces la envolvente convexa es precisamente

$$co(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} t_i a_i, a_i \in A, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1, m \in \mathbb{N}\}.$$

Cada expresión de la forma $\sum_{i=1}^{m} t_i a_i$, donde $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$, se llama *combinación convexa*. Luego, $co(A)$ es el conjunto de las combinaciones convexas de elementos de A;

(v) si A es convexo, también lo son $\overline{A}$ y $\overset{\circ}{A}$;

(vi) probar que si A es un conjunto convexo y simétrico respecto al origen de coordenadas $0 \in \mathbb{R}^n$ (es decir, $A = \{-x : x \in A\}$), entonces A contiene a una bola abierta centrada en 0;

(vii) si A es convexo, $x \in \overset{\circ}{A}$ e $y \in \overline{A}$, entonces $\{tx + (1-t)y : t \in (0, 1]\} \subset \overset{\circ}{A}$. Deducir que $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ y $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{A}}$;

(viii) si $A \subset \mathbb{R}^n$, se pide:

a) calcular $co(A)$ si $A = S(0, 1)$;

b) probar que $\delta(A) = \delta(co(A))$;

c) si A es abierto, probar que $co(A)$ es abierto;

d) si A es finito, probar que $co(A)$ es cerrado;

e) si $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado, probar que $co(A)$ es cerrado;

f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = x^2\}$ es cerrado, pero $co(A)$ no lo es;

(ix) sea A convexo en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $a \in A$ es un *punto extremal* de A, si $A - \{a\}$ es convexo o vacío. Probar:

a) si A es abierto, entonces no posee puntos extremales;

b) dar un ejemplo de cerrado convexo sin puntos extremales;

c) calcular los puntos extremales de $\overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$;

d) si $B \subset \mathbb{R}^n$ sea: $B^* = \{a \in B : \forall [x,y] \subset B : a \in [x,y],$ es $a = x$ ó $a = y\}$.
Probar que A^* es el conjunto de los puntos extremales de A y $A^* = (A - \overset{\circ}{A})^*$.

62.- Sea $S = (\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1) \cup \{(1,0)\}$. Probar que para cada recta R en $\mathbb{R}^2$, $R \cap S$ es abierto en (R, d_u), pero S no es abierto en $(\mathbb{R}^2, d_u)$.

63.- En el plano euclídeo $(\mathbb{R}^2, d_u)$, se consideran los puntos $U = (0,1)$, $V = (0,-1)$, $O = (0,0)$, $P = (1,0)$, $Q = (2,0)$, $R = (4,0)$, $S = (2+\sqrt{5}, 0)$ y $T = (5,0)$. Sea

$$E = \{U, V, T\} \cup [O, P) \cup (P, Q] \cup [R, S)$$

(con esta notación se indican los intervalos correspondientes sobre el eje de abscisas).

(i) Probar que $\overset{\circ}{B}_E\,(Q, \sqrt{5})$ es un cerrado en (E, d_E), pero no es una bola cerrada;

(ii) probar que $\overline{B}_E(O,1)$ es un abierto en (E, d_E), pero no es una bola abierta.

64.- Un *número diádico* es un número real que puede expresarse como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es una potencia de 2. El conjunto de los números diádicos en $[0,1]$ se denota por $\mathbb{D}$, y sus elementos son de la forma $m/2^n$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n\}$.
Este conjunto es crucial en la demostración del lema de Urysohn (ver el teorema 3.20), en donde la prueba se hace por inducción sobre este conjunto: el orden sobre $\mathbb{D} - \{0\}$ está dado por:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots,$$

es decir, se agrupan los elementos dependiendo de la potencia n de su denominador 2^n, y fijado este valor, se arreglan los números en el orden indicado por los numeradores: 1, 3, 5, $\dots, 2^n - 1$. Por ejemplo, el inmediato sucesor de $\frac{2^n-1}{2^n}$ es $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Este conjunto es *pequeño* desde el punto de vista conjuntista: como $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, el conjunto de los números diádicos es contable. Sin embargo, es *topológicamente* grande, al ser $\mathbb{D}$ denso en $([0,1], d_u)$.

Continuidad en espacios métricos

Primero, una mirada;
luego, el toque de fuego
de las manos; y luego,
la sangre acelerada
y el beso que subyuga.

“Abrojos”
Rubén Darío (1867 -1916)

3.1. Aplicaciones continuas

Sean (X,d) e (Y,ρ) espacios métricos y $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ una función.

Definición 3.1. Si $a \in X$, se dice que f *es continua en* a, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a,\varepsilon) > 0$ tal que para cada $x \in X$ verificando $d(x,a) < \delta$, es $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Observación 3.1. Si $(X,d) = (Y,\rho) = (\mathbb{R}, d_u)$, esta definición es precisamente la usual de continuidad del Análisis Real.

Lema 3.1. *f es continua en $a \in X$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a,\varepsilon) > 0$ tal que $f\left(B_X(a,\delta)\right) \subset B_Y(f(a),\varepsilon)$.*

Lema 3.2. *f es continua en $a \in X$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, $f^{-1}\left(B_Y(f(a),\varepsilon)\right)$ es un abierto que contiene a a.*

Definición 3.2. Se dice que f *es continua en* X (o simplemente *continua*), si es continua en a para cada $a \in X$.

Ejemplos 3.1. Algunos ejemplos de funciones continuas son los siguientes:

(i) si $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ es constante, es continua;

(ii) $1_X\colon (X,d)\longrightarrow(X,d)$ es continua;

(iii) si el espacio (X, d) es discreto para cualquier otro espacio métrico (Y, ρ) y cualquier función f, es $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua.

Observación 3.2. $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ no es continua en $a \in X$ si verifica cualquiera de las dos condiciones equivalentes siguientes:

(i) existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ pero es $\rho(f(x_\delta), f(a)) > \varepsilon_0$;

(ii) existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $\delta > 0$ es $f\left(B_X(a, \delta)\right) \not\subset B_Y(f(a), \varepsilon_0)$.

Teorema 3.3. $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ *es continua si y sólo si para cada* V *abierto en* (Y, ρ), $f^{-1}(V)$ *es abierto en* (X, d).

Demostración: Si V abierto en (Y, ρ) y $a \in f^{-1}(V)$, como f es continua en a, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ tal que $f\left(B_X(a, \delta)\right) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$. Luego $B_X(a, \delta) \subset f^{-1}\left(B_Y(f(a), \varepsilon)\right)$. Como $f(a) \in V$ y V es abierto en (Y, ρ), existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B_Y(f(a), \varepsilon_a) \subset V$. Así, $B_X(a, \delta) \subset f^{-1}\left(B_Y(f(a), \varepsilon)\right) \subset f^{-1}(V)$, y queda probado que $f^{-1}(V)$ es abierto en (X, d). Y recíprocamente, por el lema 3.2, para cada $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto $f^{-1}\left(B_Y(f(a), \varepsilon)\right)$ es abierto en (X, d). Como $a \in f^{-1}\left(B_Y(f(a), \varepsilon)\right)$, debe existir $\delta > 0$ tal que $B_X(a, \delta) \subset f^{-1}\left(B_Y(f(a), \varepsilon)\right)$, con lo que queda probada la continuidad de la función. ∎

Observación 3.3. Las funciones continuas no transforman abiertos en abiertos: la función $f\colon (\mathbb{N}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ dada por $f(n) = n$ es continua, pero $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ no es abierto en $(\mathbb{R}, d_u)$.

Por dualidad entre abiertos y cerrados, puede probarse la siguiente propiedad:

Teorema 3.4. $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ *es continua si y sólo si para cada* F *cerrado en* (Y, ρ), $f^{-1}(F)$ *es cerrado en* (X, d).

Observación 3.4. Las funciones continuas no transforman cerrados en cerrados: la función $f\colon (\mathbb{Q}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ dada por $f(x) = x$ es continua, pero $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ no es cerrado en $(\mathbb{R}, d_u)$.

Teorema 3.5. $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ *es continua si y sólo si para cada subconjunto* $A \subset X$ *es* $f(\overline{A}^X) \subset \overline{f(A)}^Y$.

Demostración: Como $\overline{f(A)}^Y$ es cerrado en (Y, ρ), el teorema 3.4 garantiza que $f^{-1}\left(\overline{f(A)}^Y\right)$ es cerrado en (X, d). Como $A \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}^Y\right)$, la inclusión pasa a la clausura, es decir, $\overline{A}^X \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}^Y\right)$, y se deduce que $f(\overline{A}^X) \subset \overline{f(A)}^Y$. Recíprocamente, sea F cerrado en (Y, ρ); la hipótesis garantiza que $f(\overline{f^{-1}(F)}^X) \subset \overline{f(f^{-1}(F))}^Y \subset \overline{F}^Y = F$. Tomando imágenes recíprocas, se deduce que $\overline{f^{-1}(F)}^X \subset f^{-1}(F)$, y por el teorema 3.4, se deduce la continuidad de f. ∎

Observación 3.5. La igualdad no es cierta en general en el teorema 3.5: en efecto, la función $f\colon (\mathbb{Q}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ dada por $f(x) = x$ es continua, y $f(\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}}) = f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Teorema 3.6. *Sean $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ y $g\colon (Y, \rho) \longrightarrow (Z, \delta)$ aplicaciones entre espacios métricos. Entonces:*

(i) si f es continua en a y g lo es en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a;

(ii) si f es continua en X y g lo es en Y, entonces $g \circ f$ es continua en X.

Definición 3.3. $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva, continua y f^{-1} es también continua. Se dice que (X, d) es homeomorfo a (Y, ρ).

Lema 3.7. *La relación* "ser homeomorfo" *es una relación de equivalencia sobre la familia de todos los espacios métricos.*

Observación 3.6. Una aplicación biyectiva y continua entre dos espacios métricos no tiene porque ser un homeomorfismo: como $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables, existe una función biyectiva $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. La función $f\colon (\mathbb{N}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{Q}, d_u)$ es biyectiva y continua (ya que $(\mathbb{N}, d_u)$ es un espacio discreto), pero $f^{-1}\colon (\mathbb{Q}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{N}, d_u)$ no es continua, ya que $\{0\}$ es abierto en $(\mathbb{N}, d_u)$, pero $f^{-1}\{0\}$ no es abierto en $(\mathbb{Q}, d_u)$.

Proposición 3.8. *La composición de homeomorfismos es un homeomorfismo.*

Proposición 3.9. *Los espacios (X, d_1) y (X, d_2) son topológicamente equivalentes si y sólo si $1_X\colon (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ es un homeomorfismo.*

Lema 3.10. *Toda isometría es un homeomorfismo.*

3.2. Aplicaciones continuas y subespacios

Proposición 3.11. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. La aplicación inclusión $i_A\colon (A, d_A) \longrightarrow (X, d)$ es continua.*

Teorema 3.12. *Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua. Entonces, para cada $A \subset X$, su restricción a A, $f|_A\colon (A, d_A) \longrightarrow (Y, \rho)$, es también continua.*

Demostración: Basta con tener en cuenta que $f_A = f \circ i_A$. ∎

El recíproco sólo es parcialmente cierto:

Teorema 3.13. *Sean* $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *y* $A \subset X$*, tal que* $f|_A\colon (A,d_A) \longrightarrow (Y,\rho)$ *es continua. Entonces,* f *es continua en* $\overset{\circ}{A}$.

Demostración: Sea $a \in \overset{\circ}{A}$, es decir, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B_X(a,\varepsilon_a) \subset A$. Como $f|_A$ es continua en a, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a,\varepsilon) > 0$ tal que $f|_A\,(B_A(a,\delta)) \subset B_Y(f(a),\varepsilon)$. Si se toma $\delta = \delta(a,\varepsilon) \leq \varepsilon_a$, es $B_A(a,\delta) = B_X(a,\delta) \cap A = B_X(a,\delta)$, con lo que para cada $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta = \delta(a,\varepsilon) \leq \varepsilon_a$ tal que $f\,(B_X(a,\delta)) \subset B_Y(f(a),\varepsilon)$, y se obtiene el resultado deseado. ∎

Observación 3.7. En las condiciones anteriores, f no tiene porque ser continua en A: sea la función característica $\chi_{[0,1]}\colon (\mathbb{R},d_u) \longrightarrow (\mathbb{R},d_u)$. La función es continua en $(0,1)$, pero no en $[0,1]$. Sin embargo, la restricción $\chi_{[0,1]}|_{[0,1]}\colon (\mathbb{R},d_u) \longrightarrow (\mathbb{R},d_u)$ es continua, al ser una función constante.

Teorema 3.14. *Sea* $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *continua, entonces* $f\colon (X,d) \longrightarrow (f(X),\rho_{f(X)})$ *es también continua.*

Definición 3.4. Una aplicación continua $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es un *embebimiento* si la función $f\colon (X,d) \longrightarrow (f(X),\rho_{f(X)})$ es un homeomorfismo. Así, (X,d) *puede pensarse* como un subespacio de (Y,ρ), y se dice que *está embebido* en (Y,ρ).

Observación 3.8. Dos espacios métricos pueden estar embebidos uno dentro del otro, sin ser homeomorfos: por ejemplo $(\mathbb{R},d_u)$ se puede embeber en $([0,1],d_u)$, puesto que $(\mathbb{R},d_u)$ es homeomorfo a $((0,1),d_u)$ (ver el ejercicio 30, del apartado 3.5) y la inclusión $i\colon ((0,1),d_u) \longrightarrow ([0,1],d_u)$ es claramente un embebimiento. Por otro lado, la inclusión natural $j\colon ([0,1],d_u) \longrightarrow (\mathbb{R},d_u)$ es un embebimiento. Sin embargo, $(\mathbb{R},d_u)$ y $([0,1],d_u)$ no son espacios homeomorfos.

Teorema 3.15. ***(Principio de prolongación de identidades)*** *Sean* $f,g\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *continuas y* $D \subset X$ *denso. Si* $f|_D = g|_D$*, entonces* $f = g$.

Demostración: Supongamos que $f \neq g$, es decir, existe $a \in X$ tal que $f(a) \neq g(a)$ ($a \notin D$). Para $r_a = \rho(f(a),g(a))$, es $B_Y(f(a),\frac{r_a}{2}) \cap B_Y(g(a),\frac{r_a}{2}) = \emptyset$. Como f y g son continuas en a, para $\varepsilon = \frac{r_a}{2}$ existe $\delta = \delta(a,\varepsilon) > 0$ tal que $f\,(B_X(a,\delta)) \subset B_Y(f(a),\frac{r_a}{2})$ y $g\,(B_X(a,\delta)) \subset B_Y(g(a),\frac{r_a}{2})$. Así, $f\,(B_X(a,\delta)) \cap g\,(B_X(a,\delta)) = \emptyset$. Como D es denso en X, sabemos que $B_X(a,\delta) \cap D \neq \emptyset$, de donde existe $d \in B_X(a,\delta)$ con $f(d) = g(d)$, lo cual es imposible. ∎

Ejemplo 3.1. Sean $f, g\colon (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, donde $f = 1$ y $g = \chi_{\mathbb{Q}}$. Para el denso $\mathbb{Q}$, es $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ y $f \neq g$; como f es continua al ser una función constante, el teorema 3.15 garantiza que g no puede ser continua.

Teorema 3.16. *Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos y supongamos que existe un denso $D \subset X$ y una aplicación continua $f\colon (D, d_D) \longrightarrow (Y, \rho)$. Entonces, f posee una extensión continua a X, $F\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$.*

Observación 3.9. La demostración se dará tras el teorema 4.14.

3.3. Extensiones de funciones continuas

Todo espacio métrico es *completamente regular*, es decir, separa puntos de cerrados a través de funciones continuas en el siguiente sentido:

Proposición 3.17. *En (X, d), si $A \subset X$ es cerrado y $x \notin A$ existe una función continua $f\colon (X, d) \longrightarrow ([0, 1], d_u)$ tal que $f(x) \neq 0$ y $f(A) = 0$.*

Demostración: La función $g\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ definida por $g(y) = d(y, A)$ es continua (proposición 3.26), y basta con tomar $f(y) = \frac{d(y,A)}{d(y,A)+1}$, que cumple las propiedades pedidas. ∎

En el corolario 2.32 habíamos demostrado que todo espacio métrico es *regular*; podemos dar otra prueba basándonos en el anterior resultado:

Corolario 3.18. *En (X, d), si $A \subset X$ es cerrado y $x \notin A$ existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V, tales que $x \in U$ y $A \subset V$.*

Demostración: Si $f\colon (X, d) \longrightarrow ([0, 1], d_u)$ es la función dada en la proposición 3.17, basta con tomar $U = f^{-1}((\lambda, 1])$ y $V = f^{-1}([0, \lambda))$, donde $2\lambda = f(x)$. ∎

El siguiente resultado es esencial para la prueba del teorema 3.20:

Lema 3.19. *Sea (X, d) un espacio métrico y D un conjunto denso en $([0, 1], d_u)$. Supongamos que para cada $t \in D$ existe un abierto U_t tal que $X = \bigcup_{t \in D} U_t$ y si $s < t$, entonces es $\overline{U_s} \subset U_t$. La función $f\colon (X, d) \longrightarrow ([0, 1], d_u)$ definida por $f(x) = \inf\{t \in D : x \in U_t\}$ es entonces continua.*

Demostración: Observemos en primer lugar que:

(i) si $x \in U_t$ es $f(x) \leq t$,

(ii) si $f(x) < t$, es necesariamente $x \in U_t$, y

(iii) si $f(x) > t$, entonces $x \notin \overline{U_t}$.

Para estudiar la continuidad en $x \in X$, distinguimos tres posibilidades:

1) Si $f(x) = 0$, es $x \in U_t$ para cada $t \in D$. Por la densidad de D, para $\varepsilon > 0$ existe $t_\varepsilon \in D$ tal que $t_\varepsilon < \varepsilon$. Entonces $x \in U_{t_\varepsilon}$ y por (i) es $f(U_{t_\varepsilon}) \subset [0, t_\varepsilon] \subset [0, \varepsilon)$.

2) Si $f(x) = 1$, es $x \notin \overline{U_t}$ para cada $t \in D - \{1\}$ por (iii). Por la densidad de D, para $\varepsilon > 0$ existe $t_\varepsilon \in D$ tal que $t_\varepsilon > 1 - \varepsilon$. Entonces $x \in X - \overline{U_{t_\varepsilon}}$ y $f(X - \overline{U_{t_\varepsilon}}) \subset (1 - \varepsilon, 1]$ pues como $x \notin U_{t_\varepsilon}$ es $f(x) \geq t_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ según (ii).

3) Si $f(x) \in (0, 1)$, por la densidad de D, para $\varepsilon > 0$ existen $t_1, t_2 \in D$ tales que $f(x) - \varepsilon < t_1 < f(x) < t_2 < f(x) + \varepsilon$. Entonces es $x \in U_{t_2} - \overline{U_{t_1}}$ y aplicando (i) y (ii) se deduce que $f(U_{t_2} - \overline{U_{t_1}}) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. ∎

En espacios métricos es fácil probar que es posible separar cerrados disjuntos mediante funciones continuas (ver en el ejercicio 45 del apartado 3.5 una demostración puramente métrica). En el teorema siguiente, vamos a dar una prueba topológica basada en la normalidad en espacios métricos (ver la proposición 2.31) de este resultado: aunque es más complicada, esta demostración es válida para espacios topológicos en general y de allí su interés.

Teorema 3.20. *(**Lema de Urysohn**) En (X, d), si $A, B \subset X$ son cerrados disjuntos, existe una función continua (llamada **función de Urysohn**) $f\colon (X, d) \longrightarrow ([0, 1], d_u)$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Demostración: Vamos a hacer la prueba por inducción sobre el conjunto de los números diádicos $\mathbb{D}$ (ver el ejercicio 64 en el apartado 2.8). Por la proposición 2.31, existe $U_{1/2}$ abierto, tal que $A \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset X - B$. Ahora, $\{A, X - U_{1/2}\}$ y $\{\overline{U_{1/2}}, B\}$ son dos pares de cerrados disjuntos, por lo que existen $U_{1/4}$ y $U_{3/4}$ abiertos tales que

$$A \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset X - B.$$

Supongamos que, aplicando reiteradamente la proposición 2.31, hemos construido la familia de abiertos $\left\{U_{k/2^n} : k = 1, \ldots, 2^n - 1\right\}$ verificando

$$A \subset U_{1/2^n} \subset \overline{U_{1/2^n}} \subset \cdots \subset U_{k/2^n} \subset \overline{U_{k/2^n}} \subset \cdots \subset U_{2^n-1/2^n} \subset \overline{U_{2^n-1/2^n}} \subset X - B.$$

Basta con construir $U_{k/2^{n+1}}$ para k impar (para $k = 2m$, $U_{k/2^{n+1}} = U_{m/2^n}$ ya está definido). Como A y $X - U_{1/2^n}$ son cerrados disjuntos, existe un abierto $U_{1/2^{n+1}}$ tal que $A \subset U_{1/2^{n+1}} \subset \overline{U_{1/2^{n+1}}} \subset U_{1/2^n}$. Al ser $\overline{U_{2^n-1/2^n}}$ y B cerrados disjuntos, existe un abierto $U_{2^{n+1}-1/2^{n+1}}$, tal que $\overline{U_{2^n-1/2^n}} \subset U_{2^{n+1}-1/2^{n+1}} \subset \overline{U_{2^{n+1}-1/2^{n+1}}} \subset X - B$. Y finalmente, si k es impar, $1 < k < 2^{n+1} - 1$, entonces $\overline{U_{k-1/2^{n+1}}}$ y $X - U_{k+1/2^{n+1}}$ son cerrados disjuntos construidos en la etapa anterior, y existe un abierto $U_{k/2^{n+1}}$, tal que $\overline{U_{k-1/2^{n+1}}} \subset U_{k/2^{n+1}} \subset \overline{U_{k/2^{n+1}}} \subset U_{k+1/2^{n+1}}$.

De este modo, hemos construido por inducción sobre los números diádicos una familia de conjuntos abiertos $\{U_t : t \in \mathbb{D}\}$, tal que:

(i) $A \subset U_t$ para cada $t \in \mathbb{D}$, eligiendo $U_0 = \emptyset$ y $U_1 = X$,

(ii) si $s < t$, es $\overline{U_s} \subset U_t$, y

(iii) si $t \in \mathbb{D} - \{1\}$, es $\overline{U_t} \subset X - B$.

Aplicando el lema 3.19 al conjunto denso $\mathbb{D}$ y a la familia construida arriba, se deduce que la función $f\colon (X, d) \longrightarrow ([0, 1], d_u)$ dada por $f(x) = \text{ínf}\{t \in \mathbb{D} : x \in U_t\}$ es continua. Por (i) es $f(A) = 0$ y por (ii) es $f(B) = 1$. ∎

Observación 3.10. Este teorema es válido para cualquier intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ en sustitución de $[0, 1]$.

Lema 3.21. *Sea (X, d) un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y $f_n\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ una función continua. Supongamos que para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ es $|f_n(x)| \leq r_n$ y la serie de números reales $\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n$ es convergente. Entonces, para cada $x \in X$, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge a $f(x) \in \mathbb{R}$ y la función $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ así definida es continua.*

Demostración: La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ es absolutamente convergente para todo $x \in X$, con lo que $f(x) \in \mathbb{R}$. Para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe n_ε, tal que:

(i) para $k > n_\varepsilon$ es $|f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} r_n < \varepsilon/3$, por la convergencia de la serie;

(ii) como cada función f_n es continua en x, existe un abierto U_x tal que para cada $y \in U_x$ es $|\sum_{n=1}^{n_\varepsilon} f_n(x) - \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} f_n(y)| < \varepsilon/3$.

Así, $|f(x) - f(y)| = |\sum_{n=1}^{n_\varepsilon}(f_n(x) - f_n(y)) + \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(y)| \leq |\sum_{n=1}^{n_\varepsilon}(f_n(x) - f_n(y))| + |\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(x)| + |\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(y)| < \varepsilon$, luego f es continua. ∎

Teorema 3.22. ***(Teorema de extensión de Tietze)*** *Sean un espacio métrico (X, d), $A \subset X$ cerrado y $f\colon (A, d_A) \longrightarrow ([-1, 1], d_u)$ una función continua. Existe una función continua $F\colon (X, d) \longrightarrow ([-1, 1], d_u)$ tal que $F|_A = f$: se dice que F* ***extiende*** *a f.*

Demostración: Sea $f\colon (A,d_A)\longrightarrow([-1,1],d_u)$ una función continua. Dividimos el intervalo $[-1,1]$ en tres partes iguales de amplitud $2/3$ y denotamos $A_1 = f^{-1}([1/3,1])$ y $B_1 = f^{-1}([-1,-1/3])$, que son dos cerrados disjuntos (en (A,d_A), luego en (X,d)). Aplicando el teorema 3.20, existe una función continua $f_1\colon (X,d)\longrightarrow([-1/3,1/3],d_u)$ tal que $f_1(A_1) = 1/3$ y $f_1(B_1) = -1/3$.

Tenemos la función continua $g_1 = f - f_1\colon (A,d_A)\longrightarrow([-2/3,2/3],d_u)$: dividimos $[-2/3,2/3]$ en tres intervalos de amplitud $(2/3)^2$ y consideramos $A_2 = g_1^{-1}([2/9,2/3])$ y $B_2 = g_1^{-1}([-2/3,-2/9])$, que son dos cerrados disjuntos. Aplicando el teorema 3.20, existe una función continua $f_2\colon (X,d)\longrightarrow([-2/9,2/9],d_u)$ tal que $f_2(A_2) = 2/9$ y $f_2(B_2) = -2/9$. La función $g_2 = f - f_1 - f_2\colon (A,d_A)\longrightarrow([-(2/3)^2,(2/3)^2],d_u)$ es continua y se vuelve a reiterar el proceso.

Continuando de este modo, se obtiene una sucesión de funciones $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tales que

(i) $g_k\colon (A,d_A)\longrightarrow([-(2/3)^k,(2/3)^k],d_u)$ es continua,

(ii) $A_{k+1} = g_k^{-1}([2^k/3^{k+1},2^k/3^k])$ y $B_{k+1} = g_k^{-1}([-2^k/3^k,-2^k/3^{k+1}])$ son cerrados disjuntos,

(iii) existe $f_{k+1}\colon (X,d)\longrightarrow([-2^k/3^{k+1},2^k/3^{k+1}],d_u)$ una función de Urysohn asociada a estos cerrados, tal que $f_{k+1}(A_k) = 2^k/3^{k+1}$ y $f_{k+1}(B_k) = -2^k/3^{k+1}$,

(iv) sobre A es $g_k = f - (f_1 + \cdots + f_k)$.

La función $F\colon (X,d)\longrightarrow([-1,1],d_u)$ dada por $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ está bien definida, es continua ($|f_n(x)| \leq 2^{n-1}/3^n$ y se aplica el lema 3.21) y $F|_A = f$. ∎

Corolario 3.23. ***(Teorema de extensión de Tietze, segunda versión)*** *Sean un espacio métrico (X,d), $A\subset X$ cerrado y $f\colon (A,d_A)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$ una función continua. Existe una función continua $F\colon (X,d)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$ que extiende a f.*

Demostración: Sea $h\colon (\mathbb{R},d_u)\longrightarrow((-1,1),d_u)$ un homeomorfismo. Se puede aplicar el teorema 3.22 a la función continua $h\circ f\colon (A,d_A)\longrightarrow([-1,1],d_u)$, por lo que existe una extensión de $h\circ f$, $G\colon (X,d)\longrightarrow([-1,1],d_u)$. Sea $B = G^{-1}(\{-1,1\})$; claramente A y B son cerrados disjuntos, y aplicando el teorema 3.20 existe $g\colon (X,d)\longrightarrow([0,1],d_u)$ continua tal que $g(B) = 0$ y $g(A) = 1$. La función $F = h^{-1}\circ g.G\colon (X,d)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$ es continua y extiende a f. ∎

3.4. Aplicaciones uniformemente continuas

Definición 3.5. $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ es *uniformemente continua*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cada $x,y\in X$ verificando $d(x,y) < \delta$, es $\rho(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Teorema 3.24. *Si $f\colon (X,d)\longrightarrow (Y,\rho)$ es uniformemente continua, es continua.*

Observación 3.11. El recíproco no es cierto: sea la función $f\colon ((0,1],d_u)\longrightarrow (\mathbb{R},d_u)$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}$. Entonces:

(i) f es continua en $(0,1]$: para $a\in(0,1]$ y $\varepsilon>0$, existe $\delta<\min\left\{\frac{a}{2},\varepsilon\frac{a^2}{2}\right\}$ tal que si $|x-a|<\delta$, es $|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}|=\frac{|x-a|}{|x||a|}<\frac{2}{a^2}\frac{\varepsilon a^2}{2}=\varepsilon$;

(ii) f no es uniformemente continua: si lo fuera, sean ε y δ como en la definición 3.5 y $a<\min\left\{2\delta,\frac{1}{\varepsilon},1\right\}$; entonces $a,\frac{a}{2}\in(0,1]$, $|a-\frac{a}{2}|<\delta$, pero $|f(x)-f(\frac{a}{2})|=\frac{1}{a}>\varepsilon$.

Teorema 3.25. *La composición de aplicaciones uniformemente continuas, es uniformemente continua.*

Observación 3.12. La continuidad es una propiedad que se expresa en términos de abiertos. Esto no es verdad para la continuidad uniforme, donde la definición $(\varepsilon-\delta)$ juega un papel esencial: la continuidad uniforme es una propiedad adaptada a espacios métricos, mientras que la continuidad es una noción asociada a espacios topológicos.

Proposición 3.26. *La funciones $f,g\colon (X,d)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$ dadas por $f(x)=d(x,a)$ y $g(x)=d(x,A)$ son uniformemente continuas, para $a\in A$ y $A\subset X$.*

Demostración: Para $\varepsilon>0$, basta con tomar $\delta=\varepsilon$ y si $d(x,y)<\delta$, es $|f(x)-f(y)|=|d(x,a)-d(y,a)|\leq d(x,y)$, por la proposición 2.5. Para g, se deduce de manera similar aplicando la proposición 2.6. ∎

Ejemplos 3.2. Algunos ejemplos de aplicaciones uniformemente continuas son:

(i) la identidad $1_X\colon (X,d)\longrightarrow(X,d)$ es uniformemente continua;

(ii) las aplicaciones constantes son uniformemente continuas;

(iii) las isometrías son uniformente continuas, pero el recíproco no es cierto: sea d la métrica discreta y $1_{\mathbb{R}}\colon(\mathbb{R},d)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$, que es una biyección uniformemente continua, pero no es una isometría;

(iv) si d es la métrica discreta, para cualquier espacio métrico (Y,ρ) y cada función, $f\colon(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ es uniformemente continua. Esta propiedad no es cierta para cualquier espacio discreto: para la aplicación $f\colon(\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\},d_u)\longrightarrow(\mathbb{N},d_u)$, la función $f(\frac{1}{n})=n$ es continua, pero no es uniformemente continua.

Definición 3.6. Dos espacios (X,d) e (Y,ρ) se llaman *uniformemente homeomorfos*, si existe $f\colon(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ biyectiva, uniformemente continua y de inversa uniformemente continua.

Lema 3.27. *Dos espacios métricos uniformemente homeomorfos, son homeomorfos.*

3.5. Ejercicios

1.- Responder a las siguientes cuestiones:

(i) si (X, d) es un espacio métrico discreto e (Y, ρ) es arbitrario, probar que toda aplicación $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es continua;

(ii) en las condiciones de (i), describir las aplicaciones continuas $f\colon (Y, \rho) \longrightarrow (X, d)$;

(iii) ¿qué puede decirse de (X, d), si toda aplicación $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ es continua?

2.- Sean $f, g\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continuas. Probar que también lo son las funciones: $f \pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(x) \neq 0$ para cada $x \in X$), $c.f$ ($c \in \mathbb{R}$), $|f|$, $\text{máx}\{f, g\}$ y $\text{mín}\{f, g\}$.

3.- Sean $f, g\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continuas, se pide:

(i) probar que el conjunto $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en (X, d). Concluir que si D es denso en (X, d) y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$;

(ii) sea $b \in Y$. Probar que el conjunto $A = \{x \in X : f(x) = b\}$ es cerrado en (X, d). Concluir que si $(Y, \rho) = (\mathbb{R}, d_u)$, entonces las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ constituyen un conjunto cerrado en (X, d).

4.- Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos y $\{A_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X tales que $X = \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$. Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ tal que $f|_{A_i}$ es continua para cada $i \in I$. Probar:

(i) si cada A_i es abierto en (X, d), entonces f es continua;

(ii) si cada A_i es cerrado en (X, d) y el conjunto I es finito, entonces f es continua;

(iii) comprobar que f no es continua en general.

5.- Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Definimos los conjuntos $A + x = \{a + x : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Probar:

(i) si A es abierto (respectivamente, cerrado) en $(\mathbb{R}, d_u)$, entonces $A + x$ es abierto (respectivamente, cerrado) en $(\mathbb{R}, d_u)$,

(ii) si A y B son abiertos en $(\mathbb{R}, d_u)$, entonces $A + B$ es abierto en $(\mathbb{R}, d_u)$. No sucede lo mismo si se cambia el calificativo de abierto por el de cerrado.

6.- Probar que son continuas las funciones $f, g\colon (\mathbb{R}^2, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, donde:

(i) $f(x, y) = x + y$,

(ii) $g(x,y) = xy$. Concluir que el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, xy = 1\}$, es cerrado en $(\mathbb{R}^2, d_u)$.

7.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$. Probar que son equivalentes:

(i) f es continua,

(ii) para cada $B \subset Y$, $f^{-1}(\overset{\circ}{B}{}^{Y}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}{}^{X}$,

(iii) para cada $B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)}^{X} \subset f^{-1}(\overline{B}^{Y})$.

8.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Probar que si D es denso en (X,d), entonces $f(D)$ es denso en (Y,ρ). Si F es denso en (Y,ρ), ¿es $f^{-1}(F)$ denso en (X,d)?

9.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$. Probar que f es continua en (X,d) si y sólo si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $A_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $B_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos en (X,d).

10.- Sea (X,d) y $A \subset X$. Probar que la función característica de A es continua en x si y sólo si $x \notin \mathrm{fr}(A)$. ¿Bajo que condiciones es χ_A continua?

11.- Sean $f, g\colon (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continuas. Probar que $h\colon (\mathbb{R}^2, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_u)$, definida por $h(x,y) = (f(x), g(y))$, es continua.

12.- Sean A y B cerrados, no vacíos y disjuntos en un espacio métrico (X,d). Se pide:

(i) probar que existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$;

(ii) encontrar una función $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continua, tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

13.- Sean $f, g\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ continuas y $a \in X$. Probar:

(i) si $f(a) \neq g(a)$, probar que existe $r > 0$, tal que $f(B_X(a,r)) \cap g(B_X(a,r)) = \emptyset$; en particular, si $x \in B_X(a,r)$, entonces $f(x) \neq g(x)$;

(ii) supongamos que para cada $r > 0$, existe $x_r \in B_X(a,r)$ tal que $f(x_r) = g(x_r)$. Probar que $f(a) = g(a)$. Concluir que si $f, g\colon (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ son continuas y $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$, entonces $f = g$.

14.- Sean $f, g\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continuas y $a \in X$, tal que $f(a) < g(a)$. Probar que existe $r > 0$ tal que para cada $x, y \in B_X(a,r)$, es $f(x) < g(y)$. ¿Cómo se expresa esta propiedad si f es la función idénticamente nula? Concluir que si $s > 0$ y $a \notin \overline{B}_X(x,s)$, existe $r > 0$ tal que $B_X(a,r) \cap \overline{B}_X(x,s) = \emptyset$.

♣**15.-** Sean $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ continua, $B \subset Y$ y $A = \{x \in X : \rho(f(x), Y-B) > 0\}$. Probar que para cada $x \in A$, es $d(x, X-A) > 0$.

16.- Estudiar la continuidad de $f, g\colon (X,d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, donde $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y

(i) $f(0) = 0$ y $f(\frac{1}{n}) = n$,

(ii) $g(0) = 0$ y
$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad n \quad \text{es par} \\ \frac{-1}{n} & \text{si} \quad n \quad \text{es impar} \end{cases}$$

17.- Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad en los siguientes casos: $f\colon (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$, $f\colon (\mathbb{R}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \rho)$, y $f\colon (\mathbb{R}, \rho) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, donde d es la métrica discreta y $\rho(x,y) = 2|x-y|$.

18.- Sean las métricas sobre $\mathbb{R}$, dadas por:
$$d_1(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si} \quad sg(x) = sg(y) \\ |x+y|+1 & \text{si} \quad sg(x) \neq sg(y) \end{cases}$$
$$d_2(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad x \neq y, x > 0, y > 0 \\ |x-y| & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de las funciones: $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_1)$, $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ y $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_2)$. Hacer el mismo ejercicio para $f = \chi_{\{0\}}$ y $g(x) = \frac{x}{2} - 1$.

19.- Sean A y B cerrados en (X,d), y los conjuntos $C = \{x \in X : d(x,A) < d(x,B)\}$, $D = \{x \in X : d(x,A) > d(x,B)\}$ y $E = \{x \in X : d(x,A) = d(x,B)\}$. Probar:

(i) C y D son abiertos y E es cerrado en (X,d);

(ii) hallar C, D y E, si $(X,d) = (\mathbb{R}^2, d_u)$ y A y B son dos rectas (respectivamente, dos circunferencias exteriores).

20.- Probar que una biyección de $(\mathbb{R}, d_u)$ en $(\mathbb{R}, d_u)$ es continua si y sólo si es monótona.

21.- Sean (X,d) un espacio métrico, $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ una aplicación continua y el conjunto abierto $U = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Probar que para cada $x \in \mathrm{fr}(U)$, es $f(x) = 0$.

♣**22.-** Sea $f\colon (\mathbb{R}^n, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, d_u)$ una función. Para cada $a \in \mathbb{R}^n$, se llama *oscilación* de f en a al número real $\omega(f,a) = \text{ínf}\{\delta(f(B(a,\varepsilon))) : \varepsilon > 0\}$. Se pide probar:

(i) f es continua en a si y sólo si $\omega(f,a) = 0$;

(ii) para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(f,x) \geq \varepsilon\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$;

(iii) calcular $\omega(g,x)$, para $x \in \mathbb{R}$ y la función $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

♣**23.-** Sea A un convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Una aplicación $f\colon (A, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ se llama *convexa*, si para cada $x, y \in A$ y $t \in [0,1]$, es $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. Se pide probar:

(i) si f es convexa en A, entonces $f(\sum_{i=1}^{m} t_i a_i) \leq \sum_{i=1}^{m} t_i f(a_i)$, donde $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$ y $a_i \in A$;

(ii) si A es abierto convexo, toda función convexa sobre A es continua sobre A;

(iii) dar un ejemplo en donde se pruebe que (ii) no es cierto en general si A no es abierto.

24.- Probar que las bolas abiertas en el espacio euclídeo de dimensión n son homeomorfas entre sí y a su vez a $(\mathbb{R}^n, d_u)$.

♣**25.-** Sea $f\colon (\mathbb{R}^n, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, d_u)$ una aplicación lineal, es decir, si $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $t, s \in \mathbb{R}$, es $f(sa + tb) = sf(a) + tf(b)$. Si $\|x\| = d_u(x, 0)$ es la norma de x, probar que son equivalentes:

(i) f es continua,

(ii) f es continua en 0;

(iii) existe $c > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq c\|x\|$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$;

(iv) existe $c > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$.

26.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ biyectiva. Probar que f es un homeomorfismo si y sólo si para cada $A \subset X$, se tiene $f(\overline{A}^X) = \overline{f(A)}^Y$.

27.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ un homeomorfismo y $A \subset X$, tal que $A \cap A' = \emptyset$. Probar que $f(A) \cap f(A)' = \emptyset$.

28.- Sea la función $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ y D la métrica sobre X dada por $D(x,y) = d(x,y)+\rho(f(x),f(y))$. Probar que si f es continua en X, entonces la aplicación identidad $1_X\colon (X,D)\longrightarrow(X,d)$ es un homeomorfismo.

29.- Dada $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$, el *grafo de* f es $G_f = \{(x,f(x)) \in X\times Y : x\in X\}$. Sobre $X\times Y$ se define la métrica producto $d_{\text{máx}}$. Probar:

(i) si f es continua, entonces G_f es cerrado en $(X\times Y, d_{\text{máx}})$. El recíproco es falso;

(ii) sea p la restricción a G_f de la proyección $p_1\colon (X\times Y, d_{\text{máx}})\longrightarrow(X,d)$. Probar que p es biyectiva y continua. Probar que f es continua si y sólo si p es un homeomorfismo.

30.- Sea $f\colon (\mathbb{R},d_u)\longrightarrow((-1,1),d_u)$, donde $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$. Probar que f es un homeomorfismo. Concluir que cualquier intervalo abierto (con la métrica de subespacio inducida por la usual) es homeomorfo a la recta real.

31.- Sea $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ un homeomorfismo. Estudiar si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas:

(i) X es acotado si y sólo si Y lo es,

(ii) $U\subset X$ es abierto en (X,d) si y sólo si $f(U)$ es abierto en (Y,ρ),

(iii) $F\subset X$ es cerrado en (X,d) si y sólo si $f(F)$ es cerrado en (Y,ρ),

(iv) $A\subset X$ es numerable si y sólo si $f(A)$ lo es,

(v) $D\subset X$ es denso en (X,d) si y sólo si $f(D)$ es denso en (Y,ρ),

(vi) si $A\subset X$, $x\in \overset{\circ}{A}{}^{X}$ si y sólo si $f(x)\in \overbrace{f(A)}^{\circ}{}^{Y}$,

(vii) si $A\subset X$, $x\in A'$ si y sólo si $f(x)\in(f(A))'$,

(viii) si $A\subset X$, $x\in\overline{A}^X$ si y sólo si $f(x)\in\overline{f(A)}^Y$.

32.- Sean $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ y $g\colon (Y,\rho)\longrightarrow(Z,\eta)$ continuas, tales que la composición $g\circ f\colon (X,d)\longrightarrow(Z,\eta)$ es un homeomorfismo. Probar que si f es sobreyectiva, entonces f y g son homeomorfismos.

♣**33.-** Probar que los espacios euclídeos siguientes son dos a dos homeomorfos:

(i) el cilindro vertical $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$,

(ii) el cilindro $Y=\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$,

(iii) el plano privado del origen $Z = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

(iv) la corona circular $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$,

(v) la esfera privada de los polos norte y sur, $U = \mathbb{S}^2 - \{P, Q\}$, donde $P = (0,0,1)$ y $Q = (0,0,-1)$,

(vi) el cono privado de su vértice $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

♣**34.-** Dar un homeomorfismo entre el primer cuadrante $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ y el semiplano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, como subespacios del plano euclídeo.

♣**35.-** Sea $(\mathbb{R}^n, d_u)$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, convexo y acotado, tal que $0 \in A$. Se pide probar:

(i) para cada $x \in S(0,1)$, existe un único $y \in \mathrm{fr}(A)$ de la forma $\lambda.x$, donde $\lambda > 0$;

(ii) si $y = \phi(x)$, probar que la aplicación $\phi \colon (S(0,1), d_u) \longrightarrow (\mathrm{fr}(A), d_u)$ es un homeomorfismo;

(iii) deducir que la frontera de un subconjunto convexo, acotado, de interior no vacío de $(\mathbb{R}^n, d_u)$, es homeomorfa a $(S(0,1), d_u)$;

(iv) sea $\varphi \colon (\mathbb{R}^n, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, definida por $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x) = \|x\|\phi(\frac{x}{\|x\|})$ si $x \neq 0$. Probar que φ es un homeomorfismo;

(v) deducir que un subconjunto convexo, abierto y acotado de $(\mathbb{R}^n, d_u)$, es homeomorfo a la bola abierta $(B(0,1), d_u)$ y por consiguiente a $(\mathbb{R}^n, d_u)$;

(vi) deducir que un subconjunto convexo, cerrado y acotado de interior no vacío de $(\mathbb{R}^n, d_u)$ es homeomorfo a la bola cerrada $(\overline{B}(0,1), d_u)$;

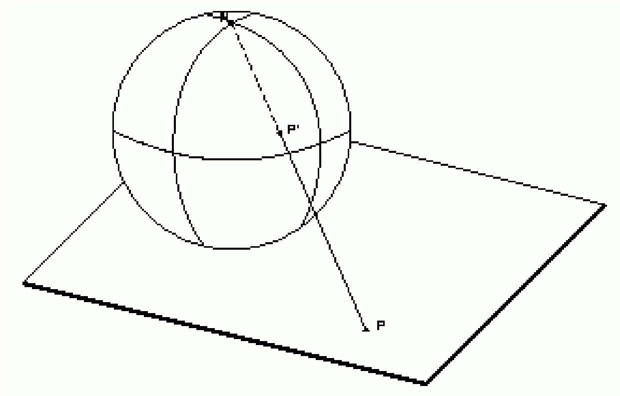
(vii) probar propiedades similares para partes convexas, de interior no vacío y no acotadas de $\mathbb{R}^n$.

36.- Sea $f \colon (\mathbb{R}^n, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, d_u)$ una aplicación lineal y biyectiva. Probar que para que f sea un homeomorfismo es necesario y suficiente que existan constantes $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \beta\|x\|$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

♣**37.-** En este ejercicio se trata de definir la *proyección estereográfica*, una aplicación esencial en Geometría y Topología:

(i) la circunferencia unidad en el plano euclídeo es $\mathbb{S}^1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Dado $(a_1,a_2) \in \mathbb{S}^1 - \{(0,1)\}$, se considera la recta que pasa por (a_1,a_2) y $(0,1)$. Esta recta corta al eje de abscisas en el punto $(\frac{a_1}{1-a_2}, 0)$. Se define la aplicación $h \colon (\mathbb{S}^1 - \{(0,1)\}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ por $h(a_1,a_2) = \frac{a_1}{1-a_2}$. Probar que h es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*;

(ii) Análogamente, para $n \geq 1$, la esfera unidad en el espacio euclídeo de dimensión $n+1$ se define por $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Probar que la aplicación $h \colon (\mathbb{S}^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, d_u)$, dada por $h(a_1, \ldots, a_{n+1}) = (\frac{a_1}{1-a_{n+1}}, \ldots, \frac{a_n}{1-a_{n+1}})$, es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*.



♣**38.-** Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que existe una métrica acotada ρ sobre X, de manera que la identidad $1_X \colon (X, d) \longrightarrow (X, \rho)$ es un homeomorfismo uniforme.

♣**39.-** Sea $f \colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$. Probar que es uniformemente continua, si y sólo si para cada $A, B \subset X$ tales que $d(A, B) = 0$ se tiene $\rho(f(A), f(B)) = 0$.

40.- Sean los espacios métricos $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$. Consideremos su producto cartesiano $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ y $d_{\text{máx}}$ la métrica del máximo. Se pide probar:

(i) las proyecciones $p_i \colon (X, d_{\text{máx}}) \longrightarrow (X_i, d_i)$ son uniformemente continuas;

(ii) si U es abierto en $(X, d_{\text{máx}})$, entonces $p_i(U)$ es abierto en (X_i, d_i). ¿Esta propiedad se debe a la continuidad de las proyecciones?

(iii) dado un espacio métrico (Y, ρ), probar que una función $f \colon (Y, \rho) \longrightarrow (X, d_{\text{máx}})$ es continua si y sólo si para cada $i \in I$, las aplicaciones $p_i \circ f$ lo son.

♣**41.-** Una función $f \colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ se dice *lipschitziana* si existe un número real positivo λ tal que para cada $x, y \in X$, se cumple $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$. Se pide probar:

(i) toda función lipschitziana es uniformemente continua. El recíproco no es cierto: $f \colon ([0, \infty), d_u) \longrightarrow ([0, \infty), d_u)$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua y no lipschitziana;

(ii) las isometrías son aplicaciones lipschizianas. El recíproco no es cierto;

(iii) las aplicaciones de la proposición 3.26 son lipschitzianas.

42.- Sea $(\mathbb{R}^2, d)$ donde d es la métrica definida por,

$$d(x,y) = \begin{cases} d_u(x,y) & \text{si} \quad x_2 = y_2 \\ |x_1 - y_1| + 1 & \text{si} \quad x_2 \neq y_2 \end{cases}$$

¿Son continuas las proyecciones $p_1, p_2 \colon (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$? ¿Y lipschitzianas?

43.- Sea $f \colon ([0,\infty), d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, tal que existe $a > 0$ verificando que $f|_{[0,a]}$ y $f|_{[a,\infty)}$ son uniformemente continuas. Probar que f es uniformemente continua.

44.- Sea $A \subset \mathbb{R}$. Probar que la función $f \colon (A, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, dada por $f(x) = x^2$ es uniformemente continua si A es acotado, pero no si $A = \mathbb{R}$.

♣45.- Sean A y B cerrados, no vacíos y disjuntos en (X,d) y $f \colon (X,d) \longrightarrow ([0,1], d_u)$ definida por $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. Se pide:

(i) probar que f es continua y calcular $f(A)$ y $f(B)$;

(ii) encontrar abiertos disjuntos que contengan a A y B;

(iii) probar que f no es en general uniformemente continua.

♣46.- Se pide probar:

(i) la función $f \colon (\mathbb{R} - \{0\}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ dada por $f(x) = \frac{x}{|x|}$ es continua, pero no es uniformemente continua;

(ii) se tiene la siguiente generalización de la anterior propiedad: sean (X,d) e (Y,ρ) espacios métricos y $f \colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ una aplicación continua. Se supone que existen $a \neq b \in X$, tales que los conjuntos cerrados y disjuntos en $F = f^{-1}(a)$ y $G = f^{-1}(b)$ verifican que $d(F,G) = 0$. Probar que f no es uniformemente continua.

Convergencia en espacios métricos

Yo soy flor que se marchita
al sol de la adversidad,
el arbolito en mitad
de la llanura infinita.

"Décimas"
Pedro Bonifacio Palacios "Almafuerte"(1854-1917)

4.1. Definición de sucesión

Definición 4.1. Una *sucesión* en $X \neq \emptyset$ es una aplicación $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$. Normalmente, en vez de utilizar la notación funcional, se utiliza la notación con subíndices $f(n) = x_n$, y se habla de la sucesión f o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El punto x_n se llama *término* de la sucesión y $Rg\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = f(\mathbb{N})$ es el *rango* de la sucesión.

Observación 4.1. Destacamos a continuación algunas propiedades relativas a sucesiones:

(i) la función f definiendo una sucesión no tiene porque ser inyectiva, y por lo tanto, en una sucesión pueden existir términos iguales;

(ii) no hay que confundir el rango con la propia sucesión: si $X = \mathbb{R}$, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión oscilante, cuyo rango es finito $\{-1, 1\}$;

(iii) si f es constante, es decir, existe $x \in X$ tal que $f(n) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se habla de la *sucesión constante igual a* x y en este caso $f(\mathbb{N}) = \{x\}$;

(iv) si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $x_n = x$, se habla de la *sucesión semiconstante igual a* x (que es constante si $n_0 = 1$). El rango de una sucesión semiconstante es finito, aunque el recíproco no es cierto (por ejemplo, las sucesiones oscilantes).

Definición 4.2. Una *subsucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión definida por $y_n = x_{\varphi(n)}$, donde $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente. Es decir, se eligen elementos de la sucesión original, sin alterar el orden.

Lema 4.1. *Si $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, es $\varphi(n) \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 4.2. *Toda sucesión es una subsucesión de sí misma.*

Demostración: Basta con tomar como $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función identidad. ∎

Lema 4.3. *Una subsucesión de una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sigue siendo una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración: Es una consecuencia de que la composición de funciones estrictamente crecientes es una función estrictamente creciente. ∎

4.2. Sucesiones convergentes

Definición 4.3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (X, d). Se dice que $x \in X$ es *límite* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ es $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Se dice también que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x y se denota por $\{x_n\} \to x$.

Lema 4.4. *Si $\{x_n\} \to x$ en (X, d), el rango de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotado.*

Demostración: Para $\varepsilon = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ es $d(x_n, x) < 1$. Sea $K = \text{máx}\{d(x, x_1), \dots, d(x, x_{n_1}), 1\}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $d(x, x_n) \leq K$, con lo que $Rg\,(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset \overline{B}(x, K)$. ∎

Observación 4.2. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_u)$, la sucesión oscilante $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero tiene rango acotado.

Lema 4.5. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (X, d), tal que $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$. Entonces, $\{x_n\}$ converge a x.*

Teorema 4.6. *Una sucesión convergente en (X, d) lo hace de manera única.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a dos puntos distintos, $x \neq y$. Sea $d(x, y) = r > 0$. Por la propiedad de Hausdorff, es $B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$, lo cual contradice la convergencia. ∎

Observación 4.3. Algunos ejemplos de sucesiones convergentes son:

(i) en cualquier espacio métrico, una sucesión semiconstante converge hacia la constante que se repite;

(ii) si (X, d) es un espacio métrico discreto, las únicas sucesiones que convergen son las semiconstantes;

(iii) las sucesiones oscilantes no convergen en ningún espacio métrico: en efecto dada la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n = x$ para n par y $x_n = y \neq x$ para n impar, si $\{x_n\} \to z$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ debería ser $x_n \in B(z, \varepsilon)$ para n suficientemente grande, es decir, $x, y \in B(z, \varepsilon)$, lo que es imposible.

Teorema 4.7. *En (X, d), si $\{x_n\} \to x$, cualquier subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$.*

Demostración: Basta con utilizar el lema 4.1. ∎

Observación 4.4. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_u)$, la sucesión$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero la subsucesión de los términos pares $\{(-1)^{2n}\} \to 1$.

Observación 4.5. Algunas observaciones referentes a la convergencia de sucesiones son:

(i) si en (X, d) el rango de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finito, existe una subsucesión constante $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, luego convergente;

(ii) aunque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sólo posea subsucesiones convergentes a un único punto, no se deduce que sea convergente: en $(\mathbb{R}, d_u)$, la sucesión $\{1, 2, 1, 3, \dots, 1, n, \dots\}$ sólo posee subsucesiones convergentes a 1, pero ella no converge;

(iii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee dos subsucesiones convergentes a puntos distintos, entonces ella no converge.

Lema 4.8. *En (X, d), si $\{x_n\} \to x$ y $Rg\,(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ es infinito, es $(Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}))' = \{x\}$.*

Demostración: Sea $R = Rg\,(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$. Como $\{x_n\} \to x$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ es $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Como R es infinito, es claro que entonces debe ser $(B(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap R \neq \emptyset$, para cada $\varepsilon > 0$, es decir, $x \in R'$. Supongamos que existe $y \neq x$, $y \in R'$. Sea $d(x, y) = r$ y $\varepsilon_0 = \frac{r}{2}$. Por la convergencia de la sucesión, existe $n_0 > 0$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $x_n \in B(x, \varepsilon_0)$ y además $(B(y, \varepsilon_0) - \{y\}) \cap R \neq \emptyset$. Pero, por la propiedad de Hausdorff es $B(x, \varepsilon_0) \cap B(y, \varepsilon_0) = \emptyset$, por lo que $(B(y, \varepsilon_0) - \{y\}) \cap R$ contiene como mucho los puntos $\{x_1, \dots, x_{n_0-1}\}$, en contra del lema 2.19. ∎

Observación 4.6. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_u)$, sea la sucesión $\{n^{(-1)^n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6 \ldots, \frac{1}{2n-1}, 2n, \ldots\}$. Es claro que $\left(Rg(\{n^{(-1)^n}\}_{n\in\mathbb{N}})\right)' = \{0\}$, pero la sucesión no converge.

Teorema 4.9. *En (X, d), $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de términos distintos dos a dos en A, tal que $\{x_n\} \to x$.*

Demostración: Sea $x \in A'$. Sabemos que para cada $\varepsilon > 0$, $(B(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos. Así, podemos afirmar que:

(i) para $\varepsilon = 1$, existe $x_1 \in (B(x, 1) - \{x\}) \cap A$;

(ii) supongamos dados $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (distintos dos a dos) tales que para $i \in \{1, \ldots n-1\}$ es $x_i \in (B(x, \frac{1}{i}) - \{x\}) \cap A$.

Como $(B(x, \frac{1}{n}) - \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos, se puede elegir $x_n \in (B(x, \frac{1}{n}) - \{x\}) \cap A$ de modo que $x_n \neq x_i$ para $i \in \{1, \ldots n-1\}$. Queda así construida una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A, de términos distintos dos a dos. Además, por la propiedad arquimediana, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon > 0$, tal que para $n \geq n_\varepsilon$ es $d(x, x_n) < \varepsilon$, con lo que $\{x_n\} \to x$. Observar que la sucesión construida no es única. Recíprocamente, si los términos de la sucesión son dos a dos diferentes, el rango de la sucesión $Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset A$ es infinito, con lo que por el lema 4.8, es $(Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})' = \{x\} \subset A'$. ∎

Corolario 4.10. *En (X, d), es $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \to x$.*

Demostración: Como $\overline{A} = A \cup A'$, basta con notar que si $x \in A$, la sucesión constante igual a x converge a x, y aplicar en otro caso el teorema 4.9. ∎

Corolario 4.11. *En (X, d), es $A \subset X$ es denso si y sólo si todo punto de X es límite de una sucesión de puntos de A.*

Corolario 4.12. *En (X, d), es $x \in \mathrm{fr}(A)$ si y sólo si existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X - A$, tales que $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to x$.*

Corolario 4.13. *En (X, d), si $A \subset X$, se cumple:*

(i) A es cerrado si y sólo si dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \to x$, es $x \in A$;

(ii) A es abierto si y sólo si dada $\{x_n\} \to x \in A$, existe $n_A \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_A$ es $x_n \in A$.

Ejemplo 4.1. En $(\mathbb{R}, d_u)$, el conjunto $A = (0,1]$ no es ni abierto ni cerrado:

(i) A no es cerrado pues existe $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ y $0 \notin A$;

(ii) A no es abierto pues existe $\{1+\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R} - A$ tal que $\{1+\frac{1}{n}\} \to 1$ y $1 \in A$.

Teorema 4.14. *La aplicación $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es continua en x si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X con $\{x_n\} \to x$, la sucesión de las imágenes verifica que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.*

Demostración: Si f es continua, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ tal que $f(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(f(x),\varepsilon)$. Como $\{x_n\} \to x$, para δ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ es $x_n \in B_X(x,\delta)$, con lo que $f(x_n) \in B_Y(f(x),\varepsilon)$, y queda probado que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Recíprocamente, supongamos que f no es continua en x. Existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x \neq x_n \in B_X(x,\frac{1}{n})$ de modo que $f(x_n) \notin B_Y(f(x),\varepsilon)$. Hemos construido de este modo una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x (ver lema 4.5), pero tal que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$. ∎

Observación 4.7. La demostración del teorema 3.16 se puede ahora hacer de la siguiente manera: sea $x \in X = \overline{D}$. Por el corolario 4.10 existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en D tal que $\{x_n\} \to x$. Es fácil probar que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto, que llamaremos $F(x) \in X$. El teorema 4.14 garantiza que la extensión así definida $F\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es continua.

4.3. Sucesiones de Cauchy

Definición 4.4. En (X,d), una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m,n \geq n_\varepsilon$ es $d(x_n,x_m) < \varepsilon$, es decir, los términos de la sucesión se acercan entre sí a medida que los índices crecen.

Si los términos de una sucesión se aproximan a un punto, entonces, se acercan entre sí:

Teorema 4.15. *En (X,d), si $\{x_n\} \to x$, entonces es de Cauchy.*

Observación 4.8. El recíproco no es cierto: en $((0,1], d_u)$, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no converge.

Teorema 4.16. *En (X,d), si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y posee una subsucesión convergente $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$, entonces $\{x_n\} \to x$.*

Demostración: Como $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $d(x_{\varphi(n)},x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Y la condición de Cauchy dice que $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m,n \geq n_1$ es $d(x_m,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $n_\varepsilon = \max\{n_0,n_1\}$, para $n \geq n_\varepsilon$ es $d(x,x_n) \leq d(x,x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)},x_n) < \varepsilon$. ∎

Corolario 4.17. *En (X,d), si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de rango finito, converge.*

Corolario 4.18. *En (X,d), si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y $(Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}))' \neq \emptyset$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Demostración: Si $x \in (Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})'$, por el corolario 4.10, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}))'$ tal que $\{y_n\} \to x$, que se puede elegir como una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ya que cualquier reordenación de una sucesión convergente, sigue siendo convergente. Por el teorema 4.16, es $\{x_n\} \to x$. ∎

Teorema 4.19. *El rango de una sucesión de Cauchy en (X,d) es un conjunto acotado.*

Demostración: Para $\varepsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ es $x_n \in B(x_{n_1}, \varepsilon)$. Sea $K = \text{máx}\{1, d(x_1, x_{n_1}), \dots d(x_{n_1-1}, x_{n_1})\}$. Entonces, $Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset \overline{B}(x_{n_1}, K)$. ∎

Observación 4.9. El recíproco no es cierto, como lo prueban las sucesiones oscilantes.

Teorema 4.20. *Si $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es uniformemente continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.*

Demostración: La continuidad uniforme garantiza que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ es $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Y la condición de Cauchy afirma que para $\delta > 0$ existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_\delta$ es $d(x_m, x_n) < \delta$. Así, es $\rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. ∎

Observación 4.10. Esta propiedad no es cierta para funciones continuas: en efecto, sea $f\colon ((0,1], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, que es continua, pero no uniformemente continua. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $((0,1], d_u)$, pero la sucesión de sus imágenes $\{f(\frac{1}{n}) = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy en $(\mathbb{R}, d_u)$.

4.4. Espacios métricos completos

Definición 4.5. Un espacio métrico (X,d) se llama *completo*, si toda sucesión de Cauchy es convergente. Así, en este tipo de espacios, se puede averiguar si una sucesión es convergente sin necesidad de calcular su límite.

Teorema 4.21. *Si (X,d) es completo y $A \subset X$ es cerrado, entonces (A, d_A) es completo.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (A, d_A). Como (X,d) es completo, $\{x_n\} \to x$ en (X,d). Pero, $x \in \overline{A} = A$. ∎

Teorema 4.22. *Si $A \subset X$ y (A, d_A) es completo, entonces A es cerrado en (X, d).*

Demostración: Sea $x \in \overline{A}$; existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \to x$. Luego, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (A, d_A), por serlo en (X, d). Por completitud y unicidad de límite, es necesariamente $x \in A$. ∎

Corolario 4.23. *Si (X, d) es completo, (A, d_A) es completo si y sólo si A es cerrado.*

Definición 4.6. (X, d) posee la *propiedad de Cantor*, si dada cualquier familia numerable de conjuntos $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cerrados, no vacíos y encajados ($F_{n+1} \subset F_n$, para $n \in \mathbb{N}$), tales que $\inf\{\delta(F_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$, es $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Teorema 4.24. ***(Teorema de Cantor)*** *(X, d) es completo si y sólo si posee la propiedad de Cantor. Además, estas intersecciones numerables de familias de cerrados encajados se reducen a un punto.*

Demostración: Sea (X, d) completo y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de cerrados encajados, no vacíos y tales que $\inf\{\delta(F_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Por la elección de los diámetros, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(F_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$. Luego, para cada $m, n \geq n_\varepsilon$, al ser $x_m, x_n \in F_{n_\varepsilon}$, es también $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Así, hemos construido una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. Por la completitud, existe $x \in X$ tal que $\{x_n\} \to x$. La subsucesión $\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ en F_k converge también a x; así para cada $k \in \mathbb{N}$ es $x \in \overline{F_k} = F_k$ y $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Recíprocamente, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy y $R_k = Rg\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$. Es $R_{k+1} \subset R_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y como $\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ es de Cauchy, R_k está acotado e $\inf\{\delta(R_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Si $F_n = \overline{R_n}$, la familia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia contable de cerrados no vacíos, encajada y como $\delta(\overline{R_n}) = \delta(R_n)$ es $\inf\{\delta(F_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Por la propiedad de Cantor, será $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y además la intersección se reduce a un punto, ya que si $x, y \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, $d(x, y) \leq \delta(F_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que $d(x, y) = 0$. Sea entonces $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ es $x \in F_n = \overline{R_n}$ y $x_n \in R_n$, es $d(x_n, x) \leq \delta(R_n)$. Así, como los diámetros tienden a cero, para cada $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$, es $d(x_n, x) < \varepsilon$. ∎

Observación 4.11. Los conjuntos de la definición 4.6 deben ser cerrados y con la propiedad de que sus diámetros tiendan a cero. En efecto, en $(\mathbb{R}, d_u)$:

(i) si $F_n = (0, \frac{1}{n})$, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos no cerrados, encajados y cuyos diámetros tienden a cero, pero $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$;

(ii) si $F_n = [n, \infty)$, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados encajados, pero sus diámetros no tienden a 0 y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

4.5. Teorema de Baire

Definición 4.7. Sea el espacio métrico (X, d). Una aplicación $f\colon (X, d) \longrightarrow (X, d)$ se llama *contractiva* si existe un número real $k \in (0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) < kd(x, y)$.

Proposición 4.25. *Cualquier aplicación contractiva $f\colon (X, d) \longrightarrow (X, d)$ es uniformemente continua.*

Teorema 4.26. ***(Teorema del punto fijo)*** *Si (X, d) es un espacio métrico completo y $f\colon (X, d) \longrightarrow (X, d)$ es una aplicación contractiva, existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración: Para cada $x \in X$, al ser f contractiva, es

$$d(f^n(x), f^{n-1}(x)) < kd(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) < \cdots < k^{n-1}d(f(x), x),$$

donde $f^n(x)$ denota el punto obtenido al aplicar f n veces a x. Como $k \in (0, 1)$, se deduce que la sucesión $\{x_n = f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por lo tanto, converge a $x_0 \in X$. Como f es continua, $\{f(x_n) = f^{n+1}(x)\} \to f(x_0)$; pero $\{f(x_n) = f^{n+1}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con lo que forzosamente es $x_0 = f(x_0)$. Si existiera otro punto $y_0 \in X$ fijo para f, sería $d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) < kd(x_0, y_0) < d(x_0, y_0)$, lo cual es imposible. ∎

Los siguientes conjuntos son *topológicamente pequeños*, al poseer trivialmente interior vacío:

Definición 4.8. Sea el espacio métrico (X, d). Un conjunto A se dice *nada denso*, si $X - \overline{A}$ es denso.

Definición 4.9. Sea el espacio métrico (X, d). Un conjunto $A \subset X$ se dice *de primera categoría* o *magro*, si se puede escribir como una unión contable de conjuntos nada densos. Y se dice *de segunda categoría* si no es de primera.

El siguiente teorema es de particular importancia, sobre todo en la construcción de demostraciones de existencia en Análisis:

Teorema 4.27. ***(Teorema de Baire)*** *Si* (X, d) *es un espacio métrico completo, cualquier conjunto de primera categoría tiene interior vacío.*

Demostración: Sea $A \subset X$ de primera categoría y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la familia de conjuntos nada densos tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Supongamos que $\overset{\circ}{A}$ es no vacío. Sea $x_1 \in \overset{\circ}{A} - \overline{F_1}$ (que existe por ser F_1 nada denso y $\overset{\circ}{A}$ un abierto no vacío); como $\overset{\circ}{A} - \overline{F_1}$ es abierto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subset \overset{\circ}{A} - \overline{F_1} \subset \overset{\circ}{A} - F_1$. Supongamos que para $k = 1, \ldots, n-1$ se han obtenido bolas tales que $\overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \subset \overset{\circ}{A} - F_k$, donde $x_k \in \overset{\circ}{A} - \overline{F_k}$ y $\varepsilon_k < \frac{1}{2}\varepsilon_{k-1}$. Sea ahora $x_n \in B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap \overset{\circ}{A} - \overline{F_n}$ (que existe por ser F_n nada denso y $B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap \overset{\circ}{A}$ un abierto no vacío); como $B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap \overset{\circ}{A} - \overline{F_n}$ es abierto, existe $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$ tal que $\overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset \overset{\circ}{A} - \overline{F_n} \subset \overset{\circ}{A} - F_n$. La familia $\{\overline{B}(x_n, \varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia contable de cerrados encajados cuyos diámetros tienden a cero, y por la completitud de (X, d), la intersección se reduce a un único punto $\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset \overset{\circ}{A}$. Por construcción, $x_0 \notin F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, $x_0 \notin A$, lo cual es absurdo, pues $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. ∎

Observación 4.12. Dos de los teoremas más importantes del Análisis Funcional son consecuencias directas del teorema de Baire: el teorema de la aplicación abierta y el principio de la acotación uniforme.

Corolario 4.28. *Si* (X, d) *es un espacio métrico completo, es de segunda categoría.*

Corolario 4.29. *Si* (X, d) *es un espacio métrico completo, cualquier conjunto abierto y no vacío es de segunda categoría.*

Corolario 4.30. *Si* (X, d) *es un espacio métrico completo, la intersección de cualquier familia numerable de conjuntos abiertos y densos es un conjunto denso.*

Demostración: Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la familia de abiertos densos. Entonces, $\{B_n = X - A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados nada densos, por lo que su unión $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es de primera categoría. Aplicando el teorema de Baire 4.27, $\overset{\circ}{B} = \emptyset$, pero $B = X - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, es decir, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en X. ∎

Definición 4.10. Los espacios que verifican la propiedad enunciada en el corolario 4.30 se llaman *espacios de Baire*. Es decir, hemos probado que todo espacio métrico completo es de Baire.

4.6. Ejercicios

1.- Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en X. Se supone que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ es un conjunto finito. Probar que ambas sucesiones poseen el mismo límite o que ambas no convergen.

2.- Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos distintos dos a dos. Sea A el rango de la sucesión y $f\colon A \longrightarrow A$ una aplicación biyectiva. Si $\text{lím}(x_n) = x$, probar que $\text{lím}(f(x_n)) = x$.

3.- Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X. Probar:

(i) $\text{lím}(x_n) = x$ si y sólo si $\text{lím}(d(x_n, x)) = 0$ en $(\mathbb{R}, d_u)$,

(ii) si $\text{lím}(x_n) = x$, entonces $\text{lím}(d(x_n, y)) = d(x, y)$ en $(\mathbb{R}, d_u)$,

(iii) si $\text{lím}(x_n) = x$ y $\text{lím}(y_n) = y$, entonces $\text{lím}(d(x_n, y_n)) = d(x, y)$ en $(\mathbb{R}, d_u)$,

(iv) si $\text{lím}(x_n) = x$, entonces $\text{lím}(y_n) = x$ si y sólo si $\text{lím}(d(x_n, y_n)) = 0$ en $(\mathbb{R}, d_u)$,

(v) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y $\text{lím}(d(x_n, y_n)) = 0$ en $(\mathbb{R}, d_u)$, entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

4.- Sea $(\mathbb{R}, d_u)$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Se pide probar:

(i) si $\text{lím}(x_n) = x$ e $y < x$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, es $y < x_n$,

(ii) si $\text{lím}(x_n) = x \neq 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, x_n tiene el mismo signo que x,

(iii) si $\text{lím}(x_n) = x$, $\text{lím}(y_n) = y$ y $x < y$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, es $x_n < y_n$,

(iv) si $\text{lím}(x_n) = x$, $lim(y_n) = y$ y $x_n < y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$. Dar un ejemplo en el que $x = y$,

(v) si para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\text{lím}(x_n) = x$ y $\text{lím}(z_n) = x$, probar que $\text{lím}(y_n) = x$.

5.- Sea $(\mathbb{R}, d_u)$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente y acotada superiormente. Probar que $\text{lím}(x_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. Enunciar el resultado análogo para una sucesión decreciente de números reales.

6.- Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes en $(\mathbb{R}, d_u)$. Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{x_n \pm y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n{\cdot}y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\frac{x_n}{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($y_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$).

♣**7.-** En $(\mathbb{R}, d_u)$, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge*, si para cada $K > 0$, existe $n_K \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_K$, es $|x_n| > K$. Se pide probar:

(i) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, no converge,

(ii) dar un ejemplo de sucesión real ni convergente ni divergente,

(iii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente no acotada superiormente, entonces diverge,

(iv) si $A \subset \mathbb{R}$ es no acotado, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A divergente,

(v) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de rango no acotado, existe una subsucesión divergente,

(vi) toda subsucesión de una sucesión divergente, diverge.

8.- Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Probar que si $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. ¿Bastaría con que $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ fueran convergentes?, ¿y $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$? Encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la recta real, no convergente, tal que $\{x_{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja para $k \geq 2$.

9.- Probar que son equivalentes en (X, d) los siguientes enunciados:

(i) todo subconjunto de X es completo,

(ii) X es completo y discreto,

(iii) toda sucesión de Cauchy en X es semiconstante.

10.- Si d es la métrica discreta sobre X, probar (X, d) es un espacio métrico completo.

11.- Sea $(\mathbb{N}, d)$, donde $d(m, n) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Probar que la sucesión $\{x_n = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no converge: éste es un ejemplo de espacio métrico discreto no completo. Sin embargo, el espacio $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ con la misma métrica (donde $\frac{1}{+\infty} = 0$), es completo.

12.- Sea (X, d) y $d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. Se pide probar:

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d) si y sólo si lo es en (X, d^*);

(ii) si (X, d) es completo, entonces (X, d^*) también lo es.

♣**13.-** Sea X el conjunto de las sucesiones reales acotadas y la distancia $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n|$. Estudiar la completitud del espacio métrico (X, d).

♣**14.-** Sea $X = C([0, 1], \mathbb{R})$. Estudiar la completitud de los espacios métricos (X, d) y (X, ρ), donde $d(f, g) = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x) - g(x)|$ y $\rho(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|$.

15.- Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos. Se pide probar:

(i) Si (X, d) e (Y, ρ) son isométricos, X es completo si y sólo si Y lo es,

(ii) si (X, d) e (Y, ρ) son homeomorfos, no hay relación entre la completitud de ambos espacios,

(iii) si (X, d) e (Y, ρ) son métricamente equivalentes, X es completo si y sólo si Y lo es,

(iv) si (X, d) e (Y, ρ) son topológicamente equivalentes, no hay relación entre la completitud de ambos espacios.

16.- Sea (X, d) un espacio métrico y D un conjunto denso en X, tal que toda sucesión de Cauchy en D converge en X. Probar que X es completo.

17.- Dados los espacios métricos $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$, consideremos el espacio métrico (X, D), donde $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ y D es la métrica producto. Se pide probar:

(i) una sucesión converge en (X, D) si y sólo si las sucesiones coordenadas convergen en los espacios factores respectivos;

(ii) una sucesión es de Cauchy en (X, D) si y sólo si las sucesiones coordenadas lo son en los espacios factores respectivos;

(iii) (X, D) es completo si y sólo si cada uno de los espacios factores lo es.

18.- En (X, d) se pide probar:

(i) cualquier subsucesión de una sucesión de Cauchy, es de Cauchy,

(ii) una sucesión de Cauchy de rango finito es semiconstante, y por lo tanto convergente. Concluir que si X es finito, entonces el espacio métrico (X, d) es completo.

19.- Probar que el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, d_u)$ es completo. Decidir cuales de los siguientes subespacios euclídeos lo son: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$.

♣**20.-** En (X, d) se pide probar:

(i) si todo conjunto cerrado y acotado es completo, probar que (X, d) es completo;

(ii) si todo conjunto infinito y acotado posee puntos de acumulación, probar que (X, d) es completo.

21.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua y (X, d) completo. Probar que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d), entonces $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y, ρ). Dar un contraejemplo en el caso en el que (X, d) no sea completo.

♣**22.-** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X,d). Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $A_n=\{x_m : m\geq n\}$. Se pide probar:

(i) si $\{x_n\}\to x$, entonces $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$;

(ii) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y sólo si $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\delta(A_n)\}=0$.

♣**23.-** Sea (X,d) un espacio métrico no completo. El objetivo de este ejercicio es el de construir un espacio métrico completo, asociado de manera canónica a (X,d) y "cercano" a él, en el sentido que se verá más adelante. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en (X,d); se pide probar:

(i) la relación binaria sobre $\mathcal{C}$ dada por $\{x_n\}R\{y_n\}$ si y sólo si $d(x_n,y_n)\to 0$ en $(\mathbb{R},d_u)$ (utilizar el ejercicio 3), es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}$. Llamamos $\tilde{x}$ a la clase de $\{x_n\}$ y $\tilde{X}$ al espacio cociente;

(ii) $\delta(\tilde{x},\tilde{y})=\lim(d(x_n,y_n))$ define una distancia en $\tilde{X}$;

(iii) la aplicación $f\colon (X,d)\longrightarrow(\tilde{X},\delta)$ que lleva cada $x\in X$ en la clase de la sucesión constante igual a x, es una isometría de X en una parte densa de $\tilde{X}$;

(iv) $(\tilde{X},\delta)$ es completo.

Se dice que $(\tilde{X},\delta)$ es la *completación métrica* de (X,d), que "puede pensarse" como un subespacio denso en $\tilde{X}$ (al ser isométrico a un subespacio denso de $(\tilde{X},\delta)$).

24.- En (X,d), probar que la unión finita (respectivamente, la intersección arbitraria) de subconjuntos completos es completo.

25.- Para los espacios métricos del ejercicio 12 del apartado 2.8, caracterizar las sucesiones convergentes y las de Cauchy y estudiar su completitud.

♣**26.-** Sea (X,d) un espacio métrico acotado y $(\Phi(X),\rho)$ como en el ejercicio 50 del apartado 2.8. Probar que (X,d) es completo si y sólo si $(\Phi(X),\rho)$ lo es.

♣**27.-** En (X,d) se pide probar:

(i) A es magro si y sólo si $A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$, donde F_n es cerrado de interior vacío;

(ii) un subconjunto de un conjunto magro, es magro;

(iii) la unión contable de magros es un conjunto magro;

(iv) un conjunto numerable es magro si y sólo si ninguno de sus puntos es aislado;

(v) las rectas son conjuntos magros en el plano euclídeo.

♣28.- En (X, d) se pide probar:

(i) si (X, d) es completo y $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$, donde F_n es un conjunto cerrado, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\overset{\circ}{F_n} \neq \emptyset$;

(ii) si (X, d) es completo y $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$, donde F_n es cerrado, entonces $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$ es un abierto denso;

(iii) si (X, d) es completo y numerable, el conjunto de los puntos aislados de X es un abierto denso;

(x) si (X, d) es completo y no posee puntos aislados, entonces X es no numerable.

♣29.- Deducir las siguientes a aplicaciones del teorema de Baire en $(\mathbb{R}, d_u)$:

(i) todo cerrado numerable en $\mathbb{N}$ contiene una infinidad de puntos aislados, luego $\mathbb{R}$ es no numerable y no magro;

(ii) $\mathbb{Q}$ y el conjunto de Cantor son magros en la recta real, $\mathbb{I}$ es de segunda categoría;

(iii) el conjunto de Cantor no posee ningún punto aislado, luego no es contable;

(iv) no existe ninguna función $f \colon (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ cuyos puntos de continuidad sean exactamente los de $\mathbb{Q}$. Sin embargo, si existen tales funciones cuyos puntos de continuidad sean exactamente los de $\mathbb{I}$, por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad n \quad \text{es el menor entero tal que} \quad x = \frac{m}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x \quad \text{es irracional} \end{cases}$$

♣30.- En este ejercicio se prueba que existe una función continua $f \colon ([0, 1], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ que no posee derivada en ningún punto.
Es la típica demostración de teorema de existencia utilizando el teorema de Baire 4.27: se demuestra que algún elemento del espacio debe tener una determinada propiedad, probando que el espacio es de segunda categoría y que el conjunto de los elementos que no poseen dicha propiedad forma un espacio de primera categoría.
En el ejercicio 14 del apartado 4.6 se ha demostrado que $(C([0, 1], \mathbb{R}), d)$ (donde $d(f, g) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$) es un espacio métrico completo (luego de segunda categoría según el corolario 4.29). Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de las funciones en $(C([0, 1], \mathbb{R}), d)$ que poseen

derivada en algún punto. Se trata de probar que este conjunto es de primera categoría (ver [W], página 186): para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{E}_n = \left\{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) : \exists x \in [0, 1-1/n], \forall h \in (0, 1/n], \text{ es } \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leq n \right\}.$$

Se pide probar:

(i) $\mathcal{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$,

(ii) el interior de $\mathcal{E}_n$ es vacío,

(iii) $\mathcal{E}_n$ es cerrado.

Conexión en espacios métricos

La luna vino a la fragua
con su polisón de nardos.
El niño la mira mira.
El niño la está mirando.

"Romance de la luna"
Federico García Lorca (1898-1936)

5.1. Espacios y conjuntos conexos

Proposición 5.1. *En (X, d) son equivalentes las siguientes condiciones:*

(i) existen abiertos $U, V \subset X$ no vacíos, disjuntos tales que $U \cup V = X$;

(ii) existen cerrados $F, G \subset X$ no vacíos, disjuntos tales que $F \cup G = X$;

(iii) existe $A \subset X$ propio (es decir, $\emptyset \neq A \neq X$) abierto y cerrado a la vez;

(iv) existe $A \subset X$ propio con $\operatorname{fr}(A) = \emptyset$;

(v) existe una aplicación $f\colon (X, d) \longrightarrow (\{0, 1\}, d_u)$ continua y sobreyectiva.

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$ Basta con tomar $F = U = X - V$ y $G = V = X - U$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Basta con tomar $A = F = X - G$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ El conjunto A tiene frontera vacía por ser abierto y cerrado a la vez.

$(iv) \Rightarrow (v)$ La aplicación $\chi_A\colon (X, d) \longrightarrow (\{0, 1\}, d_u)$ es continua (al ser $\operatorname{fr}(A) = \emptyset$) y sobreyectiva (al ser A propio).

$(v) \Rightarrow (i)$ Basta con tomar $U = f^{-1}(\{0\})$ y $V = f^{-1}(\{1\})$. ∎

Definición 5.1. Si (X, d) verifica cualquiera de las condiciones equivalentes de la proposición 5.1, se dice que es un *espacio métrico disconexo*. A los conjuntos de (i) o (ii) se les llama una *disconexión* de (X, d).

Definición 5.2. (X, d) es *conexo* si no es disconexo, es decir, intuitivamente está formado "de una única pieza". $A \subset X$ se llama *conexo* si el espacio métrico (A, d_A) lo es.

Lema 5.2. *En (X, d), $A \subset X$ es disconexo si y sólo si existen abiertos U y V en (X, d), tales que $U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$, $U \cap V \cap A = \emptyset$ y $A \subset U \cup V$.*

Lema 5.3. *En (X, d), $A \subset X$ es disconexo si y sólo si existen cerrados F y G en (X, d), tales que $F \cap A \neq \emptyset \neq G \cap A$, $F \cap G \cap A = \emptyset$ y $A \subset F \cup G$.*

La conexión es una propiedad absoluta, en el siguiente sentido:

Lema 5.4. *Sean (X, d) y $B \subset A \subset X$. B es conexo en (A, d_A) si y sólo si es conexo en (X, d).*

Ejemplos 5.1. Algunos ejemplos de espacios métricos conexos son:

(i) en cualquier espacio métrico (X, d), los átomos (conjuntos formados por un único punto) son conexos;

(ii) si (X, d) es un espacio métrico discreto, $A \subset X$ es conexo si y sólo si se reduce a un punto;

(iii) en $(\mathbb{R}, d_u)$, son disconexos $(0, 1] \cup [2, 5)$ y $\mathbb{R} - \{0\}$.

Teorema 5.5. *Sean (X, d) y $A \subset X$ conexo. Si $B \subset X$ es tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo. En particular, la clausura de todo conjunto conexo es conexa.*

Demostración: Supongamos que B no es conexo. Por el lema 5.2, existen abiertos U y V en (X, d), tales que $U \cap B \neq \emptyset \neq V \cap B$, $U \cap V \cap B = \emptyset$ y $B \subset U \cup V$. Como $A \subset B$ es conexo, deberá ser $U \cap A = \emptyset$ ó $V \cap A = \emptyset$. Supongamos que $U \cap A = \emptyset$, entonces $U \cap \overline{A} = \emptyset$ al ser U abierto. Como $B \subset \overline{A}$, será $U \cap B = \emptyset$, lo que es absurdo. ∎

Observación 5.1. El recíproco no es cierto: se verá en el teorema 5.14 que $\mathbb{Q}$ no es conexo en $(\mathbb{R}, d_u)$, pero $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ si lo es.

Observación 5.2. No existe un resultado análogo al teorema 5.5 para el interior, el derivado o la frontera.

Observación 5.3. La conexión no se comporta bien respecto a las operaciones de conjuntos:

(i) en $(\mathbb{R}, d_u)$, los conjuntos $A = \{0\}$ y $B = \{1\}$ son conexos, pero su unión $A \cup B = \{0, 1\}$ no lo es;

(ii) en $(\mathbb{R}, d_u)$, $A = (0, 1)$ es conexo (teorema 5.14), pero su complementario $\mathbb{R} - A$ no lo es;

(iii) en $(\mathbb{R}^2, d_u)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x \geq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x \leq 0\}$ son conjuntos conexos (son ambos homeomorfos a un intervalo cerrado, y basta con utilizar el teorema 5.14 y el corolario 5.17), pero su intersección $A \cap B = \{(0, 1), (0, -1)\}$ no lo es.

Pero, existen resultados parciales:

Teorema 5.6. *En (X, d), se verifica:*

(i) si $\{C_i : i \in I\}$ es una familia de conexos y existe $i_0 \in I$ tal que $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ para cada $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo;

(ii) si $\{C_i : i \in I\}$ es una familia de conexos tales que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo.

Demostración: (ii) se deduce trivialmente de (i). Supongamos que $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ no es conexo, es decir, existen abiertos U y V en (X, d), tales que $U \cap C \neq \emptyset \neq V \cap C$, $U \cap V \cap C = \emptyset$ y $C \subset U \cup V$. Para cada $i \in I$, es $U \cap V \cap C_i = \emptyset$ y $C_i \subset U \cup V$, y por la conexión de C_i, debe ser $U \cap C_i = \emptyset$ ó $V \cap C_i = \emptyset$. Supongamos que $U \cap C_{i_0} = \emptyset$, con lo que $C_{i_0} \subset V$. Sean $I_U = \{i \in I : U \cap C_i = \emptyset\}$ y $I_V = \{i \in I : V \cap C_i = \emptyset\}$. Si $i \in I_V$, es $C_i \cap C_{i_0} \subset C_i \cap V = \emptyset$, contra la hipótesis, así que $I_V = \emptyset$. Entonces, para cada $i \in I$ es $U \cap C_i = \emptyset$, con lo que $U \cap C = \emptyset$, en contra de la hipótesis. ∎

5.2. Componentes conexas

En todo espacio métrico existen conjuntos conexos, al menos los átomos (conjuntos formados por un único punto). Se trata ahora de determinar los conexos "maximales" en (X, d). El tamaño y número de estos conexos dará una idea de "cuanto se aleja" X de ser conexo.

Definición 5.3. Sean (X, d), $x \in X$ y $\mathcal{F}(x) = \{C \subset X : C$ es conexo y $x \in X\}$. Claramente, $\mathcal{F}(x)$ es no vacío, ya que al menos $\{x\} \in \mathcal{F}(x)$. Como $\bigcap_{C \in \mathcal{F}(x)} C \neq \emptyset$, el teorema 5.6 garantiza que $C(x) = \bigcup_{C \in \mathcal{F}(x)} C$ es un conjunto conexo, llamado *componente conexa* del punto x.

Lema 5.7. *$C(x)$ es el mayor conexo que contiene al punto x.*

Lema 5.8. *En (X, d), el conjunto de las componentes conexas forma una partición del espacio.*

Demostración: Es claro que $X = \bigcup_{x \in X} C(x)$, al ser $x \in C(x)$. Si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, el conjunto $C(x) \cup C(y)$ es conexo y $x \in C(x) \cup C(y)$. Como $C(x)$ es el mayor conexo que contiene a x, debe ser $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$, luego $C(y) \subset C(x)$. Aplicando un argumento similar para y, se deduce que $C(y) = C(x)$. ∎

Esta partición determina una relación de equivalencia en X: $x \sim y$ si y sólo si x e y pertenecen a la misma componente conexa, es decir, si y sólo si $C(x) = C(y)$. Las clases de equivalencia respecto a esta relación son justamente las *componentes conexas*.

Lema 5.9. *(X, d) es conexo si y sólo si existe una única componente conexa.*

Teorema 5.10. *Las componentes conexas en (X, d) son conjuntos cerrados.*

Demostración: Sea C una componente conexa. Por el teorema 5.5, $\overline{C}$ es también conexo, y la propiedad de maximalidad implica que $C = \overline{C}$. ∎

5.3. Espacios totalmente disconexos

Definición 5.4. El espacio métrico (X, d) se llama *totalmente disconexo*, si para cada $x \in X$ es $C(x) = \{x\}$.

Ejemplos 5.2. Algunos ejemplos de espacios totalmente disconexos son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_u)$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ son totalmente disconexos;

(ii) si (X, d) es discreto y con más de un punto, es totalmente disconexo.

Lema 5.11. *(X, d) es totalmente disconexo si y sólo si las componentes conexas se reducen a puntos.*

5.4. Conexión en la recta real

Definición 5.5. Un *intervalo* I en $\mathbb{R}$ es un conjunto convexo, es decir, si $a, b \in I$, para cada $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq b$, es $c \in I$.

Observación 5.4. Así, $I \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo si existen $a, b \in I$ y $a < c < b$, tal que $c \notin I$.

Observación 5.5. Por lo tanto, son intervalos para $a, b \in \mathbb{R}$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $[a, a] = \{a\}$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ y $\mathbb{R}$.

Proposición 5.12. *Si A es conexo en $(\mathbb{R}, d_u)$, es un intervalo.*

Demostración: Supongamos que A tiene más de un punto (si se reduce a un punto, la propiedad queda probada). Sean $a, b \in A$, $a < b$ y supongamos que existe $a < c < b$, tal que $c \notin A$. Entonces, $U = (-\infty, c)$ y $V = (c, \infty)$ son abiertos en $(\mathbb{R}, d_u)$, tales que $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$, $A \cap U \cap V = \emptyset$ y $A \subset U \cup V = \mathbb{R} - \{c\}$, en contra de la conexión de A. ∎

Proposición 5.13. *El intervalo $[a, b]$ es conexo en $(\mathbb{R}, d_u)$, para $a < b$.*

Demostración: Si $[a, b]$ no fuera conexo, por el lema 5.3, existirían F y G cerrados en $(\mathbb{R}, d_u)$, tales que $F \cap [a, b] \neq \emptyset \neq G \cap [a, b]$, $F \cap G \cap [a, b] = \emptyset$ y $[a, b] \subset F \cup G$). Como $[a, b]$ es cerrado en $(\mathbb{R}, d_u)$, $F \cap [a, b]$ y $G \cap [a, b]$ son también cerrados en $(\mathbb{R}, d_u)$. Como $F \cap [a, b]$ está acotado superiormente por b, existe $c = sup\{F \cap [a, b]\} \in \overline{F \cap [a, b]} = F \cap [a, b]$. Además, $F \cap [a, b]$ es abierto en $([a, b], d_u)$ (ya que $F \cap [a, b] = (\mathbb{R} - G) \cap [a, b]$), luego existe $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \subset F \cap [a, b]$. Supongamos que $c \neq b$, entonces existe $d \in [a, b]$, tal que $c < d < c + \delta$, y en tal caso $d \in F \cap [a, b]$, contra la definición de supremo. Así, $b = c$, y por lo tanto $b \in F \cap [a, b]$. Un argumento similar prueba que $b \in G \cap [a, b]$, con lo que se llega a una contradicción. ∎

Teorema 5.14. *A es conexo en $(\mathbb{R}, d_u)$ si y sólo si es un intervalo.*

Demostración: Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $a \in A$. Para cada $x \in A$, sea $I_x = [x, a]$ si $x \leq a$ e $I_x = [a, x]$ si $a \leq x$. La familia $\{I_x : x \in A\}$ es una familia de conexos en $(\mathbb{R}, d_u)$ según la proposición 5.13. Además, $a \in \bigcap_{x \in A} I_x$, con lo que por el teorema 5.6, $A = \bigcup_{x \in A} I_x$ es conexo. ∎

En particular, $(\mathbb{R}, d_u)$ es conexo.

5.5. Conexión y continuidad

Teorema 5.15. *Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua y sobreyectiva. Si (X, d) es conexo, (Y, ρ) también lo es.*

Demostración: Si (Y,ρ) no fuera conexo, existiría $A\subset Y$ propio abierto y cerrado a la vez. Entonces, $f^{-1}(A)$ sería propio, abierto y cerrado en (X,d), contra la hipótesis. ∎

Corolario 5.16. *Sea $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ continua. Si A es conexo en (X,d), entonces $f(A)$ es conexo en (Y,ρ).*

Corolario 5.17. *Sea $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ un homeomorfismo. (X,d) es conexo si y sólo si (Y,ρ) lo es.*

Teorema 5.18. ***(Teorema del valor intermedio)*** *Sean $f\colon (\mathbb{R},d_u)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$ continua y $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ y $f(a)\neq f(b)$. Entonces, f toma cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$.*

Demostración: Supongamos que $f(a)<f(b)$. Como $f([a,b])$ es conexo, deberá ser un intervalo, y en particular, $[f(a),f(b)]\subset f([a,b])$. ∎

5.6. Conexión por caminos

La conexión es una propiedad difícil de manejar, al tratarse de una propiedad en sentido negativo: un espacio es conexo si no existe una separación no trivial por abiertos disjuntos. La conexión por caminos posee la ventaja de ser una propiedad *algebraica* y en sentido positivo.

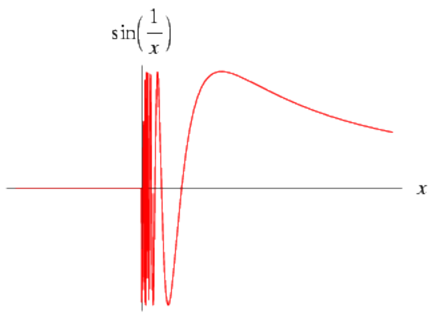
Definición 5.6. Dado un espacio métrico (X,d), un *camino* en X es una aplicación continua $\sigma\colon ([0,1],d_u)\longrightarrow(X,d)$. Si $\sigma(0)=a$ y $\sigma(1)=b$, se dice que σ es un camino de a a b.

Definición 5.7. (X,d) es *conexo por caminos*, si para todo par de puntos $a,b\in X$ existe un camino que los une.

Proposición 5.19. *Si (X,d) es conexo por caminos, es conexo.*

Demostración: Si no fuera conexo, existirían abiertos $U,V\subset X$ no vacíos, disjuntos tales que $U\cup V=X$. Si elegimos $a\in U$ y $b\in V$, existe $\sigma\colon ([0,1],d_u)\longrightarrow(X,d)$ un camino que los une. Como σ es continua, $\sigma^{-1}(U)$ y $\sigma^{-1}(V)$ son abiertos en $([0,1],d_u)$, no vacíos ($0\in\sigma^{-1}(U)$ y $1\in\sigma^{-1}(V)$), disjuntos y cuya unión es $[0,1]$, en contra de la conexión del intervalo. ∎

El recíproco no es cierto:



Ejemplo 5.1. La *curva seno topológico* es el subespacio del plano euclídeo

$$A = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0 \right\}.$$

A es conexo, pero no es conexo por caminos.

Definición 5.8. (X, d) es *localmente conexo por caminos*, si para cada $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \varepsilon)$ es conexa por caminos.

A pesar del ejemplo 5.1, existe un recíproco parcial de la proposición 5.19

Proposición 5.20. *Si* (X, d) *es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos.*

Demostración: Sea $a \in X$ y $A = \{x \in X :$ existe un camino que une x con $a\}$. A es no vacío, pues $a \in A$ (el camino constante igual a a une a consigo mismo).

(i) A es abierto: si $x \in A$, sea $B(x, \varepsilon)$ la bola conexa por caminos que existe. Para cada $z \in B(x, \varepsilon)$, sea σ_z un camino en $B(x, \varepsilon)$ que une z con x y σ un camino en X que une x con a. Entonces, el camino $\sigma * \sigma_z \colon ([0, 1], d_u) \longrightarrow (X, d)$ definido por

$$\sigma * \sigma_z(t) = \begin{cases} \sigma_z(2t) & \text{si} \quad t \leq 1/2 \\ \sigma(2t-1) & \text{si} \quad t \geq 1/2 \end{cases}$$

une z con a, por lo que $z \in A$ y $B(x, \varepsilon) \subset A$.

(ii) A es cerrado: si $x \in \overline{A}$ y $B(x, \varepsilon)$ es la bola conexa por caminos que existe, es $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Sean $z \in A \cap B(x, \varepsilon)$, σ_z un camino en $B(x, \varepsilon)$ que une x con z y σ un camino en X que une z con a. Entonces, el camino $\sigma * \sigma_z$ (definido arriba) une z con a, por lo que $x \in A$.

Como A es no vacío, abierto y cerrado en (X, d) conexo, es necesariamente $X = A$. ∎

Observación 5.6. En el ejemplo 5.1, la curva seno topológico no es localmente conexa por caminos, por ello no es conexa por caminos a pesar de ser conexa.

Ejemplos 5.3. Algunos ejemplos de espacios conexos por caminos son:

(i) los espacios discretos no son conexos por caminos;

(ii) en $(\mathbb{R}, d_u)$, los conjuntos conexos y los conexos por caminos coinciden;

(iii) en $(\mathbb{R}^n, d_u)$ para $A \subset \mathbb{R}^n$, se verifica

- si A es conexo y abierto, es conexo por caminos;
- si A es convexo, es conexo por caminos;
- si A es contable y $n > 1$, $\mathbb{R}^n - A$ es conexo por caminos.

Teorema 5.21. *La imagen continua de un espacio conexo por caminos, es conexa por caminos.*

Se define sobre X la relación binaria $x \simeq y$ si y sólo si existe un camino en X que une x e y. Se trata de una relación de equivalencia, cuyas clases son las *componentes conexas por caminos* de X. La componente conexa por caminos de un punto x, $k(x)$, es el mayor conjunto conexo por caminos de X que lo contiene.

Lema 5.22. *En (X, d), para cada $x \in X$, es $C(x) \subset k(x)$.*

5.7. Ejercicios

1.- En un espacio métrico (X, d), probar que son equivalentes:

(i) (X, d) es conexo,

(ii) para cada $x, y \in X$, existe un conjunto conexo C_{xy} tal que $x, y \in C_{xy}$,

(iii) para toda función continua $f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, $f(X)$ es conexo,

(iv) toda función continua $f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ tal que $f(X)$ toma valores negativos y positivos, se anula en al menos un punto,

(v) toda función continua $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ (donde (Y, ρ) es un espacio métrico discreto) es constante,

(vi) todo subconjunto propio de X posee frontera no vacía.

2.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ conexo. Si $B \subset X$ es tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap (X - B) \neq \emptyset$, entonces se tiene $A \cap \mathrm{fr}(B) \neq \emptyset$.

3.- Sean A y B subconjuntos conexos en (X, d). Se pide:

(i) probar que $A \cup B$ es conexo si y sólo si $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset$. Escribir explícitamente el caso en que ambos conjuntos son cerrados (respectivamente, abiertos);

(ii) aplicarlo al caso en que $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_u)$, $A = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = sen(\frac{1}{x})\}$ y $B = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$;

(iii) si $\emptyset \neq \mathrm{fr}(A) \subset B$, probar que $A \cup B$ es conexo.

4.- En (X, d), sean A y B subconjuntos cerrados (respectivamente, abiertos). Probar que si $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos. Ver que la condición impuesta a A y B es necesaria.

5.- En (X, d) conexo, probar:

(i) si (X, d) no es acotado, toda esfera es no vacía;

(i) para cada par de puntos $x, y \in X$, existe $z \in X$, tal que $d(x, z) = d(y, z)$;

(ii) si $Card(X) \geq 2$, entonces $Card(X) \geq Card(\mathbb{R})$;

(iii) si $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es continua y no constante, entonces $f(X)$ es no contable.

6.- Sean (X, d) y $a, b \in X$. Se supone que existe $A \subset X$ abierto y cerrado, tal que $a \in A$ y $b \notin A$. Probar que ningún subconjunto conexo de X puede contener a a y b simultáneamente.

7.- Decidir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas en (X, d):

(i) Si A es conexo, entonces $\overset{\circ}{A}$ y $\mathrm{fr}(A)$ son conexos,

(ii) si A, B conexos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos,

(iii) si $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es continua y sobreyectiva, X tiene m componentes conexas e Y tiene n componentes conexas, entonces $m \geq n$,

(iv) la imagen continua de un conjunto disconexo, es disconexa.

8.- Sea (X, d) un espacio métrico donde toda bola abierta es conexa. Probar que X es conexo.

9.- Sea (X, d) y una familia de conjuntos conexos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que su unión es conexa.

10.- En (X, d) un espacio métrico, probar:

(i) si A es conexo, no vacío, abierto y cerrado en X, entonces es una componente conexa;

(ii) si A es abierto y cerrado en X y C es conexo, entonces es $C \subset A$ ó $C \subset X - A$;

(iii) si C es la componente conexa de x, entonces está contenida en cada conjunto abierto y cerrado que contiene a x.

♣11.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ una aplicación continua entre dos espacios métricos. Se dice que f es *localmente constante* si para cada $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que f es constante en $B(x,r_x)$. Probar que si (X,d) es conexo y f es localmente constante, es constante.

12.- La conexión ¿se conserva bajo equivalencias topológicas? ¿bajo equivalencias métricas? ¿bajo isometrías?

13.- Si (X,d) posee una cantidad finita de componentes conexas, probar que son abiertas y cerradas.

14.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ un homeomorfismo. Probar que la imagen de una componente conexa, es una componente conexa. En particular, (X,d) es conexo si y sólo si (Y,ρ) lo es.

15.- Probar que el producto de finito de espacios métricos es conexo si y sólo si cada espacio factor lo es.

16.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ continua y (X,d) es conexo. Probar que el grafo de f, G_f, es conexo en el espacio producto $(X \times Y, D)$.

17.- Describir las aplicaciones continuas $f\colon (\mathbb{R},d_u) \longrightarrow (X,d)$, donde (X,d) es un espacio métrico discreto.

18.- Utilizando el ejercicio 37 del apartado 3.5, probar que los conjuntos siguientes son conexos en el espacio euclídeo correspondiente: $\mathbb{S}^1-\{(0,1)\}$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n-\{(0,\dots,0,1)\}$, $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{R}^n - \{(0,\cdots,0)\}$ (para $n > 1$).

19.- Probar que los siguientes conjuntos de $(\mathbb{R}^2,d_u)$ no son dos a dos homeomorfos: $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \geq 1\}$, $B = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \geq 0\}$ y $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

20.- Probar que no son homeomorfos los siguientes conjuntos de $(\mathbb{R},d_u)$: $(0,1)$, $(0,1]$ y $[0,1]$. Además, ningún subconjunto de la recta real es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

21.- Probar que $(\mathbb{Q},d_u)$ y $(\mathbb{Q},d)$ (d es la métrica discreta), poseen los mismos conjuntos conexos. ¿Son homeomorfos estos dos espacios métricos? ¿Son topológicamente equivalentes?

22.- Demostrar que en el plano euclídeo $A = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}$ ó $y \in \mathbb{Q}\}$ es conexo y $B = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{Q}\}$ no lo es.

♣**23.-** Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices reales cuadradas $n \times n$, que se identifica al espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n^2}$. Probar que el conjunto de las matrices inversibles $G_n \subset M_n(\mathbb{R})$, es un abierto formado de dos componentes conexas.

24.- Probar que un polinomio real impar posee al menos una raíz real.

25.- En la recta real, probar:

(i) si $f\colon A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona y $f(A)$ es denso en el intervalo J, entonces f es continua. En particular, si $f\colon A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona y $f(A)$ es un intervalo, entonces f es continua;

(ii) si $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva (donde I es un intervalo), entonces f es monótona y es un homeomorfismo de I sobre el intervalo $J = f(I)$;

(iii) si $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$ es una biyección entre los intervalos I y J, entonces f es homeomorfismo si y sólo si f es monótona.

26.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continua. Si $\min_{x\in X}\{f(x)\} < c < \max_{x\in X}\{f(x)\}$, demostrar el conjunto $X - \{f^{-1}(c)\}$ es disconexo.

♣**27.-** Sea $f\colon ([0,1], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continua tal que $f(0) = f(1)$. Para cada $n > 1$, probar que existe $x \in [0,1]$, tal que $x + \frac{1}{n} \in [0,1]$ y $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

28.- Probar que todo abierto de la recta real se puede escribir como una reunión, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos dos a dos disjuntos.

29.- Considerando los espacios euclídeos correspondientes, probar:

(i) si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}^2$ son homeomorfos, entonces $\overset{\circ}{B} = \emptyset$;

(ii) no existe $f\colon (\mathbb{R}^2, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continua e inyectiva. Concluir que $(\mathbb{R}, d_u)$ y $(\mathbb{R}^2, d_u)$ no son homeomorfos.

30.- Probar que no existe $f\colon ([0,1], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continua, tal que $x \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $f(x) \notin \mathbb{Q}$.

31.- Describir las funciones continuas $f\colon ([0,2] \cup (4,6], d_u) \longrightarrow (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, d_u)$.

32.- Se consideran las letras mayúsculas como subconjuntos del plano euclídeo:

A B C D E F G H I J L M N O P Q R S T U V X Z,

desprovistas de extremidades. Se pide agruparlas por letras homeomorfas.

33.- Para los espacios métricos del ejercicio 12 del apartado 2.8, estudiar la conexión y determinar la componente conexa de cada punto.

34.- Para $n \geq 1$, sea $f\colon (\mathbb{S}^n, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continua. Probar que existe $x \in \mathbb{S}^n$, tal que $f(x) = f(-x)$.

35.- Sean $D = \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$ y $g\colon (D, d_u) \longrightarrow (D, d_u)$ un homeomorfismo. Probar que $g(0, 0) = (0, 0)$ y que la restricción de g al conjunto $\{(-1, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ es una permutación de este conjunto.

36.- Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{I}, y \geq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y < 0\}$, probar que $A \cup B$ es conexo en $(\mathbb{R}^2, d_u)$.

♣**37.-** Sea (X, d) un espacio métrico y las relaciones binarias R_1 y R_2 dadas por:

xR_1y si y sólo si existe una parte conexa C que contiene a ambos puntos;

xR_2y si y sólo si todo abierto y cerrado conteniendo a x, contiene a y.

Se pide probar:

(i) R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia sobre X;

(ii) $[x]_1 = C(x)$, $[x]_2 = \cap\{A : A$ es abierto y cerrado y $x \in A\}$ y ambos conjuntos son cerrados;

(iii) para cada $x \in X$, $[x]_1 \subset [x]_2$;

(iv) si $A \subset \mathbb{R}$, $[x]_1 = [x]_2$ en (A, d_u);

(v) sea $C = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$, unión de los conjuntos $A = \{(\frac{1}{n}, y) : n \in \mathbb{N}, -1 \leq y \leq 1\}$ y $B = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1, y \neq 0\}$. Probar que $[x]_1 \neq [x]_2$ en (C, d_u).

38.- Probar las siguientes propiedades:

(i) si $Y = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ y $f\colon (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (Y, d_u)$ es continua y sobreyectiva, entonces $f^{-1}((0, 0))$ debe contener al menos tres puntos;

(ii) si $f\colon (\mathbb{S}^1, d_u) \longrightarrow ([0, 1], d_u)$ es continua y sobreyectiva, para cada $c \in (0, 1)$, el conjunto $f^{-1}(c)$ debe contener más de un punto.

♣**39.-** Si (X, d) es conexo y $k \in \mathbb{N}$, x se llama un *punto de corte de orden* k, si $X - \{x\}$ posee k componentes conexas. Se pide:

(i) probar que se trata de una propiedad que se preserva por homeomorfismos;

(ii) en la recta real, ¿qué tipos de puntos de corte poseen los intervalos $[0, 1]$, $(0, 1]$ y $(0, 1)$?

(iii) si $n > 1$, $(\mathbb{R}^n, d_u)$ posee un punto de corte de orden 1, luego $(\mathbb{R}^n, d_u)$ y $(\mathbb{R}, d_u)$ no son homeomorfos.

♣**40.-** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$. Se pide probar:

(i) si A es contable, entonces $\mathbb{R}^n - A$ es conexo;

(ii) si A es acotado, $\mathbb{R}^n - A$ tiene una componente conexa no acotada;

(iii) si A es convexo, es conexo. El recíproco no es cierto.

41.- Sea (X, d) un espacio métrico. Se pide probar:

(i) la unión de cualquier familia de conjuntos conexos por caminos con un punto en común, es un conjunto conexo por caminos;

(ii) la clausura de un conjunto conexo por caminos, no es en general conexa por caminos.

♣**42.-** Sea (P, d_u) el *espacio peine*, es decir:

$$P = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

Se pide probar:

(i) P conexo por caminos y $P - \{(0,0)\}$ es conexo;

(ii) si $A = \{0\} \times (0,1)$, $P - A$ es conexo y posee dos componentes conexas por caminos;

(iii) si $B = \{0\} \times \mathbb{I}$ y $C = (P - A) \cup B$, C es conexo y posee una cantidad no contable de componentes conexas por caminos.

Compacidad en espacios métricos

Porque noto, alma torcida,
Que en mi pecho milagroso,
Mientras más honda la herida,
Es mi canto más hermoso.

"Versos sencillos"
José Martí (1853-1895)

6.1. Espacios y conjuntos compactos

Definición 6.1. Si $X \neq \emptyset$, un *cubrimiento* de X (respectivamente, de $A \subset X$) es una familia $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$, tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ (respectivamente, $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$).

Definición 6.2. Un *subrecubrimiento* de un cubrimiento $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i \in I}$ de X es una subfamilia $\mathcal{V} = \{A_i\}_{i \in J}$ (es decir, $J \subset I$), que sigue cubriendo X. Si J es finito, se habla de *subrecubrimiento finito*.

Definición 6.3. En (X, d), si $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de X y A_i es abierto para cada $i \in I$, se habla de un *cubrimiento por abiertos*.

Definición 6.4. (X, d) es *compacto* si todo cubrimiento por abiertos de X posee un subrecubrimiento finito. Y $A \subset X$ es *compacto* si (A, d_A) lo es.

Observación 6.1. Se trata de una generalización topológica del concepto de conjunto finito: en (X, d), si A es finito, es claramente compacto. Vamos a ver que existen conjuntos compactos infinitos, aunque sus propiedades los hacen semejantes a los conjuntos finitos.

Ejemplos 6.1. Algunos ejemplos de espacios compactos son:

(i) $(\mathbb{R}, d_u)$ no es compacto, ya que la familia de abiertos $\{(n-1, n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ cubre $\mathbb{R}$, pero no posee subrecubrimiento finito;

(ii) si (X,d) es discreto, $A \subset X$ es compacto si y sólo si es finito;

(iii) $((0,1],d_u)$ no es compacto, ya que la familia de abiertos $\{(\frac{1}{n},1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubre $(0,1]$, pero no posee subrecubrimiento finito

Por dualidad con el concepto de abierto, se obtiene la siguiente caracterización:

Teorema 6.1. *(X,d) es compacto si y sólo si para cada familia de cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$ tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, existe una familia finita $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ tal que $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} = \emptyset$.*

Definición 6.5. Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ en X tiene la *propiedad de intersección finita* si para toda subfamilia finita $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ es $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$.

A partir de esta definición, se obtiene una nueva caracterización de compacidad:

Corolario 6.2. *(X,d) es compacto si y sólo si para cualquier familia de cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$ con la propiedad de intersección finita, es $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

La compacidad es una propiedad absoluta, en el siguiente sentido:

Proposición 6.3. *A es compacto en (X,d) si y sólo si para cualquier familia de abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ en (X,d) tales que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, existe una subfamilia finita $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$ tal que $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.*

Teorema 6.4. *Si A es cerrado en (X,d) compacto, entonces A es compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en (X,d) que cubren A. Entonces $X = (X-A) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$. Como $X-A$ es abierto, hemos encontrado un cubrimiento por abiertos del compacto X, por lo que existe $\{i_1,\dots,i_n\} \subset I$, tal que $X = (X-A) \cup \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$, y por lo tanto $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$. ∎

El siguiente resultado asemeja un compacto a un punto:

Lema 6.5. *Sea A compacto en (X,d) y $x \notin A$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$.*

Demostración: Para cada $a \in A$ es $a \neq x$. La propiedad de Hausdorff garantiza que si $d(a,x) = r_a$, es $B(a,\frac{r_a}{2}) \cap B(x,\frac{r_a}{2}) = \emptyset$. Pero $A \subset \bigcup_{a\in A} B(a,\dfrac{r_a}{2})$, y al ser compacto, existe $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, de modo que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{r_{a_i}}{2})$. Si $r = \text{mín}\{\frac{r_{a_i}}{2} : 1 \leq i \leq n\}$, es $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. ∎

Ejemplo 6.1. El lema anterior demuestra que $(0, 1]$ no es compacto en $(\mathbb{R}, d_u)$, ya que $0 \notin A$ y para cada $\varepsilon > 0$ es $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (0, 1] \neq \emptyset$.

Teorema 6.6. *Si A es compacto en (X, d), entonces A es cerrado.*

Demostración: Si $x \notin A$, por el lema 6.5, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, con lo que $x \notin \overline{A}$. ∎

Teorema 6.7. *Si A es compacto en (X, d), entonces A está acotado.*

Demostración: Sea el cubrimiento $A \subset \bigcup_{a \in A} B(a, 1)$. Como A es compacto, existe una familia finita $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, 1)$. Si $a, b \in A$, existen $1 \leq i, j \leq n$ tales que $a \in B(a_i, 1)$ y $b \in B(a_j, 1)$. Entonces, $d(a, b) \leq d(a, a_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, b) < 2 + d(a_i, a_j)$. Si $k = \text{máx}\{d(a_i, a_j) : 1 \leq i, j \leq n\}$, es claro que para cada $a, b \in A$ es $d(a, b) < 2 + k$. ∎

Teorema 6.8. *La unión finita y la intersección arbitraria de compactos es compacta.*

Observación 6.2. La unión arbitraria de compactos no es compacta: en $(\mathbb{R}, d_u)$, $\{x\}$ es compacto, pero $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ no lo es.

Observación 6.3. Según los teoremas 6.6 y 6.7, un compacto A en (X, d) es cerrado y acotado. Pero el recíproco no es cierto: para $(\mathbb{R}, d)$ donde d es la métrica discreta, $\mathbb{R}$ es cerrado y acotado, pero no es compacto.

6.2. Compacidad y continuidad

Las funciones continuas llevan compactos en compactos:

Teorema 6.9. *Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua. Si A es compacto en (X, d), entonces $f(A)$ es compacto en (Y, ρ).*

Demostración: Sea $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en (Y,ρ) que cubren $f(A)$. Entonces, $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos en (X,d) que cubren A. Como A es compacto, existe $\{i_1,\ldots,i_n\} \subset I$, tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})$, y por lo tanto $f(A) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$. ∎

Corolario 6.10. *Sea $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ continua y (X,d) compacto. Si A es cerrado en (X,d), entonces $f(A)$ es cerrado en (Y,ρ).*

Demostración: A es cerrado en el compacto (X,d), luego es compacto por el teorema 6.4. El teorema 6.9 garantiza que $f(A)$ es compacto en (Y,ρ), y por lo tanto cerrado, según el teorema 6.6. ∎

Observación 6.4. La compacidad es esencial en el corolario 6.10: $f\colon (\mathbb{R},d_u)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua, $\mathbb{R}$ es cerrado y $f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ no lo es.

Teorema 6.11. *Sea $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ biyectiva y continua. Si (X,d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración: El corolario 6.10 afirma que f^{-1} es continua. ∎

Observación 6.5. La compacidad de (X,d) es esencial: $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R},d)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$, donde d es la métrica discreta es continua y biyectiva, pero no es un homeomorfismo.

Teorema 6.12. *Sea $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ continua. Si (X,d) es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$; para cada $x \in X$ existe $\delta_x = \delta(x,\varepsilon) > 0$ tal que $f\left(B_X(x,\delta_x)\right) \subset B_Y(f(x),\frac{\varepsilon}{2})$. Pero, $X = \bigcup_{x\in X} B_X\left(x,\dfrac{\delta_x}{2}\right)$, por lo que existe $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_X\left(x_i,\dfrac{\delta_{x_i}}{2}\right)$. Sea $\delta_0 = \text{mín}\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2} : 1 \le i \le n\right\}$; éste es el valor que satisface la condición de continuidad uniforme: en efecto, si $a,b \in X$ y $d(a,b) < \delta_0$, existe $1 \le i \le n$ tal que $a \in B_X(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2})$, y entonces $d(b,x_i) \le d(b,a) + d(a,x_i) < \delta_0 + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i}$. Luego, $a,b \in B_X(x_i,\delta_{x_i})$, con lo que la continuidad de f garantiza que $f(a),f(b) \in B_Y(f(x_i),\frac{\varepsilon}{2})$, y entonces es $\rho(f(a),f(b)) < \varepsilon$. ∎

6.3. Compacidad secuencial

Definición 6.6. (X, d) es *secuencialmente compacto*, si toda sucesión en (X, d) posee una subsucesión convergente.

Ejemplo 6.2. $((0, 1], d_u)$ no es secuencialmente compacto, pues la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones convergentes.

Definición 6.7. (X, d) posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass*, si todo conjunto infinito $A \subset X$ posee puntos de acumulación.

Teorema 6.13. (X, d) *es secuencialmente compacto si y sólo si posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass.*

Demostración: Sea A infinito, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos distintos dos a dos en A y supongamos que la subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \overline{A}$: como es de términos distintos dos a dos, es $x \in A'$. Recíprocamente, supongamos que (X, d) posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si su rango es finito, existe una subsucesión constante, que converge. En caso contrario, si $A = Rg\,(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, es $A' \neq \emptyset$. Para $x \in A'$, existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A, de términos distintos dos a dos, que se puede elegir como una subsucesión de la primera, y que converge a x. ■

Teorema 6.14. *Si* (X, d) *es secuencialmente compacto, entonces es completo.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Por hipótesis, existe una subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\} \to x \in X$. El corolario 4.18 garantiza que $\{x_n\} \to x$. ■

Ejemplo 6.3. El recíproco no es cierto: $(\mathbb{R}, d)$, donde d es la métrica discreta, es completo y no es secuencialmente compacto, pues la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones convergentes.

Definición 6.8. (X, d) es *totalmente acotado* o *precompacto*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de puntos $\{x_1^\varepsilon, \dots, x_n^\varepsilon\} \subset X$, tal que $X = B(x_1^\varepsilon, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n^\varepsilon, \varepsilon)$.

Lema 6.15. *Si* (X, d) *es precompacto, es acotado.*

Demostración: X se puede escribir como una unión finita de conjuntos acotados. ■

Ejemplo 6.4. El recíproco no es cierto: $(\mathbb{R}, d)$, donde d es la métrica discreta, es acotado y no es precompacto.

Teorema 6.16. *En* (X, d)*, son equivalentes:*

(i) (X, d) *es compacto,*

(ii) (X, d) *es secuencialmente compacto,*

(iii) (X, d) *es precompacto y completo.*

Demostración: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Sea A infinito y supongamos que $A' = \emptyset$. Para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $(B(x, r_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$. Como $X = \bigcup_{x \in X} B_X(x, r_x)$ y X es compacto, existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_X(x_i, r_{x_i})$. Pero, por construcción, $B_X(x_i, r_{x_i})$ tiene como mucho un punto de A, lo que es imposible.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Si (X, d) es secuencialmente compacto, ya sabemos que es completo. Supongamos que existe ε_0 que contradice la precompacidad de (X, d). Sea $x_1 \in X$; existe $x_2 \in X$ tal que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. Continuando de esta manera, dada $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ elegida de este modo, existe $x_n \in X$ tal que $d(x_i, x_n) \geq \varepsilon_0$, si $i < n$. Queda construida de modo recurrente una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $d(x_i, x_n) \geq \varepsilon_0$ si $1 \leq i < n$. Por la compacidad secuencial, existe una subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, luego de Cauchy: así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$ es $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) < \varepsilon_0$, lo cual es absurdo.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* Supongamos que (X, d) no es compacto, es decir, existe un cubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, sin subrecubrimientos finitos. Sea $\{x_1^1, \dots, x_{n_1}^1\} \subset X$ tal que $X = B(x_1^1, 1) \cup \dots \cup B(x_{n_1}^1, 1)$. De entre estas bolas, existe al menos una que no puede ser recubierta por una familia finita de los $\{U_i\}_{i \in I}$, sea $B(x_{m_1}^1, 1)$. La precompacidad es hereditaria (ver ejercicio 19 del apartado 6.5), es decir, $B(x_{m_1}^1, 1)$ es precompacto: sea $\{x_1^2, \dots, x_{n_2}^2\} \subset X$ tal que $B(x_{m_1}^1, 1) \subset B(x_2^2, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(x_{n_2}^2, \frac{1}{2})$. De entre estas bolas, existe al menos una que no puede ser recubierta por una familia finita de los $\{U_i\}_{i \in I}$, sea $B(x_{m_2}^2, \frac{1}{2})$. Así, se va construyendo una familia $B(x_{m_k}^k, \frac{1}{k}) \subset \dots \subset B(x_{m_1}^1, 1)$ de bolas encajadas que no pueden ser recubiertas por una familia finita de los $\{U_i\}_{i \in I}$. Además, $\delta\left(B(x_{m_k}^k, \frac{1}{k})\right) \leq \frac{2}{k}$. Si se considera $F_k = \overline{B(x_{m_k}^k, \frac{1}{k})}$, tenemos una familia numerable de cerrados encajados, cuyos diámetros tienden a cero. Por la completitud de (X, d), es $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \{x_0\}$. Sea $i_0 \in I$ tal que $x_0 \in U_{i_0}$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon_0) \subset U_{i_0}$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{k_0} < \varepsilon_0$. Entonces, $B(x_{m_{k_0}}^{k_0}, \frac{1}{k_0}) \subset B(x_0, \varepsilon_0) \subset U_{i_0}$, lo que contradice la elección de estas bolas, que no podían estar contenidas en ninguna familia finita de los $\{U_i\}_{i \in I}$: en efecto, $B(x_{m_{k_0}}^{k_0}, \frac{1}{k_0}) \subset F_{k_0} \subset \overline{B}(x_{m_{k_0}}^{k_0}, \frac{1}{k_0})$, y si $x \in B(x_{m_{k_0}}^{k_0}, \frac{1}{k_0})$, entonces $d(x, x_0) \leq d(x, x_{m_{k_0}}^{k_0}) + d(x_{m_{k_0}}^{k_0}, x_0) < \frac{2}{k_0} < \varepsilon_0$. ∎

Ejemplo 6.5. La completitud es necesaria en las anteriores equivalencias: $((0, 1), d_u)$ es precompacto, pero no es secuencialmente compacto.

Teorema 6.17. ***(Lema del recubrimiento de Lebesgue)*** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. Existe $\varepsilon > 0$ (llamado* número de Lebesgue del recubrimiento*) tal que si $A \subset X$ tiene diámetro menor que ε, entonces existe $i_\varepsilon \in I$ tal que $A \subset U_{i_\varepsilon}$.*

Demostración: En caso contrario, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe x_n tal que $B(x_n, \frac{1}{2^n}) \not\subset U_i$ para cada $i \in I$. Se obtiene así una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que posee una subsucesión convergente $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$, por compacidad. Sea $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$ y $\lambda > 0$ tal que $B(x, \lambda) \subset U_{i_0}$. Por convergencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $x_{\varphi(n)} \in B(x, \frac{\lambda}{2})$. Pero entonces para enteros tales que $\frac{1}{2^n} < \frac{\lambda}{2}$, es $B(x_{\varphi(n)}, \frac{\lambda}{2}) \subset B(x, \lambda) \subset U_{i_0}$, contra la hipótesis. ∎

6.4. Compacidad en espacios euclídeos

Teorema 6.18. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, el intervalo $[a, b]$ es compacto en $(\mathbb{R}, d_u)$.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos, tales que $[a, b] \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Sea

$$A = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ está contenido en una unión finita de los } \{U_i\}_{i\in I}\}.$$

A es no vacío, pues $a \in A$. Además, si $x_1 \in A$ y $x_2 < x_1$, es $x_2 \in A$, al ser $[a, x_2] \subset [a, x_1]$. Por otro lado, si $x \in A$ y $x < b$, existe $y > x$ tal que $y \in A$: en efecto, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Sea $r_x > 0$ tal que $(x - r_x, x + r_x) \subset U_{i_0} \cap [a, b]$. Entonces, $[a, x + \frac{r_x}{2}] = [a, x] \cup (x - r, x + \frac{r_x}{2}]$, que está contenida en una unión finita de los $\{U_i\}_{i\in I}$ (los que tiene que ver con $[a, x]$) y U_{i_0}. Sea $c = \sup(A)$: por lo anterior, es $c = b$. Sea $j_0 \in I$ tal que $b \in U_{j_0}$ y $r_b > 0$ tal que $(b - r_b, b + r_b) \subset U_{j_0}$. Como $b = \sup(A)$, $b - r_b$ no es cota superior de A, luego existe $x \in A$ tal que $b - r_b < x \leq b$. Pero, como se ha visto antes, es entonces $b - r_b \in A$. Así, $[a, b] = [a, b - r_b] \cup (b - r_b, b]$ está contenido en una unión finita de $\{U_i\}_{i\in I}$, y queda probada la propiedad. ∎

Teorema 6.19. ***(de Heine-Borel)*** *En $(\mathbb{R}, d_u)$, A es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Lema 6.20. *Si A es compacto en $(\mathbb{R}, d_u)$, entonces $\sup(A), \inf(A) \in A$.*

Teorema 6.21. ***(de Weierstrass)*** *Sea $f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continua y (X, d) compacto. Entonces, f alcanza sus valores máximo y mínimo.*

Demostración: Como $f(X)$ es compacto, es $\alpha = \inf(f(X)), \beta = \sup(f(X)) \in f(X)$. Luego, existen $a, b \in X$ tales que $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$, es decir, f alcanza su mínimo absoluto en a y su máximo absoluto en b. ∎

Teorema 6.22. ***(Caracterización de la compacidad)*** *(X, d) es compacto si y sólo si para cualquier función $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ continua, f alcanza sus valores máximo y mínimo.*

Demostración: Sólo queda por ver una de las implicaciones: si X no es compacto, existe $A \subset X$ infinito tal que $A' = \emptyset$. Sea $S = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ numerable. Entonces, es $S' = \emptyset$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \notin S'$, existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $(B(a_n, \varepsilon_n) - \{a_n\}) \cap S = \emptyset$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ distintos tales que $\overline{B}(a_n, \frac{\varepsilon_n}{4}) \cap \overline{B}(a_m, \frac{\varepsilon_m}{4}) = \emptyset$ (si esta intersección fuese no vacía, y x un punto en ella, sería $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, x) + d(x, a_m) < \varepsilon_0$, donde $\varepsilon_0 = \text{mín}\{\varepsilon_m, \varepsilon_n\}$, lo que es absurdo). Sea $s_n < \text{mín}\{\frac{\varepsilon_n}{4}, \frac{1}{n}\}$ y $B_n = \overline{B}(x_n, s_n)$. La familia $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de bolas cerradas dos a dos disjuntas; sea B la unión de todas ellas, que es un conjunto cerrado. La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin B \\ \frac{n}{s_n}(s_n - d(x, x_n)) & \text{si} \quad x \in B_n \end{cases}$$

es continua y como $f(x_n) = n$, f no alcanza su máximo absoluto. ∎

6.5. Ejercicios

1.- Sea (X, d) un espacio métrico. Se pide:

(i) si A es compacto y $b \in X$, probar que existe $a \in A$ tal que $d(a, b) = d(A, b)$;

(ii) si A es compacto y $B \subset X$, probar que existe $a \in A$ tal que $d(a, B) = d(A, B)$;

(iii) si A y B son compactos, probar que existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, b) = d(A, B)$;

(iv) si A es compacto, probar que existen $a, b \in A$ tales que $d(a, b) = \delta(A)$;

(v) si $A \subset X$ y B es compacto, probar que $d(A, B) = 0$ si y sólo si $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

2.- En (X, d), se pide probar:

(i) si A es compacto y $x \notin A$, entonces existen abiertos disjuntos U y V, tales que $x \in U$ y $A \subset V$;

(ii) si A y B son compactos disjuntos, entonces $d(A, B) > 0$ y existen abiertos disjuntos U y V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$;

(iii) si A y B son compactos, $A \not\subset B \not\subset A$ y $d(A, B) = 0$, entonces $\text{fr}(A) \cap \text{fr}(B) \neq \emptyset$.

3.- Sea (X, d) y $A \subset X$. ¿Qué relación existe entre los compactos de (X, d) y los compactos de (A, d_A)? En $(\mathbb{Q}, d_u)$, probar que el conjunto $F = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3, x \geq 0\}$ es cerrado y acotado, pero no es compacto.

4.- Sea (X, d) y $A \subset X$. Si $A \cap K$ es cerrado en (K, d_K) para cada compacto K, probar que A es cerrado.

5.- Sean (X, d), $A \subset X$ compacto y $r > 0$. Probar que $\displaystyle\bigcup_{x \in A} \overline{B}(x, r)$ es cerrado.

♣**6.-** Sean (X, d), K compacto y V abierto tal que $K \subset V$. Probar que existe $r > 0$ tal que $\displaystyle\bigcup_{x \in K} B(x, r) \subset V$.

7.- Probar que el producto finito de espacios métricos es compacto si y sólo si cada espacio factor lo es. Aplicar esta propiedad a los espacios euclídeos.

♣**8.-** Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos, $(X \times Y, D)$ su producto y $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$. Se pide probar:

(i) si X es compacto, para todo cerrado de $X \times Y$, su proyección sobre Y es cerrada;

(ii) si $(Y, \rho) = (\mathbb{R}, d_u)$, entonces X es compacto si y sólo si para todo cerrado de $X \times \mathbb{R}$, su proyección sobre $\mathbb{R}$ es cerrada;

(iii) si X es compacto, f es continua si y sólo si G_f es compacto en $(X \times Y, D)$;

(iv) si Y es compacto y G_f es cerrado en $(X \times Y, D)$, entonces f es continua;

(v) si para cada espacio métrico (X, d) y para cada aplicación $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ tal que G_f es cerrado en $(X \times Y, D)$, se verifica que f es continua, entonces Y es compacto.

9.- Sean (X, d) un espacio métrico compacto, y $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ continua tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ si $x \neq y$. Probar que f posee un único punto fijo en X.

10.- Sea (X, d) compacto y $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ continua sin puntos fijos. Probar que existe $k > 0$ tal que para cada $x \in X$, es $d(x, f(x)) \geq k$.

11.- Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$, tal que la restricción a cada compacto es continua. Probar que f es continua.

♣**12.-** Sea (X, d) compacto y $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ continua. Probar que existe un compacto $A \subset X$ no vacío, tal que $f(A) = A$.

13.- Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados de un espacio métrico (X,d) compacto, tal que $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $B \subset X$ es un conjunto de diámetro menor que ε, entonces existe $j \in I$ tal que $B \cap A_j = \emptyset$.

14.- Sea (X,d) compacto. Si las componentes conexas son abiertas, probar que existe a lo más un número finito de componentes.

♣**15.-** Sea (X,d) un espacio métrico tal que para cada métrica ρ topológicamente equivalente a d, (X,ρ) es acotado. Probar que (X,d) es compacto.

16.- Para los espacios métricos del ejercicio 12 del apartado 2.8, estudiar la compacidad.

♣**17.-** En un espacio métrico (X,d), probar:

(i) todo subconjunto de un conjunto precompacto es precompacto,

(ii) la clausura de un conjunto precompacto es precompacta,

(iii) la imagen uniformemente continua de un conjunto precompacto es precompacta,

(iv) todo conjunto precompacto es separable.

♣**18.-** Sea (X,d) un espacio métrico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y R su rango. Se pide probar:

(i) si $\text{lím}(x_n) = x$, entonces $R \cup \{x\}$ es compacto;

(ii) si $\text{lím}(x_n) = x$, entonces $\overline{R}$ es compacto. El recíproco es falso, pero si $\overline{R}$ es compacto, existe una subsucesión de la primera que converge;

(iii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces R es precompacto. Y si R es precompacto, existe una subsucesión de Cauchy de la primera;

(iv) concluir que (X,d) es completo si y sólo si todo conjunto precompacto, posee clausura compacta. Y por lo tanto, en un espacio completo, todo conjunto precompacto posee derivado compacto;

(v) concluir que si todo conjunto acotado en X posee clausura compacta, entonces (X,d) es completo;

(vi) probar que (X,d) es compacto si y sólo si es completo y precompacto.

19.- Sea (X,d) un espacio métrico, donde existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(x,r)$ es compacta para cada $x \in X$. Probar que (X,d) es completo. Si $A \subset X$ es compacto, demostrar que el conjunto $\{x \in X : d(x,A) \leq s\}$ es compacto para cada $s < r$.

20.- Probar que un espacio métrico donde toda bola cerrada es compacta, es completo. Demostrar que en este tipo de espacios métricos, los conjuntos compactos son los cerrados y acotados. Aplicar esta propiedad a los espacios euclídeos.

21.- Sean (X, d) compacto, $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados encajados. Probar que $f(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$.

22.- Probar que (X, d) es compacto si y sólo si para cada sucesión de cerrados encajados, su intersección es no vacía. Observar que no se impone la condición de que los diámetros de los cerrados tiendan a cero; ésta es otra manera de probar que todo espacio compacto es completo.

23.- Sea (X, d) y una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados con la propiedad de intersección finita. Supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que F_{i_0} es compacto. Probar que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

24.- Sea (X, d) completo, tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento finito de X, por conjuntos de diámetro menor que ε. Probar que (X, d) es compacto.

25.- Probar que la precompacidad se conserva bajo equivalencias métricas e isometrías. La compacidad se conserva bajo equivalencias topológicas, equivalencias métricas e isometrías.

26.- En (X, d) se pide probar:

(i) si (X, d) es compacto y la clausura de cada bola abierta es la correspondiente bola cerrada, probar que toda bola abierta es conexa;

(ii) dar un ejemplo de espacio métrico totalmente disconexo, donde también suceda este fenómeno;

(iii) en $(\mathbb{R}^2, d_{\text{máx}})$, sea $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0 \text{ ó } x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Probar que toda bola en A es conexa, pero no se verifica el fenómeno de (i).

♣27.- Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que (X, d) es conexo si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $x, y \in X$, existe una familia de puntos $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset X$, tales que $x_0 = x$, $x_n = y$ y $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ para $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, es decir, existe una ε-*cadena* relacionando los puntos x e y.

28.- Si K es compacto, convexo y de interior no vacío en $(\mathbb{R}^n, d_u)$, probar que es homeomorfo a una bola cerrada.

29.- Estudiar la conexión, la compacidad y la completitud de los siguientes subespacios del plano euclídeo:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(x-1) = 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x+1)^2 \quad \text{ó} \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad y = 0\},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}.$$

30.- Sean $(\mathbb{R}, d_u)$ y $A, B \subset \mathbb{R}$ cerrados. ¿Es $A + B$ cerrado? ¿Y si A y B son compactos?

31.- Sea (X, d) compacto y $f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ una función continua. Se supone que para cada $x \in X$ es $f(x) > 0$. Probar que existe $M > 0$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in X$.

32.- Sea $f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x)$ posee exactamente dos puntos. Probar que f no es continua.

♣ **33.-** Otro concepto relacionado con cubrimientos por abiertos de espacios es el de *paracompacidad*, que es una generalización de la noción de compacidad y es esencial en el estudio de variedades diferenciables.

Definición 6.9. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubrimientos de X, se dice que $\mathcal{U}$ *refina* a $\mathcal{V}$, y se escribe $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, si cada $U \in \mathcal{U}$ está contenido en algún $V \in \mathcal{V}$. Se dice también que $\mathcal{U}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{V}$.

Definición 6.10. En un espacio métrico (X, d), una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X se llama *localmente finita* si cada $x \in X$ posee un entorno que corta sólo a una cantidad finita de $U \in \mathcal{U}$.

Definición 6.11. En un espacio métrico (X, d), una colección $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X se llama *σ-localmente finita* si $\mathcal{V} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, donde cada $\mathcal{V}_n$ es una familia localmente finita. Observar que aunque $\mathcal{V}$ sea un cubrimiento σ-localmente finito de X, las subcolecciones $\mathcal{V}_n$ localmente finitas que lo componen no tienen porque ser cubrimientos de X.

Definición 6.12. Un espacio métrico (X, d) se llama *paracompacto* si todo cubrimiento por abiertos de X posee un refinamiento abierto σ-localmente finito.

Se pide demostrar el **teorema de Stone**: *Todo espacio métrico es paracompacto* (ver [W], página 147).

♣ **34.-** Las nociones de compacidad y de conexión son ambas herramientas potentes, pero no tienen relación entre ellas. Cuando se combinan dan lugar al concepto de *continuo*.

Definición 6.13. Dado un espacio métrico (X, d), $K \subset X$ es un *continuo* si es compacto y conexo.

Los primeros ejemplos de continuos son las esferas de cualquier dimensión $\mathbb{S}^n$ en espacios euclídeos, las bolas unidad $\mathbb{D}^n$ en espacios euclídeos, etc.

Se pide probar:

(i) dada una familia $\{K_i : i \in I\}$ de continuos en X, su intersección $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ sigue siendo un continuo;

(ii) si K es un continuo tal que para cada par de puntos $a, b \in K$ es $K - \{a, b\}$ no conexo, entonces K es homeomorfo a la circunferencia unidad $(\mathbb{S}^1, d_u)$.

Espacios vectoriales normados

Pintada, no vacía:
pintada está mi casa
del color de las grandes
pasiones y desgracias.

“Canción última”
Miguel Hernández (1910-1942)

7.1. Normas sobre espacios vectoriales

7.1.1. Métrica definida por una norma

Definición 7.1. Si X es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (en lo que sigue, será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, salvo mención explícita), se llama *norma* sobre X a una aplicación $\|.\|\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que:

(i) para cada $x \in X$, es $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

(iii) $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, es $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, si $x, y \in X$.

El par $(X, \|.\|)$ se llama *espacio vectorial normado*.

Ejemplo 7.1. Sobre el espacio vectorial de dimensión infinita de las funciones continuas de $[0,1]$ con valores reales $C([0,1],\mathbb{R}) = \{f\colon ([0,1], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u) \text{ continua}\}$ tenemos las normas:

(i) $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$, llamada de la *convergencia media*;

(ii) $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$, llamada de la *convergencia cuadrática*;

(iii) $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, llamada de la *convergencia uniforme*.

Lema 7.1. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. La función $d_{\|.\|}: X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\|$, es una distancia sobre X, que se llama* inducida por la norma $\|.\|$ *y la topología inducida se denomina topología asociada a la norma.*

Lema 7.2. *Dado un espacio vectorial normado $(X, \|.\|)$, $\|.\|: (X, d_{\|.\|}) \longrightarrow (\mathbb{K}, d_u)$ es una función lipschitziana (ver ejercicio 41 en el apartado 3.5).*

Observación 7.1. No toda distancia proviene de una norma: una norma de espacio vectorial no puede ser acotada, porque si $\|x\| \leq \alpha$ para cada $x \in X$, entonces $\|nx\| \leq \alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual es absurdo. Luego, cualquier distancia acotada (por ejemplo, la métrica discreta) no proviene de una norma.

Lema 7.3. *Si X es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y d una distancia sobre X, d proviene de una norma sobre X si y sólo si:*

(i) para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$, es $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$;

(ii) para $x, y, a \in X$, es $d(x + a, y + a) = d(x, y)$.

Y en tal caso, la norma asociada a la distancia es $\|x\| = d(x, 0)$, para cada $x \in X$.

Lema 7.4. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{K}$. Las aplicaciones siguientes son continuas:*

(i) la función suma $s: (X \times X, D) \longrightarrow (X, d_{\|.\|})$, donde D es la métrica producto y $s(x, y) = x + y$, y

(ii) el producto por un escalar $m: (\mathbb{K} \times X, D_1) \longrightarrow (X, d_{\|.\|})$, donde D_1 es la métrica producto (sobre $\mathbb{K}$ se considera la métrica euclídea) y $m(\lambda, x) = \lambda x$.

Proposición 7.5. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio vectorial normado e Y un subespacio vectorial de X. Entonces,*

(i) si $Y \neq X$, es $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$, y

(ii) $\overline{Y}$ es un subespacio vectorial de X.

Demostración: (i) Si $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset$, existe $x \in Y$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(x, \varepsilon) \subset Y$. Como Y es un subespacio vectorial, se deduce que $B(0, \varepsilon) \subset Y$, y realizando homotecias sucesivas, resulta finalmente que $X = Y$.

(ii) Como las aplicaciones suma y producto por un escalar son continuas, se tiene que

$$s(\overline{Y} \times \overline{Y}) = s(\overline{Y \times Y}) \subset \overline{s(Y \times Y)} \subset \overline{Y},$$

$$m(\mathbb{K} \times \overline{Y}) = m(\overline{\mathbb{K} \times Y}) \subset \overline{m(\mathbb{K} \times Y)} \subset \overline{Y}.$$

∎

7.1.2. Normas equivalentes

Proposición 7.6. *Sean X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ dos normas sobre X y d_1, d_2 las distancias asociadas. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in X$ es $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$,

(ii) existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que para cada $x, y \in X$ es $\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$,

(iii) las distancias d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

Demostración: La única implicación no trivial es *(iii) $\Rightarrow$ (i)*. Si d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes, existen $r, R > 0$ tales que $\overline{B}_{d_2}(0, r) \subset \overline{B}_{d_1}(0, 1) \subset \overline{B}_{d_2}(0, R)$, o gracias a las homotecias, si $a > 0$, $\overline{B}_{d_2}(0, ra) \subset \overline{B}_{d_1}(0, a) \subset \overline{B}_{d_2}(0, Ra)$. Con la segunda inclusión se obtiene $\|x\|_2 \leq R\|x\|_1$ y con la primera $r\|x\|_1 \leq \|x\|_2$. ∎

Definición 7.2. Si cualquiera de las anteriores condiciones se verifica, se dice que las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son *equivalentes*.

En general, sobre un espacio vectorial, dos normas no tienen porque ser equivalentes:

Ejemplo 7.2. Sea el espacio de funciones continuas $C([0, 1], \mathbb{R})$ y para $n \in \mathbb{N}$ la familia:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (1/n, 1] \\ 1 - nx & \text{si} \quad x \in [0, 1/n] \end{cases}$$

que es una familia infinita linealmente independiente de funciones en $C([0, 1], \mathbb{R})$. Sobre $C([0, 1], \mathbb{R})$ se definen las normas dadas en el ejemplo 7.1. Es fácil ver que:

(i) $\|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{2n}$;

(ii) $\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx} = \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$;

(iii) $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$.

Por lo tanto, estas normas no son equivalentes.

Corolario 7.7. *Sean X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ dos normas sobre X y la aplicación identidad $1_X\colon (X, \|.\|_1) \longrightarrow (X, \|.\|_2)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) las normas son equivalentes,

(ii) 1_X es un homeomorfismo,

(iii) 1_X y 1_X^{-1} son lipschitzianas.

En el caso particular de dimensión finita, se verifica:

Teorema 7.8. *Si X es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas sobre él son equivalentes.*

Demostración: Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base del espacio vectorial. Cualquier $x \in X$ se expresa de manera única como $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Consideremos la norma $\|.\|_\infty$ ($\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$) y $\|.\|$ otra norma cualquiera. Es claro que

$$\|x\| \leq \|x_1e_1\| + \cdots + \|x_ne_n\| = |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\| \leq m.n.\|x\|_\infty,$$

donde $m = \sup\{\|e_i\| : 1 \leq i \leq n\}$. La otra parte de la demostración se realiza de manera análoga, utilizando el hecho de que la bola cerrada unidad $\overline{B}(0, 1)$ es compacta (por la dimensión finita) y el lema 7.3. ∎

Corolario 7.9. *Si X es un espacio vectorial de dimensión finita, es un espacio métrico completo y las partes compactas de X son los subconjuntos cerrados y acotados de X.*

Observación 7.2. Los espacios vectoriales normados de dimensión finita son los únicos tales que la bola cerrada unidad $\overline{B}(0, 1)$ es compacta.

Lema 7.10. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio vectorial normado e Y un subespacio vectorial propio y cerrado de X. Para cada $0 < \varepsilon < 1$, existe un punto $x_\varepsilon \in X$ en la bola unidad cerrada y tal que $d_{\|.\|}(x_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$.*

Proposición 7.11. *Si X es un espacio vectorial normado de dimensión infinita, la bola unidad de X no es compacta.*

7.1.3. Aplicaciones lineales continuas

Si X e Y son dos espacios vectoriales normados, una aplicación lineal $l\colon X \longrightarrow Y$ no tiene porque ser continua: si $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ provisto con la norma de la convergencia media y $l\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ se define por $l(f) = f(1)$, entonces la sucesión de funciones afines a trozos $f_n(x) = 0$ si $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ y $f_n(1) = 1$ es tal que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$ que tiende a 0 y $l(f_n)$ no tiende a $l(0)$.

Proposición 7.12. *Sean $(X, \|.\|_1)$ e $(Y, \|.\|_2)$ dos espacios vectoriales normados y una aplicación lineal $l\colon X \longrightarrow Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) l es continua,

(ii) l es continua en 0,

(iii) l está acotada sobre la bola cerrada unidad $\overline{B}(0,1)$,

(iv) existe una constante real $M > 0$ tal que $\|l(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$ para cada $x \in X$,

(v) existe una constante real $M > 0$ tal que $\|l(x) - l(y)\|_2 \leq M\|x - y\|_1$ para cada $x, y \in X$,

(vi) l es uniformemente continua sobre X.

Observación 7.3. Si l es continua en un punto $x \in X$, es continua en todo X.

Proposición 7.13. *Si $(X, \|.\|)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, toda aplicación lineal de X en un espacio vectorial normado $(Y, \|.\|_2)$ es continua.*

Proposición 7.14. *Sean $(X, \|.\|)$ un espacio vectorial normado y l una forma lineal sobre X (una aplicación lineal de X sobre $\mathbb{K}$). Entonces, l es continua si y sólo si el núcleo de l es cerrado en X.*

7.1.4. Espacios de Hilbert y de Banach

Definición 7.3. $(X, \|.\|)$ es un *espacio de Banach* si $(X, d_{\|.\|})$ es un espacio métrico completo.

Ejemplos 7.1. Algunos ejemplos de espacios de Banach son:

1) los espacios vectoriales de dimensión finita son espacios de Banach;

2) el espacio vectorial normado $(C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_2)$ no es completo: por ejemplo la sucesión de funciones continuas

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1/2] \\ (n+1)(x-1/2) & \text{si} \quad x \in (1/2, 1/2+1/(n+1)] \\ 1 & \text{si} \quad x \in (1/2+1/(n+1), 1] \end{cases}$$

tiene como límite la función no continua

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1/2] \\ 1 & \text{si} \quad x \in (1/2,1] \end{cases}$$

La completación (ver ejercicio 23 en el apartado 4.6) de este espacio para la norma anterior se denota por $L^2([0,1])$. De manera similar, denotaremos $L^p([0,1])$ al espacio obtenido al completar $(C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_p)$, donde $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p dx\right)^{1/p}$; está formado por las clases de funciones medibles con potencia p-ésima integrable sobre $[0,1]$, es decir, $f \in L^p([0,1])$ si $\int_0^1 |f_n(x)|^p dx < \infty$.

Proposición 7.15. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach. Entonces:*

(i) si A es un conjunto, el espacio vectorial de las aplicaciones acotadas de A en X, $\mathcal{B}(A,X)$, provisto de la topología de la convergencia uniforme, es un espacio de Banach;

(ii) si (A, d_A) es un espacio métrico, entonces el espacio vectorial de las aplicaciones continuas acotadas $\mathcal{C}_b(A,X)$, dotado de la topología de la convergencia uniforme, es un espacio de Banach. En particular, si A es compacto, entonces $\mathcal{C}(A,X)$ es un espacio de Banach.

Proposición 7.16. *Sean $(X, \|.\|_1)$ un espacio vectorial normado, $(Y, \|.\|_2)$ un espacio de Banach y $A \subset X$ un subespacio vectorial denso en X. Entonces toda aplicación lineal continua $l\colon A \longrightarrow Y$ se extiende de manera única a una aplicación continua $\widetilde{l}\colon X \longrightarrow Y$.*

Sean $(X, \|.\|_1)$ y $(Y, \|.\|_2)$ espacios vectoriales normados, se denota por $\mathcal{L}(X,Y)$ el conjunto de las aplicaciones lineales continuas de X en Y. Para cada $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, se escribe:

$$|T| = \sup_{\|v\|_1=1} \|T(v)\|_2 = \sup_{\|v\|_1\leq 1} \|T(v)\|_2 = \sup_{v\neq 0} \frac{\|T(v)\|_2}{\|v\|_1}.$$

Observación 7.4. Para cada $v \in X_1$ se tiene $\|T(v)\|_2 \leq |T|\|v\|_1$.

Proposición 7.17. $|.|$ *es una norma sobre* $\mathcal{L}(X,Y)$. *Si además* $(Y, \|.\|_2)$ *es un espacio de Banach, entonces* $\mathcal{L}(X,Y)$ *también lo es.*

Definición 7.4. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$). Una *forma bilineal simétrica* (respectivamente, *hermítica*) sobre X es una aplicación $h\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ que posee las propiedades siguientes:

(i) $y \mapsto h(x,y)$ es $\mathbb{K}$-lineal para cada $x \in V$,

(ii) $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$.

Observación 7.5. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la condición (ii) se transforma en $h(x,y) = h(y,x)$, lo que implica fácilmente que h es bilineal simétrica. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, las condiciones (i) y (ii) implican que $x \mapsto h(x,y)$ es semilineal, es decir, $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$ y $h(\lambda x, y) = \overline{\lambda} h(x,y)$.

Definición 7.5. Una forma es *positiva* si $h(x,x) \geq 0$ para cada $x \in X$ y es *definida positiva* si además $h(x,x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Lema 7.18. *Si h es una forma bilineal simétrica (respectivamente, hermítica) definida positiva sobre un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$). Entonces:*

(i) $|h(x,y)| \leq \sqrt{h(x,x)h(y,y)}$ *(desigualdad de Cauchy-Schwarz),*

(ii) $\sqrt{h(x+y, x+y)} \leq \sqrt{h(x,x)}\sqrt{h(y,y)}$.

Proposición 7.19. *Sea h una forma bilineal simétrica (respectivamente, hermítica) definida positiva sobre un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$). Entonces, la aplicación $x \mapsto \sqrt{h(x,x)}$ es una norma sobre X.*

Definición 7.6. Un espacio vectorial normado cuya norma proviene de una forma bilineal simétrica (respectivamente, hermítica) definida positiva se llama *espacio prehilbertiano*. Si además este espacio vectorial es completo, se dice que es un *espacio de Hilbert*.

Observación 7.6. A partir de ahora se denotará $h(x,y)$ por $\langle x, y\rangle$ y $\sqrt{h(x,x)}$ por $\|x\|$.

Definición 7.7. En un espacio prehilbertiano X, se dice que $x, y \in X$ son *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$.

Proposición 7.20. *Sea X un espacio prehilbertiano y $x, y \in X$. Entonces*

(i) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(ley del paralelogramo),*

(ii) si x e y son ortogonales, es $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *(teorema de Pitágoras).*

Si A es un subespacio vectorial de un espacio prehilbertiano X, se define el subespacio vectorial cerrado de X, $A^{\perp}$ como el conjunto de los elementos $x \in X$ que son ortogonales a cada elemento de A. Entonces:

Teorema 7.21. *Si X es un espacio prehilbertiano y F un subespacio completo de X, para cada $x \in X$ existe un único $y \in F$ tal que $\|x - y\| = d_{\|.\|}(x, F)$: este elemento se llama* proyección ortogonal *de x sobre F y se denota $p_F(x)$.*

Proposición 7.22. *En las condiciones anteriores, se verifica:*

(i) si $x \in X$, $p_F(x)$ es el único elemento $z \in F$ tal que $x - z$ es ortogonal a F;

(ii) $X = F \oplus F^{\perp}$;

(iii) la aplicación $x \mapsto p_F(x)$ de X en X es lineal y continua. Su norma vale 1 si F es no trivial, su imagen es F y su núcleo es $F^{\perp}$.

Teorema 7.23. ***(Teorema de Riesz)*** *Sea X un espacio de Hilbert y $l \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ una forma lineal continua. Existe un único $a \in X$ tal que $l(x) = \langle a, x \rangle$ para cada $x \in X$. Además $\|a\| = |l|$.*

7.2. Espacios de funciones

7.2.1. Convergencia simple y uniforme

Sea X un conjunto cualquiera e (Y, ρ) un espacio métrico.

Definición 7.8. Una sucesión de aplicaciones $\{f_n \colon X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplemente* o *puntualmente* sobre X, si para cada $x \in X$, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite en (Y, ρ), que denotamos $f(x)$, y que determina una función $f \colon X \longrightarrow Y$ que se llama *límite simple* o *puntual* de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Observación 7.7. Según la anterior definición, $\{f_n \colon X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $f \colon X \longrightarrow Y$, si para cada $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, existe $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ si $n \geq n_{\varepsilon,x}$.

Definición 7.9. Una sucesión de aplicaciones $\{f_n \colon X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* sobre X a una función $f \colon X \longrightarrow Y$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ y $x \in X$ es $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in X} \{\rho(f_n(x), f(x))\} \right) = 0$.

Lema 7.24. ***(Relación entre la convergencia simple y la uniforme)*** *Sea una sucesión de aplicaciones $\{f_n \colon X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si converge uniformemente hacia f sobre X, entonces converge puntualmente hacia f sobre X.*

Observación 7.8. El recíproco no es cierto: sea $\{f_n\colon [0,1] \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n(t) = t^n$. La sucesión converge simplemente hacia la función $\chi_{\{1\}}\colon [0,1] \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, pero no converge uniformemente sobre $[0,1]$.

Sin embargo, hay un caso importante en el que el recíproco es cierto:

Lema 7.25. *Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $\{f_n\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ una familia de funciones continuas. Si para cada $x \in X$ la sucesión de las distancias $\{\rho(f(x), f_n(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y tiende a cero, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende uniformemente a f.*

Demostración: Para cada $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n^\varepsilon = \{x \in X : d(f(x), f_n(x)) \geq \varepsilon\}$ es cerrado en (X,d). La familia $\{A_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ es además encajada y $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^\varepsilon = \emptyset$. Como X es compacto, debe existir n_ε tal que $A_{n_\varepsilon}^\varepsilon = \emptyset$, con lo que para cada $n \geq n_\varepsilon$ y todo $x \in X$ es $\rho(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$, de donde se deduce la convergencia uniforme. ∎

Corolario 7.26. ***(Teorema de Dini para espacios métricos)*** *Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $\{f_n\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas. Se supone que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y que converge simplemente hacia la función continua $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia f.*

Observación 7.9. En el enunciado del corolario anterior, es la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la que es monótona, no las funciones f_n (X no es en general ordenado).

En las condiciones de la definición 7.9, la convergencia uniforme puede interpretarse como la convergencia de puntos en un espacio métrico adecuado: sea $\mathcal{B}(X,Y)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en Y y $d(f,g) = \sup\limits_{x\in X}\{d(f(x), g(x))\}$ la métrica del supremo. Sobre $\mathcal{B}_f(X,Y) = \{g\colon X \longrightarrow Y : d(f,g) < \infty\}$ queda definida una métrica por $d(g,h) = \sup\limits_{x\in X}\{d(g(x), h(x))\}$, y entonces:

Proposición 7.27. *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia f si y sólo si* $\lim f_n = f$ *en el espacio métrico $\mathcal{B}_f(X,Y)$.*

Teorema 7.28. *Sean (X,d) e (Y,ρ) espacios métricos, una familia de funciones continuas $\{f_n\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente sobre X, entonces f es continua.*

Proposición 7.29. ***(Criterio de Cauchy)*** *Sean (X,d) e (Y,ρ) espacios métricos,(Y,ρ) completo y una familia $\{f_n\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Existe $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente sobre X si y sólo si se satisface la siguiente condición: para cada $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que si $m,n \geq n_\varepsilon$, es $\rho(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$.*

7.2.2. Algunos teoremas importantes en Análisis Real

Sean (X,d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, el espacio vectorial real de las aplicaciones continuas de (X,d) en $(\mathbb{R},d_u)$, provisto de la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X}\{|f(x)|\}$. Nuestro interés es caracterizar los compactos en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Sea $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, si A es compacto, entonces es cerrado y acotado, pero estas condiciones no son suficientes, como lo prueba el siguiente ejemplo: sea $(X,d) = ([0,1],d_u)$ y $A = \{f_n\colon ([0,1],d_u) \longrightarrow (\mathbb{R},d_u) : f_n(x) = x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\overline{A}$ es cerrado y acotado ya que $A \subset \overline{B}(0,1)$, pero no es compacto pues la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones convergentes. En efecto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplemente hacia $\chi_{\{1\}}$, con lo que toda subsucesión $\{f_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplemente hacia $\chi_{\{1\}}$; luego, $\{f_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede converger uniformemente hacia una función continua.

Definición 7.10. Se dice que $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es *equicontinuo* en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $f \in A$, si $d(x,x_0) < \delta$, es $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ejemplo 7.3. El conjunto $A_k = \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) : |f(x) - f(y)| \leq kd(x,y)\}$ es equicontinuo.

Teorema 7.30. ***(Teorema de Ascoli)*** *Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Son equivalentes:*

(i) A es compacto en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$,

(ii) A es un subconjunto cerrado, acotado y equicontinuo en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$,

Demostración: *(i) ⇒ (ii)* Como A es compacto, es evidentemente cerrado y acotado. Sea $\varepsilon > 0$, como A es compacto, es precompacto, luego existen $f_1,\ldots,f_n \in A$ tales que $A \subset B(f_1,\frac{\varepsilon}{3}) \cup\cdots\cup B(f_n,\frac{\varepsilon}{3})$. Sea $x_0 \in X$; como cada f_i es continua en x_0, existe $\delta_i > 0$ tal que si $d(x,x_0) < \delta_i$, es $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sea $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$. Si $f \in A$, existe f_i tal que $\|f - f_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, y por lo tanto, si $d(x,x_0) < \delta$, es

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_0)| + |f_i(x_0) - f(x_0)|,$$

luego $|f(x) - f(x_0)| \leq 2\|f - f_i\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(ii) ⇒ (i) Como $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es completo, A es completo, con lo que basta con probar que A es precompacto. Sea $\varepsilon > 0$. Como X es compacto, se puede cubrir por un número finito de bolas abiertas $B(x_1,\delta_{x_1}),\ldots,B(x_n,\delta_{x_n})$ donde los δ_{x_i} se asocian a los x_i a través de la equicontinuidad de A (para cada $f \in A$, si $d(x,x_i) < \delta_{x_i}$, entonces $|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$). Como A es acotado, para cada $x \in X$, $\{f(x) : f \in A\}$ posee adherencia compacta en $\mathbb{R}$ y por lo tanto el conjunto de los valores de los elementos de A en los puntos $x_1,\ldots,x_n$ tiene adherencia compacta en $\mathbb{R}$, con lo que se le puede cubrir por un número finito de

bolas abiertas de centros $y_1, \dots, y_p$ y radios $\frac{\varepsilon}{4}$. Sea Γ el conjunto de las aplicaciones de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, p\}$, que es un conjunto finito. Para cada $\gamma \in \Gamma$, sea A_γ el conjunto de los $f \in A$ tales que $|f(x_i) - y_{\gamma(i)}| < \frac{\varepsilon}{4}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Por construcción, los A_γ cubren A; queda sólo por probar que para γ fijo, A_γ está contenido en una bola de radio ε. Sean $f, g \in A_\gamma$ y $x \in X$; existex_i tal que $d(x, x_i) < \delta_{x_i}$ y por lo tanto $|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$ y $|g(x) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Además, $|f(x_i) - y_{\gamma(i)}| < \frac{\varepsilon}{4}$ y $|g(x_i) - y_{\gamma(i)}| < \frac{\varepsilon}{4}$, de donde

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - y_{\gamma(i)}| + |g(x_i) - y_{\gamma(i)}| + |g(x) - g(x_i)| < \varepsilon.$$

Como esto es cierto para cada $x \in X$, es $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. ∎

Observación 7.10. Se puede reemplazar en el teorema de Ascoli $(\mathbb{R}, d_u)$ por un espacio métrico completo (Y, ρ), en cuyo caso la condición de *"A acotado"* debe reemplazarse por *"para cada $x \in X$ el conjunto $\{f(x) : f \in A\}$ tiene adherencia compacta en (Y, ρ)"*.

Teorema 7.31. ***(Teorema del grafo cerrado)*** *Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos, (Y, ρ) compacto. Si la función $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es tal que su grafo G_f es cerrado en el producto $(X \times Y, D)$, entonces f es continua.*

Teorema 7.32. ***(Teorema de aproximación de Weierstrass)*** *Dada una función continua $f\colon ([a, b], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, existe una sucesión $\{p_n\colon ([a, b], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios, que convergen uniformemente a f en $[a, b]$.*

Teorema 7.33. ***(Teorema de Stone-Weierstrass)*** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ un álgebra de funciones continuas que contiene a las constantes y separa puntos (es decir, para cada $x \neq y \in X$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$). Toda función en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ puede ser uniformemente aproximada por funciones de $\mathcal{A}$.*

Bibliografía

Que otros se jacten de las páginas que han escrito;
a mí me enorgullecen las que he leído.

"Un lector"
Jorge Luis Borges (1899-1986)

[ADQ] R. Ayala, E. Dominguez y A. Quintero; *Elementos de Topología General*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

[BRV] F. Bombal, L. Rodríguez y G. Vera, *Problemas de Análisis Matemático: espacios métricos y normados. El espacio* $\mathbb{R}^n$, Editorial AC, 1982.

[Br] V. Bryant, *Metric spaces: iteration and application*, Cambridge University Press, 1996.

[C] E.T. Copson, *Metric spaces*, Cambridge University Press, 1988.

[Di] J. Díaz Moreno, *Introducción a la teoría de espacios métricos*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 1982.

[Du] J. Dugundji; *Topology*, Allyn and Bacon, 1968.

[F] G. Flory, *Ejercicios de Topología y Análisis*, Reverté, 1978.

[G] J.R. Giles, *Introduction to the Analysis of Metric Spaces*, Cambridge University Press, 1987.

[H] B.I. Hernando Boto, *Problemas sobre espacios métricos, normados y de Hilbert*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2002.

[I] I.L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos*, Limusa, 1973.

[JA] P.K. Jain and K. Ahmad, *Metric Spaces*, Narosa Pub., 1996.

[Ka] I. Kaplansky, *Set Theory and Metric Spaces*, Chelsea Pub. Co., 1977.

[Ku] S. Kumaresan, *Topology of Metric Spaces*, Alpha Sci., 2005.

[Lim] E.L. Lima, *Espaços metricos*, Projeto Euclides, 1977.

[Lip] S. Lipschutz; *Topología General*, McGraw Hill, 1967.

[Mi] F. Michavila, *Espacios métricos. Espacios vectoriales normados*, Editorial AC, 1981.

[Mun] J.R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2002.

[Mur] M.G. Murdeshwar; *General Topology*, Wiley Eastern Limited, 1986.

[P] C.G.C. Pitts, *Introduction to Metric Spaces*, Oliver and Boyd, 1972.

[R] R.B. Reisel, *Elementary theory of Metric Spaces*, Springer Verlag, 1982.

[Se] M.O. Searcóid, *Metric spaces*, Springer, 2007.

[SV] S. Shirali and H.L. Vasudeva, *Metric spaces*, Springer, 2006.

[SS] J.A. Steen and J.A. Seebach; *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

[Su] W.A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford Sci. Publ., 1993.

[W] S. Willard; *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.