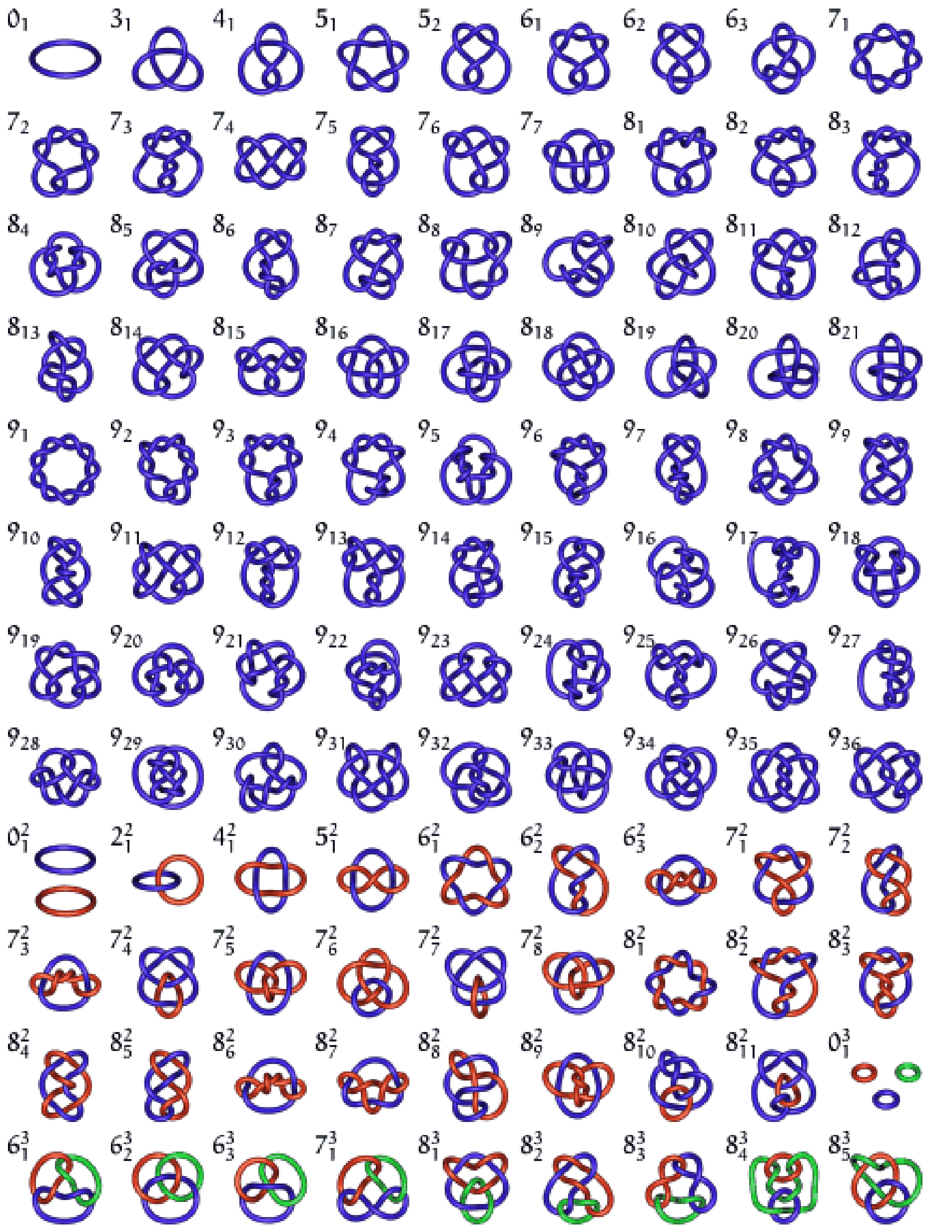
Topología de espacios métricos



Managua, enero de 2009

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: *marta.macho@ehu.es*
http://www.ehu.es/∼mtwmastm
Tlf: +34 946015352 Fax: +34 946012516

Portada: *Tabla clásica de nudos*

Índice general

Introducción

La Topología estudia aquellas propiedades de los espacios que permanecen inalterables al someterlas a deformaciones *continuas*, es decir, a distorsiones que ni *rompen* ni *pegan* algo que no lo estaba previamente.

Por ejemplo, el carácter circular de una circunferencia no es una propiedad topológica: se pueden pegar las extremidades de una cuerda para hacer una circunferencia, y sin cortar ni despegar, deformar esta figura en un cuadrado, una elipse, etc. Se dirá que la circunferencia, el cuadrado y la elipse son objetos topológicamente equivalentes: la cualidad de *no tener extremidades* permanece constante durante estas transformaciones, ésta si es una propiedad topológica.

Una conocida broma afirma que las personas que se dedican al estudio de la topología no distinguen una rosquilla de una taza de café:

en efecto, hemos pasado de la rosquilla a la taza sin realizar ni roturas ni cortes: ha sido una *transformación topológica*.

La topología es pues *matemática cualitativa*, matemática sin números: trata de propiedades cualitativas intrínsecas de los espacios, que son independientes de su tamaño, posición y forma.

Los *espacios métricos* son los primeros ejemplos de espacios topológicos, los que primero surgieron en el estudio cualitativo de espacios: generalizan las propiedades de los espacios euclídeos, donde sabemos *medir* la distancia entre dos puntos dados.

En este curso de *topología de espacios métricos*, se trata de dar una introducción a la topología, a través de la teoría de espacios métricos.

Este texto está organizado en seis capítulos. El primero de ellos recopila aquellos preliminares sobre teoría de conjuntos y lógica matemática que son necesarios para una buena comprensión del texto.

Los siguientes cinco capítulos estudian las propiedades más importantes de espacios métricos: sólo están demostrados aquellos enunciados cuya prueba no es trivial, se han incluido una gran cantidad de ejemplos y cada capítulo finaliza con una amplia colección de ejercicios, donde los más complicados están marcados con el símbolo $\clubsuit$.

La bibliografía indicada se refiere en su mayoría a textos sobre espacios métricos, aunque aparecen también algunos libros clásicos dedicados a los espacios topológicos en general. Los cinco textos recomendados (por tratarse de una bibliografía amplia) para el curso van marcados con $*$: [D] y [H] por estar en castellano, la obra [R] por adaptarse perfectamente al contenido de este curso, [Se] y [SV] por tratarse de libros de reciente aparición... cualquiera de ellos será un buen libro de consulta.

Managua, enero de 2009

Capítulo 1

Conjuntos y aplicaciones

1.1. Nociones de Lógica

La Lógica es una herramienta básica en Matemáticas; damos aquí un breve repaso de algunos conceptos fundamentales.

1.1.1. Símbolos y conectores

En Matemáticas, es fundamental la utilización de símbolos y conectores que sirven para modificar o combinar sentencias.

Definición 1.1. Los siguientes símbolos se llaman *cuantificadores*:

1) el *cuantificador universal*: $\forall$ (para todo);

2) el *cuantificador existencial*: $\exists$ (existe).

Definición 1.2. También es esencial el uso de los llamados *conectores*:

1) la *negación*: no;

2) la *conjunción*: $\wedge$ (y);

3) la *disyunción*: $\vee$ (o);

4) la *implicación*: $\Longrightarrow$ (si –, entonces);

5) la *doble implicación*: $\Longleftrightarrow$ (si y sólo si, es equivalente a).

El manejo es sencillo, pero es preciso tener cuidado al utilizarlos. Por ejemplo, si $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son propiedades relativas a los elementos de un conjunto X (definición 1.11), para expresar que x cumple $\mathfrak{P}$, se escribirá $\mathfrak{P}(x)$. Y entonces:

Proposición 1.1. *El enunciado $\mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x)$, significa una de las tres posibilidades (mutuamente excluyentes) siguientes:*

(i) $\mathfrak{P}(x)$ *y* $\mathfrak{Q}(x)$*;*

(ii) $\mathfrak{P}(x)$ *y no-*$\mathfrak{Q}(x)$*;*

(iii) no-$\mathfrak{P}(x)$ *y* $\mathfrak{Q}(x)$.

Proposición 1.2. *Un enunciado se niega de la siguiente manera:*

1) no-$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ *es lo mismo que decir que* $(\exists x \in X : $ *no-*$\mathfrak{P}(x))$*;*

2) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x))$ *equivale a* $(\forall x \in X,$ *no-*$\mathfrak{P}(x))$*;*

3) no$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$ *es lo mismo que* $(\exists x \in X :$ *no-*$\mathfrak{P}(x)$ *o no-*$\mathfrak{Q}(x))$*;*

4) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x) \Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$ *es equivalente a* $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \not\Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$.

Proposición 1.3. *Cuando aparecen varios cuantificadores en un enunciado, es indiferente el orden en el que se escriben, siempre que los cuantificadores involucrados sean del mismo tipo. Si* $\mathfrak{P}(x, y)$ *es una propiedad relativa a los elementos* x *e* y*, entonces:*

1) $(\forall x, \forall y, \mathfrak{P}(x, y))$ *es lo mismo que decir que (*$\forall y$*,* $\forall x$*,* $\mathfrak{P}(x, y)$*);*

2) $(\exists x, \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$ *es equivalente a* $(\exists y \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$.

Contraejemplo 1.1. Hay que tener cuidado cuando se ven involucrados cuantificadores de distinto tipo. Por ejemplo, el enunciado $(\forall x, \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$ no equivale a la expresión $(\exists y : \forall x, \mathfrak{P}(x, y))$. En efecto, si $X = \mathbb{N}$ y $\mathfrak{P}(x, y)$ es la propiedad "$x \leq y$", la primera expresión se lee como que todo número natural posee otro mayor (que es cierta) y la segunda significa que existe un número natural mayor que todos los demás (que es falsa).

Proposición 1.4. *El cuantificador existencial y el conector disyunción se pueden intercambiar en la escritura de un enunciado, así como el cuantificador universal y el conector conjunción:*

1) $(\forall x, \mathfrak{P}(x))$ *y* $(\forall y, \mathfrak{Q}(y))$ *es lo mismo que* $(\forall x, y, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(y))$*;*

2) $(\exists x : \mathfrak{P}(x))$ *o* $(\exists y : \mathfrak{Q}(y))$ *es equivalente a* $(\exists x, y : \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(y))$.

Contraejemplo 1.2. En general, no se pueden intercambiar cuantificadores y conectores en la escritura de un enunciado:

1) la expresión $(\forall x, \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x))$ no equivale a $(\forall x, \mathfrak{P}(x)) \vee (\forall x : \mathfrak{Q}(x))$. En efecto, si $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son las propiedades de "ser par" y "ser impar" respectivamente, entonces la primera expresión se lee como que un número natural es par o impar (que es verdadera) y la segunda dice que todo número natural es par o todo número natural es impar (que es falsa);

2) la expresión $(\exists x : \mathfrak{P}(x)) \wedge (\exists x : \mathfrak{Q}(x))$ no equivale a $(\exists x : \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$. En efecto, tomando de nuevo el ejemplo de 1), la primera expresión se lee como que existe un número natural par y existe un número natural impar (que es cierta), y la segunda significa que existe un número natural a la vez par e impar (que es falsa).

1.1.2. Los objetos del razonamiento

Definir una teoría matemática es establecer las *reglas del juego* sobre los objetos manipulados, los denominados *axiomas*.

Definición 1.3. Un *axioma* es todo enunciado que:

1) sirve de fundamento para la construcción de una teoría;

2) se admite como cierto y no es por lo tanto objeto de discusión.

Cuando un único axioma no basta para definir una teoría, se pide además:

3) que los diferentes axiomas usados no se contradigan y sean independientes los unos de los otros.

Ejemplos 1.1. Algunos ejemplos de axiomas son los siguientes:

1) *axioma de Euclides*, que es la base de la Geometría Euclídea: dos rectas paralelas del plano euclídeo no se cortan;

2) *axioma de elección*: dado un conjunto X, existe una *función* (definición 1.18) *de elección*, $f : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \longrightarrow X$ (definición 1.14), que asigna a todo conjunto A no vacío, un punto distinguido $f(A) = a \in A$;

3) *lema de Zorn*: sea un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ (definición 1.31), tal que todo conjunto bien ordenado (definición 1.33) admite una cota superior (definición 1.34); entonces $(X, \leq)$ posee un elemento maximal (definición 1.32);

4) *axioma de Zermelo*: todo conjunto puede ser bien ordenado.

Observación 1.1. 2), 3) y 4) son formulaciones equivalentes del mismo axioma.

Definición 1.4. Una *definición* es un enunciado que sirve para explicar o introducir una nueva noción.

Una vez conocidos los axiomas y algunas definiciones, *el juego* puede comenzar, puesto que las reglas ya se conocen.

Definición 1.5. Un *teorema* es un enunciado que se deduce:

1) directamente de los axiomas o

2) de los axiomas y los teoremas precedentes, y

con las reglas de deducción que se llaman *demostraciones*, que aseguran su validez.

Definición 1.6. A veces, se da únicamente el nombre de teorema a los verdaderamente importantes, a los que han pasado a la historia con un nombre, o a los que precisan una demostración muy larga, dejando el nombre de *proposición* al resto.

Definición 1.7. Un *lema* es una proposición preliminar a la demostración de un teorema.

Definición 1.8. Un *corolario* es una proposición que se deduce inmediatamente de un teorema, por una demostración si no inmediata, cuando menos corta y fácil.

1.1.3. Condiciones necesarias y suficientes

Definición 1.9. (La implicación) Sean X un conjunto y $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ dos propiedades matemáticas definiendo los conjuntos $A = \{x \in X : \mathfrak{P}(x)\}$ y $B = \{x \in X : \mathfrak{Q}(x)\}$ respectivamente. Si $A \subset B$ (definición 1.12), todo elemento verificando $\mathfrak{P}$, cumple también $\mathfrak{Q}$. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *implica* $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$. Se dice también que $\mathfrak{P}$ es una *condición suficiente* de $\mathfrak{Q}$ (para obtener $\mathfrak{Q}$ basta con conocer $\mathfrak{P}$) o que $\mathfrak{Q}$ es una *condición necesaria* de $\mathfrak{P}$.

Definición 1.10. (La equivalencia) En las condiciones de la definición 1.9, si $A = B$ (definición 1.12), todo elemento verificando $\mathfrak{P}$ cumple también $\mathfrak{Q}$ y viceversa. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *es equivalente* a $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$. Como $A = B$ es idéntico a $A \subset B$ y $B \subset A$, la equivalencia $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$ significa las dos implicaciones $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q} \Longrightarrow \mathfrak{P}$. Es decir, las dos propiedades equivalentes $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ caracterizan el mismo conjunto. Observar que en tal caso $\mathfrak{P}$ es una *condición necesaria y suficiente* de $\mathfrak{Q}$.

1.1.4. Los métodos de demostración

Hay muchos métodos de demostración, de los cuales citamos los más importantes a continuación, usando la notación de la definición 1.9:

(i) Método de la hipótesis auxiliar: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se supone* $\mathfrak{P}$ *cierta.*

Esta forma de razonamiento, la más directa, es también la más conocida. De manera práctica consiste en demostrar el teorema $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, donde $\mathfrak{P}$ es la *hipótesis* y $\mathfrak{Q}$ la *conclusión o tesis*, suponiendo que se verifica $\mathfrak{P}$ (la hipótesis es cierta) y ayudándose de los axiomas y de los otros teoremas de la teoría demostrados anteriormente.

(ii) Disjunción de los casos: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se descompone* $\mathfrak{P}$ *en la forma* $\mathfrak{P}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{P}_n$*, y se prueba que para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, es* $\mathfrak{P}_i \Longrightarrow \mathcal{Q}$*.*

Es decir, se descompone el conjunto A de los elementos que cumplen $\mathfrak{P}$ en una unión disjunta (definición 1.13) de subconjuntos $A_1, \cdots, A_n$. Entonces, se prueba que para cada $1 \leq i \leq n$ es $A_i \subset B$; y como $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, se tendrá $A \subset B$.

Ejemplo 1.1. *Probar que si* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $n(n+1)$ *es par.*
Demostración: Distinguimos dos posibilidades: si n es par, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k$, y entonces $n(n+1) = 2k(2k+1)$. Si n es impar, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k+1$, y entonces $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$, que es claramente par. ∎

(iii) Método de contraposición: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se demuestra el contrarecíproco no-*$\mathfrak{Q} \Longrightarrow$ *no-*$\mathfrak{P}$*.*

Es un primer método de prueba indirecta. Descansa sobre el hecho de que la inclusión $A \subset B$ es equivalente a decir que los conjuntos complementarios (definición 1.13) verifican la inclusión $B^c \subset A^c$.

Ejemplo 1.2. *Probar que si* $n \in \mathbb{N}$ *es tal que* n^2 *es par, entonces* n *es par.*
Demostración: Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces n^2 es impar. ∎

(iv) Demostración por reducción al absurdo: *para probar un enunciado* $\mathfrak{P}$*, se supone su negación no-*$\mathfrak{P}$*, y se busca una contradicción en la teoría en la que se trabaja.*

Como evidentemente se admite que esta teoría no admite contradicciones, la suposición no-$\mathfrak{P}$ será falsa, lo cual es equivalente a decir que $\mathfrak{P}$ es cierta. ¿A qué contradicción se debe llegar? A contradecir un axioma, un teorema anteriormente probado o la propia suposición no-$\mathfrak{P}$.

De modo similar, para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ razonando por reducción al absurdo, se admite lo contrario, es decir, que no-($\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$), o lo que es equivalente, $\mathfrak{P}$ y no-$\mathfrak{Q}$. Y se busca entonces encontrar una contradicción.

(v) El contraejemplo: para probar que un propiedad matemática $\mathfrak{P}$ es cierta para un conjunto X, hay que probar que todos los elementos de X la verifican. Pero, se sabe que la negación de $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ es $(\exists x \in X, \text{no-}\mathfrak{P}(x))$. Así, para probar que esta fórmula es falsa, basta con encontrar un elemento de X que no verifique $\mathfrak{P}$: esto es lo que se llama *dar un contraejemplo*.

Ejemplo 1.3. *Si $x \in \mathbb{R}$, ¿es cierto que si $x \leq x^2$, entonces es $x \geq 1$?*
Demostración: La respuesta es falsa, tomando $x = -2$. ∎

(vi) La demostración por recurrencia: este tipo de demostración está ligada a la definición del conjunto de los enteros naturales. Es una técnica útil para probar que una propiedad $\mathfrak{P}(n)$ es cierta para todos los enteros naturales n, o para los que son iguales o superiores a un cierto n_0. Sean n_0 un entero natural y $\mathfrak{P}(n)$ una propiedad matemática que depende de un entero n. Para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,

2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para $n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots k\}$, que $\mathfrak{P}(k + 1)$ es cierta.

La etapa 1) es una simple verificación y la 2) es, de hecho, el objeto de una demostración.

Ejemplo 1.4. *Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
Demostración: Para $n = 1$, es cierto que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Si la propiedad se verifica para $n \in \{1, \dots, k\}$, entonces: $1+2+\cdots+k+(k+1)$=$(1+2+\cdots+k)$+$(k+1)$=$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$= $\frac{(k+2)(k+1)}{2}$. ∎

Observación 1.2. Hay una forma débil de la demostración por recurrencia: para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,

2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ se verifica para $k > n_0$, que $\mathfrak{P}(k + 1)$ es cierta.

En este caso, para probar que $\mathfrak{P}(k + 1)$ se verifica, nos apoyamos sólo sobre la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ es cierta.

1.2. Teoría de conjuntos

Definición 1.11. Un *conjunto* es una colección de objetos, llamados *elementos* o *puntos*. Si x es un elemento de X, se denota por $x \in X$. Análogamente, $x \notin X$ denota la "no pertenencia" de x a X. El *conjunto vacío* $\emptyset$ es el conjunto sin elementos.

Son conjuntos importantes en Matemáticas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\cdots$.

Se puede definir un conjunto:

1) por *extensión*, nombrando todos sus elementos: por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares es $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$;

2) a través de una *propiedad* $\mathfrak{P}$ válida en un universo $\mathfrak{U}$, que servirá para caracterizarlo $\{x \in \mathfrak{U} : \mathfrak{P}(x)\}$. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares se puede expresar por $\{x \in \mathbb{N} : x$ es múltiplo de $2\}$.

Definición 1.12. Dados $A, B \subset X$, se dice que A *está contenido* en B, $A \subset B$, si para cada $x \in A$, es $x \in B$. Y A es *igual* a B, $A = B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Definición 1.13. Si $A, B \subset X$, se definen:

1) la *intersección* de A y B, por $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$. Claramente, $A \cap B \subset A, B$. A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$;

2) la *unión* de A y B, por $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Es decir $x \in A \cup B$, si se verifica una (y sólo una) de las condiciones siguientes:

   (i) $x \in A$ y $x \in B$,

   (ii) $x \in A$ y $x \notin B$,

   (iii) $x \notin A$ y $x \in B$.

   Claramente, $A, B \subset A \cup B$;

3) el *complementario* de A en X, por $X - A = \{x \in X : x \notin A\}$. Si no hay duda de respecto a que conjunto se está tomando el complementario, se suele denotar por A^c;

4) la *diferencia* de A y B, por $A - B = A \cap B^c = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Proposición 1.5. *Las anteriores operaciones verifican las siguientes propiedades:*

1) leyes idempotentes: $A \cap A = A = A \cup A$*;*

2) leyes asociativas: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *y* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$*;*

3) leyes conmutativas: $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$*;*

4) leyes distributivas: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *y* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*;*

5) identidades: $A \cap X = A = A \cup \emptyset$*,* $A \cup X = X$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$*;*

6) propiedades del complementario: $A \cup A^c = X$*,* $A \cap A^c = \emptyset$*,* $(A^c)^c = A$ *y* $X^c = \emptyset$*;*

7) leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *y* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$*.*

Definición 1.14. Se llama *partes de* X o *conjunto potencia de* X al conjunto de todos los subconjuntos de X, y se denota por $\mathcal{P}(X)$ o 2^X. Es decir, $A \subset X$ si y sólo si $A \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 1.15. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ es el *producto cartesiano* de A por B. Sus elementos son *pares ordenados*.

Claramente, $A \times B \neq B \times A$. Y $A \times B = \emptyset$, si y sólo si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$. Dos pares ordenados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, son iguales $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Luego, $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 \neq a_2$ o $b_1 \neq b_2$.

En general, dada una familia finita de conjuntos $\{A_1, \cdots, A_n\}$, se define su producto cartesiano por $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Si $A_i = A$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, el producto cartesiano se denota por A^n.

Proposición 1.6. *El producto cartesiano verifica las siguientes propiedades:*

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$*;*

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$*;*

3) si $C \neq \emptyset$ *y* $A \times C = B \times C$*, entonces* $A = B$*;*

4) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$*;*

5) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$*;*

6) $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$*;*

7) si $B \subset C$*, entonces* $A \times B \subset A \times C$*;*

8) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$*;*

9) si A, B, C *y* D *son conjuntos no vacíos, entonces* $A \times B \subset C \times D$ *si y sólo si* $A \subset C$ *y* $B \subset D$*.*

Definición 1.16. Sea $I \neq \emptyset$ un *conjunto de índices*. Se considera una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$, y se dice que esta familia está *indicada* por I. Los conjuntos A_i no tienen porque ser diferentes.

Definición 1.17. Dada una familia indicada $\{A_i : i \in I\}$, con $A_i \subset X$, se define:

1) la *intersección generalizada* $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I, x \in A_i\}$, y

2) la *unión generalizada* $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}$.

Si el conjunto de índices I es finito, estas definiciones coinciden con las dadas en la definición 1.13. Se cumplen también en este caso las propiedades distributivas, las leyes de De Morgan $\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup\limits_{i \in I} A_i^c$ y $\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap\limits_{i \in I} A_i^c$, etc.

1.3. Funciones y sus propiedades

Definición 1.18. Dados dos conjuntos X e Y, una *aplicación* o *función* $f\colon X \longrightarrow Y$, es una correspondencia que asocia a cada $x \in X$, un elemento y sólo uno de Y, que se denota por $f(x)$.

Ejemplos 1.2. Algunos ejemplos de aplicaciones son:

1) la *aplicación identidad*, $1_X\colon X \longrightarrow X$, definida por $1_X(x) = x$;

2) la *aplicación inclusión*: si $A \subset X$, $i_A\colon A \longrightarrow X$, se define por $i_A(x) = x$;

3) la *aplicación constante*, $c_{y_0}\colon X \longrightarrow Y$, definida por $c_{y_0}(x) = y_0$, donde y_0 es un punto fijo de Y;

4) la *i-ésima proyección coordenada*, $p_i\colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_i$, definida por la igualdad $p_i((a_1, \cdots, a_n)) = a_i$;

5) la *inyección diagonal*, $d\colon X \longrightarrow X^n$, definida por $d(x) = (x, \cdots, x)$;

6) la *función característica de un conjunto*: si $A \subset X$, $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0, 1\}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

7) dada $f\colon X \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, la *restricción* de f a A, $f|_A\colon A \longrightarrow Y$, está definida por $f|_A(a) = f(a)$;

8) si $g\colon A \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es una *extensión* de g a X, si $f|_A = g$; una aplicación puede tener varias extensiones;

9) si $f\colon A \longrightarrow Y$ y $g\colon B \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones, donde $A \cup B = X$ y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A \cap B$, se puede definir la *combinada* de f y g, como la aplicación $h\colon X \longrightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Definición 1.19. Dada una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, X se llama el *dominio* de f e Y es su *codominio*. El *grafo* de f es el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$, que en muchas ocasiones se identifica con f.

Definición 1.20. Dos aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Z \longrightarrow W$ son *iguales*, cuando coinciden sus dominios ($X = Z$), sus codominios ($Y = W$) y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in X$. Por ejemplo, si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación y $A \subset X$, f y $f|_A$ no son iguales.

Definición 1.21. Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, $f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = y\}$ es la *imagen directa* de A. $f(X)$ se llama *rango* de la aplicación.

Definición 1.22. Si $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ es su *imagen recíproca*.

Proposición 1.7. *Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, se verifica:*

1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) \subset Y$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $f(A) \neq \emptyset$;

2) si $A_1, A_2 \subset X$, y $A_1 \subset A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$;

3) Si $A_i \subset X$ para $i \in I$, $f\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$ y $f\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$;

4) si $A_1, A_2 \subset X$, $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$ y en particular $f(X) - f(A_2) \subset f(X - A_2)$. Entre $Y - f(A_2)$ y $f(X - A_2)$ no hay en general ninguna relación;

5) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, y puede existir $\emptyset \neq B \subset Y$, tal que $f^{-1}(B) = \emptyset$;

6) $f^{-1}(Y) = X$;

7) si $B_1, B_2 \subset Y$ y $B_1 \subset B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

8) si $B_i \subset Y$ para $i \in I$, $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ y $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

9) Si $B_1, B_2 \subset Y$, $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$, y en particular, $f^{-1}(Y - B_2) = X - f^{-1}(B_2)$;

10) si $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$;

11) si $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subset B$;

12) si $A \subset X$ y $B \subset Y$, $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Definición 1.23. Dadas $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$, se define la *composición* de g y f, por $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$, donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in X$.

Proposición 1.8. *Sean $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ y $h\colon Z \longrightarrow W$ aplicaciones, entonces:*

1) la composición de funciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

2) $f \circ 1_X = f$ y $1_Y \circ g = g$;

3) si $C \subset Z$, es $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$;

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow X$, en general, $f \circ g \neq g \circ f$.

Definición 1.24. Se dice que $f\colon X \longrightarrow Y$ es *sobreyectiva*, si $f(X) = Y$, es decir, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Y es *inyectiva*, si dados $x_1 \neq x_2$ en X, es $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equivalentemente, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$).

Proposición 1.9. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$, entonces:*

1) $B = f(f^{-1}(B))$ para cada $B \subset Y$, si y sólo si f es sobreyectiva;

2) $Y - f(A) \subset f(X - A)$ para cada $A \subset X$ si y sólo si f es sobreyectiva;

3) si $g, h\colon Y \longrightarrow Z$ y f es sobreyectiva, entonces $g \circ f = h \circ f$ implica que $h = g$;

4) si $g\colon Y \longrightarrow X$ y $f \circ g = 1_Y$, entonces f es sobreyectiva;

5) $A = f^{-1}(f(A))$ para cada $A \subset X$, si y sólo si f es inyectiva;

6) $f\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i \in I} f(A_i)$ para cada familia indicada de conjuntos $\{A_i \subset X\}_{i \in I}$ si y sólo si f es inyectiva;

7) si f es sobreyectiva, entonces para cada $A \subset X$ es $Y - f(A) = f(X - A)$ si y sólo si f es inyectiva;

8) si $g, h\colon Z \longrightarrow X$ y f es inyectiva, entonces $f \circ g = f \circ h$ implica que $h = g$;

9) si $g\colon Y \longrightarrow X$ y $g \circ f = 1_X$, entonces f es inyectiva.

Definición 1.25. $f\colon X \longrightarrow Y$ es *biyectiva* si es sobreyectiva e inyectiva a la vez. En tal caso, la correspondencia definida por $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$, donde $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$, es una función.

Proposición 1.10. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$, entonces:*

1) si f es biyectiva, entonces f^{-1} también lo es;

2) si f es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = 1_X$, $f \circ f^{-1} = 1_Y$ y $(f^{-1})^{-1} = f$;

3) si $g\colon Y \longrightarrow X$ y $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, entonces f es biyectiva y $g = f^{-1}$;

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ son biyectivas, entonces $g \circ f$ lo es y además $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.4. Relaciones binarias

Definición 1.26. Dado un conjunto X, una *relación binaria* es $\mathfrak{R} \subset X \times X$. $\mathfrak{R}$ se llama:

1) *reflexiva*, si para cada $x \in X$, es $(x, x) \in \mathfrak{R}$;

2) *simétrica*, si dado $(x, y) \in \mathfrak{R}$, entonces $(y, x) \in \mathfrak{R}$;

3) *antisimétrica*, si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ e $(y, x) \in \mathfrak{R}$ implica que $x = y$;

4) *transitiva*, si dados $(x, y), (y, z) \in \mathfrak{R}$, entonces $(x, z) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.27. Una relación de *equivalencia* es una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva. Se suele denotar por $x\mathfrak{R}y$ en vez de $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.28. Dada $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia, se llama *clase de x* al conjunto $[x] = \{y \in X : x\mathfrak{R}y\}$. El *conjunto cociente $X/\mathfrak{R}$*, es el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Proposición 1.11. *Algunas propiedades son:*

1) $x \in [x]$ (x se llama representante de su clase), luego $[x] \neq \emptyset$;

2) $x\mathfrak{R}y$ si y sólo si $[x] = [y]$;

3) $[x] \neq [y]$ si y sólo si $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Definición 1.29. Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X, tales que:

(i) $X = \bigcup_{i \in I} P_i$, y

(ii) si $P_i \neq P_j$, entonces $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Lema 1.12. *Es equivalente dar una partición de X que una relación de equivalencia sobre él.*

Definición 1.30. Existe una aplicación canónica, $p\colon X \longrightarrow X/\mathfrak{R}$, que asigna a cada elemento x su clase de equivalencia $p(x) = [x]$. Se llama *aplicación cociente* y es sobreyectiva. Una vez dada la aplicación cociente, cada clase de equivalencia en X es precisamente $p^{-1}(p(x))$.

Definición 1.31. Una relación $\leq$ sobre X es un *orden parcial* si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice también que X está *parcialmente ordenado*. El orden se llama *total*, si dos elementos cualesquiera de X son comparables por esta relación.

Definición 1.32. Si X está parcialmente ordenado por $\leq$, entonces:

(i) $a \in X$ se llama *elemento máximo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \leq a$;

(ii) $a \in X$ es un *elemento maximal* de X, si $a \not\leq x$ para cada $x \neq a$;

(iii) $a \in X$ se llama *elemento mínimo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \geq a$,

(iv) $a \in X$ es un *elemento minimal* de X, si $x \not\leq a$ para cada $x \neq a$.

Ejemplo 1.5. Si $X = \{a, b, c\}$ con el orden parcial $a \leq b$ y $a \leq c$, entonces b es un elemento maximal de X, pero no un máximo.

Definición 1.33. Un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo $A \subset X$ no vacío posee un elemento mínimo, se llama conjunto *bien ordenado*. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, \leq)$ no está bien ordenado.

1.5. Propiedades de los números reales

$(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, donde $\leq$ denota el orden usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.34. Si $A \subset \mathbb{R}$, se tiene:

1) si $u \in \mathbb{R}$ es tal que $a \leq u$ para cada $a \in A$, se dice que u es una *cota superior* de A;

2) la menor de las cotas superiores de A (es decir, u es cota superior de A y para cada z cota superior de A es $z \geq u$) es el *supremo* de A, y se denota $\sup(A)$;

3) si $l \in \mathbb{R}$ es tal que $a \geq l$ para cada $a \in A$, se dice que l es una *cota inferior* de A;

4) la mayor de las cotas inferiores de A (es decir, l es cota inferior de A y para cada z cota inferior de A es $z \leq l$) es el *ínfimo* de A, y se denota $\inf(A)$.

Teorema 1.13. ***(Axioma de la cota superior)*** *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $M \geq a$, para cada $a \in A$), existe el supremo de A. Y en tal caso, $s = \sup(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \leq s$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon > s - \varepsilon$.

Del axioma anterior, se deduce que:

Corolario 1.14. *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente (es decir, existe $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq a$, para cada $a \in A$), existe el ínfimo de A. Y entonces, $i = \inf(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \geq i$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon < i + \varepsilon$.

Teorema 1.15. *$\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Demostración: Si lo estuviera, existiría $r_0 \in \mathbb{R}$, tal que $n \leq r_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $n_0 = [r_0] + 1 \in \mathbb{N}$, y $n_0 \not\leq r_0$. ∎

Del teorema 1.15 se deducen inmediatamente:

Corolario 1.16. ***(Propiedad arquimediana)*** *Para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.*

Corolario 1.17. ***(Densidad de los racionales)*** *Dados dos números reales $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x < r < y$.*

Demostración: Por la propiedad arquimediana (corolario 1.16), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < y - x$. El conjunto $\mathbb{M} = \{m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n_0}\}$ es no vacío y está bien ordenado, es decir, existe $m_0 \in \mathbb{M}$ tal que $x < \frac{m_0}{n_0}$ y $x \geq \frac{m_0 - 1}{n_0}$. Es inmediato probar que además $\frac{m_0}{n_0} < y$. ∎

Corolario 1.18. ***(Propiedad de los intervalos de encaje)*** *Dada $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$, una familia de intervalos cerrados y encajados (es decir, si $n \leq m$, es $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$), entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

Demostración: Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, es $a_n < b_m$, luego para todo $m \in \mathbb{N}$, b_m es cota superior del conjunto $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si $p = \sup(A)$, es claro que $p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. ∎

1.6. Cardinalidad de conjuntos

Definición 1.35. Dos conjuntos se llaman *equipotentes*, si existe una correspondencia biyectiva entre ellos.

Definición 1.36. X se dice *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que X es equipotente a $\{1, \cdots, n\}$. X es *infinito*, si no es finito, lo cual equivale a decir que es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo. X es *numerable* si es equipotente a $\mathbb{N}$ y es *contable* si es finito o numerable.

Observación 1.3. Dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si poseen el mismo número de elementos. No sucede lo mismo si X es infinito: $\mathbb{N}$ es equipotente al conjunto $\mathbb{P}$ de los números pares, y sin embargo $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$.

Lema 1.19. *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.*

Definición 1.37. A cada clase de equipotencia se le puede asignar un *número cardinal*, que es un objeto matemático ω tal que existe un conjunto X con $Card(X) = \omega$.

Definición 1.38. Un conjunto A es *de potencia menor o igual* que B, si existe una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ inyectiva, con lo cual $Card(A) \leq Card(B)$ (equivalentemente, si existe una aplicación $f\colon B \longrightarrow A$ sobreyectiva).

Definición 1.39. Dados dos números cardinales ω_1 y ω_2, se dice que $\omega_1 \leq \omega_2$, si existen conjuntos X e Y con $Card(X) = \omega_1$ y $Card(Y) = \omega_2$ y tales que la potencia de X es menor o igual a la potencia de Y. Se trata de una relación de orden. Si $\omega_1 \leq \omega_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$, se dice que ω_1 es estrictamente menor que ω_2.

Proposición 1.20. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1) si X es contable y $A \subset X$, entonces A es contable;

2) si X no es contable y $X \subset Y$, entonces Y no es contable;

3) si X es infinito, existe $A \subset X$, numerable y propio.

Teorema 1.21. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

Demostración: Se define la siguiente relación binaria: dados $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(m_1, n_1) \prec (m_2, n_2)$ si:

1) $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$, o

2) $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ y $m_1 < m_2$.

$\preceq$ es un orden total, gracias al cual se pueden escribir los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en una lista. La aplicación $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+m$, asigna a cada elemento $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el lugar que ocupa en esta lista, y es por lo tanto una biyección. ∎

Corolario 1.22. *Del teorema 1.21 se deduce:*

1) el producto cartesiano de una familia finita de conjuntos contables, es contable;

2) la unión de una familia contable de conjuntos contables es contable;

3) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.

Demostración: Para probar 3), basta con usar 2). $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$. Además, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ se puede escribir como la unión numerable $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde $A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$, que es equipotente a $\mathbb{Z}$. ∎

Contraejemplo 1.3. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración: Basta con demostrar que $[0,1]$ no es numerable. Si lo fuera, se escribiría $[0,1] = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se construye una sucesión de intervalos encajados del modo siguiente: x_1 no puede pertenecer a los tres intervalos $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Sea $I_1 = [a_1,b_1]$ uno de estos tres intervalos, tal que $x_1 \notin I_1$. Se divide I_1 en tres intervalos de amplitud $\frac{1}{9}$: $\left[a_1, a_1+\frac{1}{3}\right]$, $\left[a_1+\frac{1}{3}, a_1+\frac{2}{3}\right]$ y $\left[a_1+\frac{1}{3}, b_1\right]$. De nuevo, existe uno de ellos $I_2 \subset I_1$, tal que $x_2 \notin I_2$. Se continúa de manera inductiva, obteniendo una sucesión de intervalos encajados $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cada I_n de longitud $\frac{1}{3^n}$ y tal que $x_n \notin I_n$. Por la propiedad de los intervalos de encaje (corolario 1.18), existe $p \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [0,1]$, lo que es imposible. ∎

El $Card(\emptyset) = 0$, es el cardinal mínimo. Sin embargo no existe un cardinal máximo:

Teorema 1.23. ***(de Cantor)*** *Para cada conjunto X, $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$.*

Demostración: Si $X = \emptyset$, $Card(\mathcal{P}(X)) = 1$, pues $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Si $X \neq \emptyset$, es obvio que $Card(X) \leq Card(\mathcal{P}(X))$, porque la aplicación $h \colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $h(x) = \{x\}$ es inyectiva. Supongamos que $Card(X) = Card(\mathcal{P}(X))$, es decir, existe una aplicación $f \colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ biyectiva. Sea $A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Como f es sobreyectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = A$. Si $x_0 \in A$, esto significaría que $x_0 \notin f(x_0) = A$, lo cual es imposible. Luego, es $x_0 \notin A$, lo cual significa que $x_0 \in f(x_0) = A$, imposible de nuevo. ∎

En particular, $Card(\mathbb{N}) = \aleph_0 < Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$ (notación que proviene de la propiedad descrita en el ejercicio 9 del apartado 1.7). Puede probarse que $2^{\aleph_0} = Card(\mathbb{R}) = c$, que se llama el *cardinal del continuo*. De aquí se concluye que $\aleph_0 < c$.

Desde principios de siglo, se ha intentado en vano establecer si existe un número cardinal $\aleph_1$, entre $\aleph_0$ y c. Georg Cantor (1845-1918) hace la siguiente conjetura:

Teorema 1.24. ***(Hipótesis del continuo)*** *$c = \aleph_1$, es decir, no existe ningún conjunto A, tal que $\aleph_0 < Card(A) < c$.*

Paul Joseph Cohen (1934-2007) establece en 1963 que la hipótesis del continuo es indecidible: añadiendo como axioma su veracidad o su falsedad, los fundamentos de la Matemática siguen siendo coherentes.

1.7. Ejercicios

1.- Con ayuda del lenguaje simbólico, decidir si son correctas las siguientes deducciones:

a) Los gusanos reptan. Todo lo que repta se mancha. Luego, los gusanos están sucios.

b) Si aumenta la temperatura o cae un meteorito, los osos polares morirán de hambre. Se sabe que los osos polares van a sobrevivir, por lo tanto, caerá pronto un meteorito.

c) Ninguna pelota de tenis es de cristal. Ningún objeto de cristal es indestructible. Luego, ninguna pelota de tenis es indestructible.

d) Si se abandona la utilización de gasolina o se incrementa el uso de energía solar, la contaminación disminuirá. Si se abandona el uso de gasolina, el país entrará en crisis. La utilización de la energía solar no aumentará, a no ser que no haya crisis. Por lo tanto, la contaminación no va a disminuir.

e) Los profesores son sádicos. Algunos sádicos usan látigo. Por lo tanto, algunos profesores usan látigo.

f) Los caramelos son dulces. Ningún alimento dulce contiene sal. Luego, los caramelos no contienen sal.

g) Los pájaros silban. Algunos habitantes de Nicaragua son pájaros. Luego, algunas criaturas de Nicaragua silban.

h) Si no trabajo duro, me dormiré. Si estoy preocupado, no dormiré. Por lo tanto, si estoy preocupado, trabajaré duro.

i) Las nubes son esponjosas. Algunos objetos esponjosos son rosas. Luego, algunas nubes son rosas.

j) Los osos polares tocan el violín. Los violinistas no vuelan. Por lo tanto, los osos polares no vuelan.

k) Las tortugas ven CSI-Las Vegas. Algunas criaturas de Gálapagos son tortugas. Por lo tanto, algunos habitantes de Galápagos ven CSI-Las Vegas.

l) Las polillas salen de noche. Algunos caminantes nocturnos son vampíros. Por lo tanto, las polillas son vampíros.

m) Si Thor se enfada, hay tormentas. Está comenzando una tormenta. Por lo tanto, Thor está enfadado.

n) Si en Marte hubiera grandes cantidades de agua, podría haber vida. No hay grandes extensiones de agua en Marte. Por lo tanto, no hay vida en Marte.

ñ) Los buenos políticos son honestos. Juan es honesto. Juan sería un buen político.

o) Algunas personas no beben café. Los matemáticos son humanos. Por lo tanto, algunos matemáticos no beben café.

p) Ningún elefante sabe tricotar. Yo no sé tricotar. Luego, soy un elefante.

q) Algunos poetas son nerviosos. Hay gente nerviosa que se come las uñas. Luego, algunos poetas se comen las uñas.

r) Si hago estos ejercicios, aprenderé lógica. Ya he terminado de hacerlos... ¡Sé lógica!

2.- Negar los siguientes enunciados:

a) Los políticos son gordos y feos. b) Hay un matemático que sabe sumar.

c) Algunas personas de Estelí tienen paraguas. d) El Athletic ganará la Liga.

e) Nadie en Managua habla swahili. f) Al menos dos faraones egipcios eran ciegos.

g) A veces, llueve en El Sahara. h) Siempre hace frío en Groenlandia.

i) Ni Alejandro Magno, ni Julio César eran pelirrojos. j) $A \subset B$.

k) $x \in A$ o $x \in B$. l) $x \in A$ y $x \in B$. m) $x \in A$, pero $x \notin B$.

n) para cada $i \in I$, es $x \in A_i$. o) existe $i \in I$, tal que $x \in A_i$.

3.- Sea X el conjunto de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la UNAN Managua, H el conjunto de los hombres, M el de la mujeres, C el de los estudiantes que van caminando a la Universidad, A el de los estudiantes que van en autobús a la Universidad, E el de los estudiantes de Matemáticas y F el de los estudiantes de Físicas. Describir los siguientes conjuntos: $X - H$, $X - M$, $X - C$, $X - A$, $X - E$, $X - F$, $H \cap C$, $H \cap A$, $H \cap E$, $H \cap F$, $M \cap C$, $M \cap A$, $M \cap E$, $M \cap F$, $C \cap A$, $C \cap E$, $C \cap F$, $A \cap E$, $A \cap F$, $E \cap F$, $M \cup H$, $H - M$, $H - C$, $H - A$, $H - E$, $H - F$, $H - M$, $M - H$, $M - C$, $M - A$, $M - E$, $M - F$, $C - A$, $C - E$, $C - F$, $A - C$, $A - M$, $A - H$, $A - E$, $A - F$, $E - H$, $E - M$, $E - C$, $E - A$ y $E - F$.

4.- Cuatro compañeros han faltado a la clase de Matemáticas en el Instituto. Delante del Jefe de Estudios y en presencia de su profesor, se defienden del modo siguiente:

Pedro: “No he faltado.”
Elena: “Lo admito, he faltado, pero estaba con Juan.”
Juan: “Yo también he faltado; pero no estaba con Elena, sino con Pedro.”
María: “Yo estaba en clase, pero no he visto a Pedro.”
El profesor: “Estaba concentrado en mis cosas, pero he visto a Pedro en clase.”

¿Puedes ayudar al Jefe de Estudios, sabiendo que sólo tres de estas sentencias son ciertas?

5.- Traducir las siguientes frases del lenguaje natural en un lenguaje simbólico utilizando una o varias propiedades $\mathfrak{P}$. Negar cada enunciado y traducirlo al lenguaje natural:

a) Una puerta está abierta o cerrada. b) Las verdades son fáciles de decir.

c) Ser o no ser. d) Prefiero la poesía a la novela histórica.

6.- Probar la siguiente propiedad: Si $x \in \mathbb{R}$ y para cada $\varepsilon > 0$, es $|x| < \varepsilon$, entonces $x = 0$.

7.- Dado el conjunto $A = \{a, b\}$, ¿son válidas las siguientes expresiones?
(i) $a \in A$; (ii) $\{a\} \in A$; (iii) $\emptyset \in A$; (iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$; (v) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

8.- Sean A, B y C tres conjuntos finitos, de cardinales a, b y c, respectivamente. Sea $p = Card(A \cap B)$, $q = Card(B \cap C)$, $r = Card(A \cap C)$ y $s = Card(A \cap B \cap C)$. Calcular el cardinal de $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$.

9.- Se pide:

a) calcular $\mathcal{P}(X)$, si $X = \{1, 2\}$, $X = \{\emptyset\}$ y $X = \{1, 2, 3, 4\}$;

b) probar que si $Card(X) = n$, entonces $Card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$;

c) probar que si $A \subset B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. ¿Es cierto el recíproco?

10.- Si $A, B \subset X$, probar que son equivalentes las siguientes expresiones:

(i) $A \subset B$; (ii) $A \cap B = A$; (iii) $A \cup B = B$;

(iv) $B^c \subset A^c$; (v) $A \cap B^c = \emptyset$; (vi) $B \cup A^c = X$.

11.- Probar las propiedades siguientes para conjuntos, dando un contraejemplo en el caso de inclusión estricta:

a) $A \cup \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cup B_i)$; b) $A \cap \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cap B_i)$;

c) $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$; d) $\bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$;

e) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$; f) $\bigcap_{(i,j)\in I^2}(A_i \cup B_j) \subset \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$;

g) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$; h) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subset \bigcup_{(i,j)\in I^2}(A_i \cap B_j)$;

i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$;

j) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$; k) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A_i \times B_i)$;

l) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i - B_j)$; m) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i - B_j)$.

12.- Para cada uno de los siguientes conjuntos de índices I y cada familia dada de conjuntos indicados por I, hallar los conjuntos pedidos:

a) si $I = \mathbb{R}^2$ y para $p \in I$, $S_p = \{p\}$, hallar $\bigcup_{p\in I} S_p$;

b) si $I = (0, \infty)$ y para $x \in I$, $C_x = [0, x]$, hallar $\bigcup_{x\in I} C_x$ y $\bigcap_{x\in I} C_x$;

c) si $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y para $r \in I$, B_r es el círculo de centro $(0,0)$ y radio r, hallar $\bigcup_{r\in I} B_r$ y $\bigcap_{r\in I} B_r$;

d) si $I = (0, 1)$ y para $r \in I$, N_r es el interior del círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} N_r$ y $\bigcap_{r\in I} N_r$;

e) si $I = [1, 2]$ y para$x \in I$, $A_x = [\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}]$, hallar $\bigcup_{x\in I} A_x$ y $\bigcap_{x\in I} A_x$;

f) si $I = \mathbb{N}$ y para $n \in I$, $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, hallar $\bigcup_{n\in I} A_n$ y $\bigcap_{n\in I} A_n$;

g) si $I = \mathbb{N}$ y para $n \in I$, $B_n = (\frac{1}{n}, 1]$, hallar $\bigcup_{n\in I} B_n$ y $\bigcap_{n\in I} B_n$;

h) si $I = \mathbb{N}$ y para $n \in I$, $C_n = (-n, n)$, hallar $\bigcup_{n\in I} C_n$ y $\bigcap_{n\in I} C_n$.

13.- Dados $A, B \subset X$, probar:

a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A.\chi_B$; b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;

c) $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$; d) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

14.- Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones. Probar:

a) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

b) si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g también lo es, pero el recíproco no es cierto;

c) si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva;

d) si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

e) si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f también lo es, pero el recíproco no es cierto;

f) si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

15.- Sea $f : X \longrightarrow Y$; probar:

a) si existe $g : Y \longrightarrow X$, tal que $g \circ f = 1_X$, entonces f es inyectiva;

b) si existe $h : Y \longrightarrow X$, tal que $f \circ h = 1_Y$, entonces f es sobreyectiva;

c) f es biyectiva si y sólo si existen $g, h : Y \longrightarrow X$, tales que $g \circ f = 1_X$, $f \circ h = 1_Y$ y en tal caso $h = f^{-1} = g$.

16.- Sean dos conjuntos X_1, X_2 y para cada $i \in \{1, 2\}$, $A_i \subset X_i$. Sea $p_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ la i-ésima proyección coordenada. Probar las siguientes propiedades:

a) $A_1 \times X_2 = p_1^{-1}(A_1)$, $X_1 \times A_2 = p_2^{-1}(A_2)$ y $A_1 \times A_2 = p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2)$;

b) si $A \subset X_1 \times X_2$, entonces $A \subset p_1(A) \times p_2(A)$;

c) $p_i\,(A_1 \times A_2) = A_i$ ($i \in \{1,2\}$).

17.- Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) estudiar las funciones $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, si tienen sentido;

b) estudiar el carácter sobreyectivo e inyectivo de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$;

c) calcular $f(-5,5]$, $g(-5,5]$, $f^{-1}(-5,5]$ y $g^{-1}(-5,5]$.

18.- Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) estudiar si f es inyectiva o sobreyectiva;

b) calcular $f((1,3))$, $f([-2,2])$, $f^{-1}((0,1))$, $f^{-1}([-4,4])$;

c) si $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $g(x) = |x|$, determinar $f \circ g$ y calcular $(f \circ g)^{-1}((-2,5])$.

19.- Probar que la aplicación $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, definida por: $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ es biyectiva y calcular f^{-1}.

20.- Calcular $f(A_i)$ y $f^{-1}(B_i)$ ($i \in \{1,2\}$), para $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde:

a) $f(x) = x^2$, $A_1 = (0,2)$, $B_1 = (0,4)$ y $B_2 = (-1,0)$;

b) $f(x) = x^4$, $A_1 = (0,2)$, $A_2 = \emptyset$, $B_1 = (0,16]$ y $B_2 = (-1,0]$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ (para $x > 0$), $A_1 = \mathbb{N}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ y $B_2 = \mathbb{N}$;

d) $f(x) = x^3 - 3x$, $A_1 = [0,\infty)$, $B_1 = (0,2)$ y $B_2 = \{2\}$.

22.- Dados $x, y \in \mathbb{R}$, utilizando el carácter arquimediano de $\mathbb{R}$, probar:

a) si $x > 0$ e $y > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > y$;

b) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$;

c) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 \leq x < n$.

Capítulo 2

Espacios métricos

2.1. Definición de espacio métrico

2.1.1. Definición de distancia

Un espacio métrico es un conjunto en donde se introduce la noción de distancia entre sus elementos. Se intenta generalizar lo que sucede en el plano o el espacio: aquí conocemos perfectamente lo que es la distancia entre dos puntos. El problema, siendo X un conjunto abstracto, es definir lo que se entiende por distancia entre dos de sus elementos cuya naturaleza específica desconocemos. Para abstraer el concepto de *distancia*, hay que captar lo esencial de dicha noción, lo que da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.1. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, una *métrica* o *distancia* sobre X es una función $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, verificando:

(i) *positividad*: para cada $x, y \in X$, es $d(x, y) \geq 0$,

(ii) *propiedad idéntica*: dados $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iii) *simetría*: para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) *desigualdad triangular*: para cada $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La expresión $d(x, y)$ se lee como *distancia de x a y*, y el par (X, d) se denomina *espacio métrico*.

Definición 2.2. En la definición 2.1, si se debilita la condición (ii) reemplazándola por

(ii)* para cada $x \in X$, $d(x, x) = 0$,

estamos contemplando la posibilidad de que existan $x \neq y$ en X con $d(x, y) = 0$. Entonces d recibe el nombre de *pseudométrica*.

Sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas métricas, que dan lugar a diferentes espacios métricos, como se comprueba en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 2.1. Los primeros ejemplos de espacios métricos son:

1) (X, d_{dis}) donde d_{dis} es la *métrica discreta* sobre X:

$$d_{\text{dis}}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

2) el par $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$, donde $d_{\text{u}}(x,y) = |x-y|$, se llama la *recta real* y d_{u} es la *distancia usual* o *euclídea*;

3) sean (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) una familia finita de espacios métricos. Vamos a definir lo que se denomina el *espacio métrico producto* de tres maneras diferentes. Sean $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$. Podemos definir tres distancias sobre X:

a) $d_{\text{máx}} \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{máx}}(x,y) = \text{máx}\{d_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$;

b) $d_{\text{sum}} \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{sum}}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$;

c) $d_{\text{u}} \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{u}}(x,y) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}$, es la *distancia euclídea*.

La única propiedad de métrica no trivial para d_{u} es la desigualdad triangular, que en este caso recibe el nombre de *desigualdad de Minkowski*. Para demostrarla, es preciso probar algunos resultados previos:

Lema 2.1. ***(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)*** *Dadas dos familias de números reales* $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n$, *se cumple:*

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Demostración: Suponemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0 \neq \sum_{i=1}^{n} b_i^2$; en caso contrario, para todo i sería $a_i = 0 = b_i$, y la desigualdad sería trivial. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i - \beta b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha^2 a_i^2 + \beta^2 b_i^2 - 2\alpha\beta a_i b_i\right),$$

es decir, $2\alpha\beta\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \beta^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. Tomando $\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ y $\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, queda probado el resultado. ∎

Lema 2.2. ***(Desigualdad de Minkowski)*** *En las condiciones del lema 2.1, es*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Demostración: Lo que se desea probar equivale a demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

es decir, simplificando $\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$, que es el lema 2.1. ∎

Observación 2.1. Comprobar la desigualdad triangular del ejemplo 2.1 3c), equivale a probar que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, z_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(y_i, z_i)};$$

para ello basta con tomar $a_i = d_i(x_i, y_i)$ y $b_i = d_i(y_i, z_i)$ en la desigualdad de Minkowski (lema 2.2) y utilizar la desigualdad triangular para las métricas d_i, $1 \leq i \leq n$.

Las tres métricas del ejemplo 2.1 3) están muy relacionadas, en el sentido dado en la siguiente definición:

Definición 2.3. Sea X un conjunto no vacío y d_1, d_2 dos métricas sobre X. Se dice que d_1 es *métricamente equivalente* a d_2, si existen $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $0 < \alpha < \beta$ y para cada $x, y \in X$ es

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Lema 2.3. *La relación "ser métricamente equivalente a" es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las métricas sobre X.*

Gracias a este lema, decimos sencillamente que d_1 y d_2 son distancias *métricamente equivalentes* y que (X, d_1) y (X, d_2) son espacios *métricamente equivalentes*.

Proposición 2.4. *Las métricas $d_{\text{máx}}$, d_{sum} y d_{u} del ejemplo 2.1 3) son métricamente equivalentes, y cualquiera de los tres espacios asociados se llama* espacio métrico producto de la familia $\{(X_i, d_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

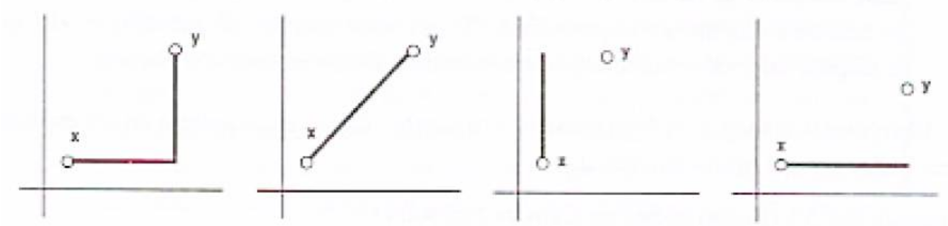
Demostración: $d_{\text{máx}}(x,y) \leq d_{\text{sum}}(x,y)$. Y $d_{\text{sum}}(x,y) \leq n d_{\text{máx}}(x,y)$. Luego $d_{\text{máx}}$ y d_{sum} son métricamente equivalentes. Por otro lado, $d_{\text{máx}}(x,y) \leq d_{\text{u}}(x,y)$. Y $d_{\text{u}}(x,y) \leq \sqrt{n} d_{\text{máx}}(x,y)$. Luego $d_{\text{máx}}$ y d_{u} son métricamente equivalentes. Por tratarse de una relación de equivalencia, se deduce que d_{sum} y d_{u} son también métricamente equivalentes. ∎

Ejemplos 2.2. En particular, sobre $\mathbb{R}^n$ puede definirse la métrica producto inducida por la usual sobre la recta (denotamos los puntos por $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$):

a) $d_{\text{máx}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{máx}}(x,y) = \text{máx}\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$;

b) $d_{\text{sum}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_{\text{sum}}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

c) la *distancia euclídea* $d_{\text{u}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{u}}(x,y) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$. El par $(\mathbb{R}^n, d_{\text{u}})$ se llama *espacio euclídeo de dimensión n*.



$d_{\text{sum}}(x,y)$, $d_{\text{u}}(x,y)$, y dos ejemplos de $d_{\text{máx}}(x,y)$

Proposición 2.5. *Sean (X,d) un espacio métrico y $x, y, z, w \in X$. Entonces*

$$|d(x,z) - d(y,w)| \leq d(x,y) + d(z,w).$$

En particular, es $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.

Demostración: Aplicando dos veces consecutivas la desigualdad triangular, se tiene que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,w) + d(z,w)$, luego $d(x,z) - d(y,w) \leq d(x,y) + d(z,w)$. Del mismo modo, $d(y,w) \leq d(y,x) + d(x,z) + d(w,z)$, luego $d(y,w) - d(x,z) \leq d(y,x) + d(w,z)$. ∎

2.1.2. Distancia entre conjuntos

Dados (X,d), $\emptyset \neq A \subset X$ y $x \in X$, la familia de números reales $\{d(x,y) : y \in A\}$ está acotada inferiormente por 0. Por lo tanto, existe $\inf\{d(x,y) : y \in A\} \geq 0$, se denota por $d(x,A)$ y se llama *distancia de x a A*.

Ejemplo 2.1. Si $x \in A$, es claro que $d(x,A) = 0$. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, si $A = (0,1)$ y $x = 0$, es $x \notin A$, pero $d_{\mathrm{u}}(A,x) = 0$.

Proposición 2.6. *Sean un espacio métrico (X,d), $\emptyset \neq A \subset X$ y $x_0, y_0 \in X$. Entonces, es $|d(x_0,A) - d(y_0,A)| \leq d(x_0,y_0)$.*

Demostración: Para cada $x \in A$ es $d(x_0,x) \leq d(x_0,y_0) + d(y_0,x)$, por lo tanto es $d(x_0,A) \leq d(x_0,y_0) + d(y_0,x)$ para cada $x \in A$. Así, $d(x_0,A) - d(x_0,y_0)$ es una cota inferior de la familia $\{d(y_0,x) : x \in A\}$, con lo que $d(x_0,A) - d(x_0,y_0) \leq d(y_0,A)$. De modo similar se demuestra la desigualdad $d(y_0,A) - d(x_0,y_0) \leq d(x_0,A)$, con lo que se obtiene el resultado deseado. ∎

Dados (X,d) y $\emptyset \neq A, B \subset X$, la familia de números reales $\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$ está acotada inferiormente por 0. Por lo tanto, existe $\inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} \geq 0$, se denota por $d(A,B)$ y se llama *distancia de A a B*.

Ejemplo 2.2. Si $A \cap B \neq \emptyset$, es claro que $d(A,B) = 0$. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, los conjuntos $A = (0,1)$ y $B = (-1,0)$ son disjuntos, pero $d_{\mathrm{u}}(A,B) = 0$.

Proposición 2.7. *Dados (X,d) y $\emptyset \neq A, B \subset X$, $d(A,B) = \inf\{d(A,y) : y \in B\} = \inf\{d(x,B) : x \in A\}$.*

Demostración: Sea $x \in A$. Para cada $y \in B$ es $d(A,B) \leq d(x,y)$. Luego $d(A,B)$ es cota inferior de la familia $\{d(x,y) : y \in B\}$, y así $d(A,B) \leq d(x,B)$. Luego, para cada $x \in A$ es $d(A,B) \leq d(x,B)$, con lo que $d(A,B)$ es cota inferior de la familia $\{d(x,B) : x \in A\}$, y entonces $d(A,B) \leq \inf\{d(x,B) : x \in A\}$. Por la definición de $d(A,B)$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in A$, $y_\varepsilon \in B$ tal que $d(A,B) + \varepsilon > d(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. Como $d(x_\varepsilon, B) \leq d(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$, es $d(x_\varepsilon, B) < d(A,B) + \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Como $\inf\{d(x,B) : x \in A\} \leq d(x_\varepsilon, B)$, concluimos que para cada $\varepsilon > 0$ es $\inf\{d(x,B) : x \in A\} < d(A,B) + \varepsilon$, es decir, $\inf\{d(x,B) : x \in A\} \leq d(A,B)$. ∎

2.1.3. Isometrías

Definición 2.4. Sean (X,d) e (Y,ρ) espacios métricos. Una *isometría* entre (X,d) e (Y,ρ) es una aplicación biyectiva $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ que *preserva la distancia*, es decir, para cada $a, b \in X$, es $d(a,b) = \rho(f(a), f(b))$. Se dice que (X,d) es *isométrico* a (Y,ρ).

Proposición 2.8. *La relación "ser isométrico" es una relación de equivalencia sobre la familia de espacios métricos.*

Así, podemos hablar sencillamente de espacios métricos isométricos. Dos espacios métricos isométricos pueden diferir en la naturaleza específica de sus puntos, pero son indistinguibles en cuanto a su comportamiento como espacios métricos.

2.2. Bolas abiertas y cerradas. Esferas

Definición 2.5. Sea (X, d) y $r > 0$. Se llama:

1) *bola abierta* de centro x y radio r, al conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$;

2) *bola cerrada* de centro x y radio r, al conjunto $\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$;

3) *esfera* de centro x y radio r, al conjunto $S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$.

Ejemplos 2.3. Damos algunos ejemplos de bolas en algunos espacios métricos:

(i) en (X, d_{dis}), $B(x, 1) = \{x\}$, $B(x, 2) = X$, $\overline{B}(x, 1) = X$, $\overline{B}(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, $S(x, 1) = X - \{x\}$ y $S(x, 2) = \emptyset$;

(ii) en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$, $B(x, r) = (x-r, x+r)$, $\overline{B}(x, r) = [x-r, x+r]$ y $S(x, r) = \{x-r, x+r\}$;

(iii) en $(\mathbb{R}^n, d_{\text{máx}})$, la bola $B(x, r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r)$ es el cubo de dimensión n, centrado en x y arista $2r$;

(iv) en $(\mathbb{R}^n, d_{\text{sum}})$, la bola $B(x, r)$ es el cubo de dimensión n centrado en x, de arista $2r$ y girado 45 grados;

(v) en $(\mathbb{R}^n, d_{\text{u}})$, $B(x, r)$ es la bola abierta de dimensión n, centrada en x y de radio r.

Proposición 2.9. *En un espacio métrico (X, d), se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) para cada $x \in X$ y $r > 0$, es $B(x, r) \neq \emptyset \neq \overline{B}(x, r)$; pero $S(x, r)$ puede ser vacía;

(ii) si $0 < r \leq s$, es $B(x, r) \subset B(x, s)$, $\overline{B}(x, r) \subset \overline{B}(x, s)$, $\overline{B}(x, r) \subset B(x, s)$ (si $r < s$) y $S(x, r) \cap S(x, s) = \emptyset$ si $s \neq r$;

(iii) $B(x, r) \cup S(x, r) = \overline{B}(x, r)$ y $B(x, r) \cap S(x, r) = \emptyset$;

(iv) si $r_1, \ldots, r_n > 0$, $B(x, r_1) \cap \cdots \cap B(x, r_n) = B(x, r)$ y $\overline{B}(x, r_1) \cap \cdots \cap \overline{B}(x, r_n) = \overline{B}(x, r)$, donde $r = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_n\}$.

Observación 2.2. La intersección arbitraria de bolas no tiene porque serlo; por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$, que no es una bola.

Teorema 2.10. ***(Propiedad de Hausdorff)*** *En un espacio métrico (X, d), dos puntos distintos se pueden* separar por bolas abiertas disjuntas.

Demostración: Sean $x \neq y$. Entonces $d(x, y) = r > 0$. Las bolas $B(x, \frac{r}{2})$ y $B(y, \frac{r}{2})$ son obviamente disjuntas. ∎

2.3. Conjuntos abiertos y cerrados

2.3.1. Conjuntos abiertos

Definición 2.6. En (X, d), un subconjunto A se dice *abierto*, si para cada $a \in A$, existe $r_a > 0$ (que depende sólo de a) tal que $B(a, r_a) \subset A$.

Teorema 2.11. *En un espacio métrico (X, d), los conjuntos X y $\emptyset$ son abiertos.*

Teorema 2.12. *En un espacio métrico (X, d), para cada $x \in X$ y $r > 0$, la bola $B(x, r)$ es un conjunto abierto.*

Demostración: Sea $y \in B(x, r)$ y $s = d(x, y) < r$; es $B(y, r - s) \subset B(x, r)$. ∎

Ejemplos 2.4. Algunos ejemplos de conjuntos abiertos son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, los intervalos abiertos son conjuntos abiertos;

(ii) en (X, d_{dis}), cualquier conjunto es abierto.

Teorema 2.13. *En (X, d), sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos. Entonces*

(i) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ *es abierto;*

(ii) si I es finito, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ *es abierto.*

Demostración: (i) Si $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Como A_i es abierto, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A_i \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

(ii) Si $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, para cada $i \in I$ es $x \in A_i$. Para todo $i \in I$, existe $r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subset A_i$. Si $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, es $B(x, r) \subset \bigcap\limits_{i \in I} A_i$. ∎

Observación 2.3. En el teorema 2.13 (ii), el conjunto de índices debe de ser finito: en efecto, en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, si se toma $I = \mathbb{N}$ y la familia de abiertos $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$, que no es abierto.

Teorema 2.14. *En (X, d), A es abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas.*

Demostración: Por los teoremas 2.12 y 2.13, la unión de bolas abiertas es un conjunto abierto. Y recíprocamente, si A es abierto, para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \subset A$. Es obvio que $A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$. ∎

Observación 2.4. No todo abierto es una bola abierta, por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $A = \mathbb{R}$ es abierto y no es una bola abierta.

2.3.2. Topología inducida por una métrica

Definición 2.7. Sean un conjunto X y una familia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ verificando:

1) $\emptyset, X \in \tau$,
2) si $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$,
3) si $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \tau$, entonces $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$.

Se dice que τ es una *topología* sobre X y el par (X, τ) se llama *espacio topológico*.

Como consecuencia de los teoremas 2.11 y 2.13, se obtiene:

Proposición 2.15. *En (X, d), la familia $\tau_d = \{U \subset X : U$ es abierto$\}$ es una topología sobre X, llamada* topología métrica.

Ejemplos 2.5. Algunos ejemplos de topologías son:

(i) para $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$, se tiene la *topología euclídea* $\tau_{d_{\mathrm{u}}}$;
(ii) para (X, d_{dis}), $\tau_{d_{\mathrm{dis}}} = \mathcal{P}(X)$ se llama la *topología discreta*.

Definición 2.8. Un espacio topológico (X, τ) se llama *metrizable*, si existe una métrica d sobre X tal que $\tau_d = \tau$.

Observación 2.5. No todo espacio topológico es metrizable: por ejemplo, dado $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{ind}})$, donde $\tau_{\mathrm{ind}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (la *topología indiscreta*) no es metrizable, pues no se cumple la propiedad de Hausdorff (teorema 2.10).

Definición 2.9. Dos métricas d_1 y d_2 sobre X se llaman *topológicamente equivalentes*, si inducen la misma topología sobre X, y en tal caso se dice que (X, d_1) y (X, d_2) son espacios métricos *topológicamente equivalentes*.

Lema 2.16. *La relación "ser topológicamente equivalentes" es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las métricas sobre X.*

Lema 2.17. *Con las notaciones obvias, (X, d_1) y (X, d_2) son topológicamente equivalentes si y sólo si para cada $x \in X$ y $r > 0$, existen $s_1, s_2 > 0$ tales que $B_{d_2}(x, s_2) \subset B_{d_1}(x, r)$ y $B_{d_1}(x, s_1) \subset B_{d_2}(x, r)$.*

Lema 2.18. *Si (X, d_1) y (X, d_2) son métricamente equivalentes, también son topológicamente equivalentes.*

Observación 2.6. El recíproco no es cierto: sobre $\mathbb{N}$, las métricas discreta y usual son topológicamente equivalentes (ambas inducen la topología discreta), pero no son métricamente equivalentes.

Observación 2.7. Cualquier propiedad enunciada para espacios métricos en términos de conjuntos abiertos puede reformularse también para espacios topológicos: en este curso se trata precisamente de dar un repaso de los conceptos topológicos más importantes restringiéndonos al caso particular de los espacios metrizables.

2.3.3. Conjuntos cerrados

Definición 2.10. Dados (X, d) y $A \subset X$, $x \in X$ es un *punto de acumulación* de A (o *punto límite*), si para cada $r > 0$ es $(B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definición 2.11. Sean (X, d) y $A \subset X$. El *derivado* de A, A', es el conjunto de los puntos de acumulación de A. Si $x \in A - A'$, se dice que x es un *punto aislado*.

Definición 2.12. Sean (X, d) y $A \subset X$. A se llama *cerrado* si $A' \subset A$.

Ejemplos 2.6. Algunos ejemplos de puntos de acumulación son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $(0, \infty)' = [0, \infty)$, $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\}$, $\mathbb{N}' = \emptyset$ y $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$;

(ii) en (X, d_{dis}), para cada $A \subset X$ es $A' = \emptyset$.

Lema 2.19. *Sean (X, d) y $A \subset X$. Si $x \in A'$, entonces para cada $r > 0$, la intersección $(B(x, r) - \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos.*

Demostración: Supongamos que para $r > 0$ es $(B(x, r) - \{x\}) \cap A = \{x_1, \dots, x_n\}$. Si $r_0 = \min\{d(x, x_k) : 1 \leq k \leq n\}$, entonces $(B(x, r_0) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, contra la hipótesis. ∎

Corolario 2.20. *En* (X, d)*, si* $A \subset X$ *es finito, entonces es cerrado.*

Demostración: En este caso, es claramente $A' = \emptyset$. ∎

Teorema 2.21. *En* (X, d)*,* A *es cerrado si y sólo si* $X - A$ *es abierto.*

Demostración: Si A es cerrado, sea $x \in X - A$. Como $A' \subset A$ y $x \notin A$, es $x \notin A'$. Luego, existe $r_x > 0$ tal que $(B(x, r_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, es decir, $B(x, r_x) - \{x\} \subset X - A$, y por lo tanto $X - A$ es abierto. Recíprocamente, si $X - A$ es abierto y $x \in A'$, supongamos que $x \notin A$. Existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset X - A$, es decir, $(B(x, r_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, contra la hipótesis. ∎

De los teoremas 2.11 y 2.21, se deduce:

Teorema 2.22. *En* (X, d)*,* X *y* $\emptyset$ *son conjuntos cerrados.*

Teorema 2.23. *En* (X, d)*, para cada* $x \in X$ *y* $r > 0$*,* $\overline{B}(x, r)$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración: Basta con probar que $X - \overline{B}(x, r)$ es abierto: sea $y \in X - \overline{B}(x, r)$, entonces $d(x, y) > r$. Para $r_1 = d(x, y) - r$, es $B(y, r_1) \subset X - \overline{B}(x, r)$. ∎

Ejemplos 2.7. Algunos ejemplos de conjuntos cerrados son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, los puntos y los intervalos del tipo $[a, b]$ son cerrados;

(ii) en (X, d_{dis}), todo $A \subset X$ es cerrado.

Usando el teorema 2.21, se deducen las propiedades duales del teorema 2.13:

Teorema 2.24. *En* (X, d)*, sea* $\{A_i\}_{i \in I}$ *una familia de conjuntos cerrados. Entonces*

(i) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ *es cerrado;*

(ii) si I *es finito, entonces* $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ *es cerrado.*

Observación 2.8. En 2.24 (ii), el conjunto de índices debe de ser finito: en efecto, en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, si se toma $I = \mathbb{N}$ y la familia de cerrados $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, entonces $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 1]$, que no es cerrado.

Corolario 2.25. *En* (X, d)*, para cada* $x \in X$ *y* $r > 0$*,* $S(x, r)$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración: Es una consecuencia de la igualdad $S(x, r) = \overline{B}(x, r) - B(x, r)$. ∎

2.4. Clausura, interior y frontera de un conjunto

2.4.1. Clausura de un conjunto

Definición 2.13. En (X, d), si $A \subset X$, la *clausura* de A es el conjunto $\overline{A} = A \cup A'$. Si $x \in \overline{A}$, se dice que es un *punto adherente* de A.

Teorema 2.26. *En (X, d), $A \subset X$ es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.*

Observación 2.9. En particular, $\overline{X} = X$ y $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Teorema 2.27. *En (X, d), $x \in \overline{A}$ si y sólo si para cada $r > 0$ es $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración: Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, la condición se cumple trivialmente. En caso contrario, debe ser $x \in A'$ y entonces $(B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, y se concluye el resultado. Recíprocamente, si para cada $r > 0$ es $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, pueden suceder dos cosas:

(i) si $x \in A$, es $x \in \overline{A}$;

(ii) si $x \notin A$, es $(B(x, r) - \{x\}) \cap A = B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ para cada $r > 0$, con lo que $x \in A' \subset \overline{A}$. ∎

Teorema 2.28. *En (X, d), si $A, B \subset X$ se verifica:*

(i) si $A \subset B$, es $\overline{A} \subset \overline{B}$, es decir, la clausura preserva las inclusiones;

(ii) $\overline{A}$ es cerrado.

Demostración: Veamos (ii), y para ello basta con ver que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Sea $x \in \overline{\overline{A}}$, es decir, para cada $r > 0$ es $B(x, r) \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Sea $x_r \in B(x, r) \cap \overline{A}$ y $s_r = r - d(x, x_r) > 0$. Como $x_r \in \overline{A}$ es $B(x_r, s_r) \cap A \neq \emptyset$. Claramente, es $B(x_r, s_r) \subset B(x, r)$, con lo que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, y se deduce que $x \in \overline{A}$. ∎

Teorema 2.29. ***(Caracterización de la clausura)*** *En (X, d), se cumple:*

(i) si F es cerrado y $A \subset F$, es $\overline{A} \subset F$;

(ii) $\overline{A} = \bigcap\{F$ cerrado: $A \subset F\}$, es decir, $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

Demostración: (i) Si $A \subset F$, por el teorema 2.28 (i), es $\overline{A} \subset \overline{F}$, y como F es cerrado, se deduce que $\overline{A} \subset F$.

(ii) Si F es cerrado y $A \subset F$, es $\overline{A} \subset F$, luego $\overline{A} \subset \bigcap\{F$ cerrado: $A \subset F\}$. Además, $\overline{A}$ es cerrado y contiene a A, luego $\overline{A} \supset \bigcap\{F$ cerrado: $A \subset F\}$. ∎

Teorema 2.30. *En* (X, d)*, si* $A, B \subset X$ *se verifica:*

(i) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$*;*

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$*.*

Demostración: (i) Como $A, B \subset A \cup B$, por el teorema 2.28 (i) es $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por otro lado, $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (que es cerrado) y $\overline{A \cup B}$ es el menor cerrado que contiene a $A \cup B$, luego $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

(ii) Como $A \cap B \subset A, B$, por el teorema 2.28 (i) es $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}, \overline{B}$. ∎

Observación 2.10. En 2.30 (ii), la igualdad no es cierta en general: en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$, si $A = (0, 1)$ y $B = (1, 2)$, es $\overline{A \cap B} = \emptyset$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Ejemplos 2.8. Algunos ejemplos de clausuras son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$;

(ii) en (X, d_{dis}), para todo $A \subset X$ es $\overline{A} = A$.

2.4.2. Interior de un conjunto

Definición 2.14. En (X, d), si $A \subset X$, $x \in A$, se llama *punto interior* de A si existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. El conjunto de los puntos interiores de A se llama *interior* de A y se denota por $\overset{\circ}{A}$. Es claro que $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Teorema 2.31. *En* (X, d)*, si* $A \subset X$*, se cumple:* $X - \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X - A}}$ *y* $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - A}$*.*

Demostración: Si $x \notin \overline{A}$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$, es decir, $B(x, r) \subset X - A$, con lo que $x \in \overset{\circ}{\overbrace{X - A}}$. Por otro lado, si $x \notin \overset{\circ}{A}$, para cada $r > 0$ es $B(x, r) \not\subset A$, es decir, $B(x, r) \cap (X - A) \neq \emptyset$, luego $x \in \overline{X - A}$. ∎

Teorema 2.32. *En* (X, d)*,* $A \subset X$ *es abierto si y sólo si* $\overset{\circ}{A} = A$*.*

Demostración: A es abierto si y sólo si $X - A$ es cerrado, es decir, $X - A = \overline{X - A}$, equivalentemente $\overset{\circ}{A} = A$, por 2.31 (ii). ∎

Observación 2.11. En particular, $\overset{\circ}{X} = X$ y $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.

Usando la dualidad con la clausura dada por el teorema 2.31 y el teorema 2.28, se demuestra fácilmente:

Teorema 2.33. *En (X,d), si $A,B \subset X$ se verifica:*

(i) si $A \subset B$, es $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;

(ii) $\overset{\circ}{A}$ es abierto.

Teorema 2.34. ***(Caracterización del interior)*** *En (X,d) se cumple:*

(i) si U es abierto y $U \subset A$, es $U \subset \overset{\circ}{A}$;

(ii) $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{U$ abierto: $U \subset A\}$, es decir, $\overset{\circ}{A}$ es el mayor abierto contenido en A.

Demostración: (i) Si U es abierto y está contenido en A, por el teorema 2.33 (i) es $\overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{A}$, y $U = \overset{\circ}{U}$ por ser abierto.

(ii) Como todo abierto contenido en A está también contenido en su interior, se verifica que $\overset{\circ}{A} \supset \bigcup\{U$ abierto: $U \subset A\}$. Y como $\overset{\circ}{A}$ es abierto contenido en A, es uno de los que participan en la unión, por lo que $\overset{\circ}{A} \subset \bigcup\{U$ abierto: $U \subset A\}$. ∎

Usando la dualidad con la clausura dada por el teorema 2.31 y las propiedades del teorema 2.30, se deduce que:

Teorema 2.35. *En (X,d), si $A,B \subset X$ se verifica:*

(i) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$;

(ii) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

Observación 2.12. En 2.35 (ii), la igualdad no es cierta en general: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, si $A = [0,1]$ y $B = [1,2]$, es $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = (0,2)$ y $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (0,2) - \{1\}$.

2.4.3. Frontera de un conjunto

Definición 2.15. En (X,d), si $A \subset X$, $x \in X$ se llama *punto frontera* de A si para cada $r > 0$ es $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \neq B(x,r) \cap (X - A)$. El conjunto de los puntos frontera de A se llama *frontera* de A y se denota por $\mathrm{fr}(A)$.

Ejemplos 2.9. Algunos ejemplos de fronteras son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $\mathrm{fr}((a,b]) = \{a,b\}$, $\mathrm{fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$;

(ii) en (X, d_{dis}), para todo $A \subset X$ es $\mathrm{fr}(A) = \emptyset$.

Teorema 2.36. *En (X,d), para $A \subset X$ es $\mathrm{fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = \overline{A} - \mathring{A}$.*

Corolario 2.37. *En (X,d), si $A \subset X$, se cumple:*

(i) $\mathrm{fr}(A)$ es un conjunto cerrado;

(ii) $\mathrm{fr}(A) = \mathrm{fr}(X - A)$;

(iii) $\mathrm{fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{fr}(A)$ y $\mathrm{fr}(\mathring{A}) \subset \mathrm{fr}(A)$;

(iv) $\mathrm{fr}(X) = \mathrm{fr}(\emptyset) = \emptyset$.

Demostración: (iii) $\mathrm{fr}(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} \cap \overline{X - \overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{X - \overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{\overbrace{X - A}^{\circ}} \subset \overline{A} \cap \overline{X - A} = \mathrm{fr}(A)$. Del mismo modo, $\mathrm{fr}(\mathring{A}) = \overline{\mathring{A}} \cap \overline{X - \mathring{A}} = \overline{\mathring{A}} \cap \overline{\overline{X - A}} = \overline{\mathring{A}} \cap \overline{X - A} \subset \overline{A} \cap \overline{X - A} = \mathrm{fr}(A)$. ∎

Observación 2.13. En (iii) no se da en general la igualdad: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, es $\mathrm{fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, pero $\mathrm{fr}(\mathring{\mathbb{Q}}) = \mathrm{fr}(\emptyset) = \emptyset = \mathrm{fr}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{fr}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.38. *En (X,d), si $A \subset X$ se verifica:*

(i) A es abierto si y sólo si $A \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$;

(ii) A es cerrado si y sólo si $\mathrm{fr}(A) \subset A$.

Demostración: (i) Si A es abierto, es $A = \mathring{A}$ y $A \cap \mathrm{fr}(A) = A \cap (\overline{A} - A) = \emptyset$. Recíprocamente, si $A \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$, es $A \cap \overline{X - A} = \emptyset$, con lo que $A \subset X - \overline{X - A} = \mathring{A}$ y se deduce que A es abierto.

(ii) Se deduce usando (i) y por dualidad. ∎

El siguiente teorema nos permite dar una clara interpretación del interior, la clausura y la frontera de un conjunto:

Teorema 2.39. *En (X,d), si $A \subset X$ se verifica:*

(i) $\mathring{A} = A - \mathrm{fr}(A) = \overline{A} - \mathrm{fr}(A)$;

(ii) $\overline{A} = A \cup \mathrm{fr}(A) = \mathring{A} \cup \mathrm{fr}(A)$.

2.5. Subespacios de un espacio métrico

Dado (X, d) y $A \subset X$ no vacío, la restricción d a $A \times A$, $d_A \colon A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$, es una distancia sobre A, que se denota por d_A. Se dice también que el par (A, d_A) es un *subespacio* de (X, d).

Es importante distinguir entre los espacios métricos (X, d) y (A, d_A), intentando dar una relación entre los abiertos de ambos espacios:

Lema 2.40. *En (X, d), si $A \subset X$ y $x \in A$, para $r > 0$ la bola en el subespacio es $B_A(x, r) = B(x, r) \cap A$.*

Observación 2.14. En (X, d), con las notaciones obvias, si $A \subset X$ y $x \in A$, para $r > 0$ es $\overline{B_A}(x, r) = \overline{B}(x, r) \cap A$ y $S_A(x, r) = S(x, r) \cap A$.

Teorema 2.41. *En (X, d), sean $B \subset A \subset X$, entonces:*

(i) B es abierto en (A, d_A) si y sólo si existe U abierto en (X, d) tal que $B = U \cap A$;

(ii) B es cerrado en (A, d_A) si y sólo si existe F cerrado en (X, d) tal que $B = F \cap A$.

Observación 2.15. Puede suceder que $B \subset A \subset X$ sea abierto (respectivamente, cerrado) en (A, d_A) y no lo sea en (X, d). Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, para $A = [0, 1)$:

(i) $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en (A, d_A), pero no lo es en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$;

(ii) $[\frac{1}{2}, 1)$ es cerrado en (A, d_A), pero no lo es en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$.

Pero se cumple la propiedad:

Teorema 2.42. *Sea (X, d) y $A \subset X$, entonces:*

(i) todo subconjunto de A que es abierto en (A, d_A) es también abierto en (X, d) si y sólo si A es abierto en (X, d);

(ii) todo subconjunto de A que es cerrado en (A, d_A) es también cerrado en (X, d) si y sólo si A es cerrado en (X, d).

2.6. Diámetro de un conjunto. Conjuntos acotados

Definición 2.16. Sean un espacio métrico (X, d) y $A \subset X$. El *diámetro* de A es el número $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ si este supremo existe y es infinito en caso contrario. Por definición, $\delta(\emptyset) = 0$.

Observación 2.16. $\delta(A)$ está definido si la familia de números reales $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ está acotada superiormente.

Definición 2.17. En (X, d), un conjunto $A \subset X$ se llama *acotado* si $\delta(A) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos 2.10. Algunos ejemplos de conjuntos acotados son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, A está acotado si lo está superior e inferiormente;

(ii) en (X, d_{dis}), todo $A \subset X$ está acotado, ya que si A tiene más de un punto, es $\delta(A) = 1$.

Observación 2.17. Si $\delta(A) = r$, no tienen porque existir dos puntos $x, y \in A$ tales que $d(x, y) = r$. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $\delta((0, 1)) = 1$, pero los puntos en $(0, 1)$ distan entre ellos menos que 1.

Teorema 2.43. *En (X, d), si $A, B \subset X$ son no vacíos, se cumple:*

(i) si $A \subset B$, es $\delta(A) \leq \delta(B)$;

(ii) si $\delta(A) = 0$, entonces A se reduce a un punto;

(iii) $\delta(B(x, r)) \leq \delta(\overline{B}(x, r)) \leq 2r$.

Demostración: (i) Si A o B no están acotados, es inmediato. Supongamos entonces que ambos conjuntos están acotados, entonces $\{d(x, y) : x, y \in A\} \subset \{d(x, y) : x, y \in B\}$, y se deduce la propiedad. Observar que aunque la inclusión sea propia, puede darse la igualdad: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $\delta((0, 1)) = 1 = \delta([0, 1])$.

(iii) Si $a, b \in B(x, r)$, es $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < 2r$. Así, $2r$ es cota superior de la familia $\{d(a, b) : a, b \in B(x, r)\}$, y por lo tanto, $\delta(B(x, r)) \leq 2r$. Para la bola cerrada, se hace de manera similar. La igualdad no se verifica en general: para $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{dis}})$, es $\delta(B(x, 1)) = 0 < 2$ y $\delta(\overline{B}(x, 50)) = 1 < 100$. Sin embargo, para $(\mathbb{R}^n, d)$ donde $d = d_{\mathrm{máx}}, d_{\mathrm{sum}}$ o d_{u}, es $\delta(B(x, r)) = \delta(\overline{B}(x, r)) = 2r$. ∎

Lema 2.44. *En (X, d), si $A, B \subset X$ están acotados y $a \in A$, $b \in B$, entonces para cada $x, y \in A \cup B$ es $d(x, y) \leq d(a, b) + \delta(A) + \delta(B)$.*

Demostración: Hay tres posibles casos:

(i) si $x, y \in A$, es $d(x, y) \leq \delta(A) \leq d(a, b) + \delta(A) + \delta(B)$;

(ii) si $x, y \in B$, es $d(x, y) \leq \delta(B) \leq d(a, b) + \delta(A) + \delta(B)$;

(iii) si $x \in A$ e $y \in B$, es $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B)$. ∎

Teorema 2.45. *En (X, d), la unión de cualquier familia finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado.*

Demostración: Sean A y B conjuntos acotados. Por el lema 2.44, fijados $a \in A$ y $b \in B$, el número $d(a,b) + \delta(A) + \delta(B)$ es cota superior de la familia $\{d(x,y) : x, y \in A \cup B\}$, por lo que existe $\delta(A \cup B)$. ∎

Observación 2.18. En el teorema 2.45, la unión debe ser finita: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ es un conjunto acotado, pero $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ no lo es.

Teorema 2.46. *En (X,d), un conjunto no vacío $A \subset X$ es acotado si y sólo si está contenido en alguna bola cerrada.*

Demostración: Si existen $x \in X$ y $r > 0$ tales que $A \subset \overline{B}(x,r)$, A está acotado por estarlo $\overline{B}(x,r)$. Recíprocamente, sea A acotado y $x \in X$ un punto cualquiera. Si $a \in A$, sea $r = d(x,a) + \delta(A)$. Entonces, $A \subset \overline{B}(x,r)$. ∎

2.7. Conjuntos densos y espacios separables

Definición 2.18. En (X,d), un conjunto $A \subset X$ se llama *denso* en X si $\overline{A} = X$.

Ejemplos 2.11. Algunos ejemplos de conjuntos densos son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son densos;

(ii) en (X, d_{dis}), A es denso si y sólo si $A = X$.

Teorema 2.47. *En (X,d), $A \subset X$ es denso si y sólo el único cerrado que contiene a A es X.*

Teorema 2.48. *En (X,d), $A \subset X$ es denso si y sólo A corta a cualquier abierto no vacío.*

Proposición 2.49. *En (X,d), para cada $A \subset X$ los conjuntos $A \cup (X - \overline{A})$ y $(X - A) \cup \overset{\circ}{A}$ son densos.*

Definición 2.19. (X,d) se llama *separable* si existe un subconjunto denso y contable. $A \subset X$ se llama *separable* si (A, d_A) lo es.

Ejemplos 2.12. Algunos ejemplos de conjuntos separables son:

(i) $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ es separable, ya que $\mathbb{Q}$ es denso;

(ii) (X, d_{dis}) es separable si y sólo si X es contable.

2.8. Ejercicios

♣1.- Si ρ es una pseudométrica sobre X y $x, y \in X$, se define una relación binaria sobre X por: $x \sim y$ si y sólo si $\rho(x, y) = 0$. Se pide:

(i) probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en X;

(ii) dados $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$, tales que $x_1 \sim x_2$ e $y_1 \sim y_2$, probar que $\rho(x_1, y_1) = \rho(x_2, y_2)$;

(iii) sean $Y = X/\sim$, $[x], [y] \in Y$. Dados $a \in [x]$ y $b \in [y]$, se define $d([x], [y]) = \rho(a, b)$. Probar que d es una métrica en Y, que se llama *asociada a* ρ.

2.- Sean $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ y $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = |x_k - y_k|$, donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$. ¿Es d una métrica en $\mathbb{R}^n$?

3.- Decidir si las siguientes funciones son métricas sobre $\mathbb{R}$: $d_1(x, y) = |x^2 - y^2|$, $d_2(x, y) = |x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}|$, $d_3(x, y) = e^{|x-y|}$ y $d_4(x, y) = e^{\frac{1}{|x-y|}}$.

4.- Dadas $d_1, \cdots, d_n$ métricas sobre X, se pide:

(i) probar que $d(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x, y)$ es una métrica sobre X;

(ii) demostrar que $d(x, y) = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq n} d_i(x, y)$ es una métrica sobre X;

(iii) ¿define $d(x, y) = \displaystyle\min_{1 \leq i \leq n} d_i(x, y)$ una métrica sobre X?

5.- Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos y $f\colon X \longrightarrow Y$. Se pide:

(i) sea $D\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $D(x, y) = \rho(f(x), f(y))$; ¿cuándo es D una métrica en X?

(ii) si $(X, d) = (Y, \rho) = (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ y $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente; ¿es D métrica?

(iii) sea $f(x) = x^3$ como en (ii); ¿es D equivalente a d_{u}?

6.- Sea (X, d) un espacio métrico. Para $i = 1, 2$, sean las aplicaciones $d_i\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ y $d_2(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d_1 y d_2 son métricas acotadas sobre X.

7.- Sea $\mathcal{S}_C$ el conjunto de las sucesiones convergentes de números reales. Dadas las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_C$, se define $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n|$; ¿es d métrica sobre $\mathcal{S}_C$?

8.- Sea $\mathcal{S}_A$ el conjunto de las sucesiones acotadas de números reales (es decir, $\{x_n\} \in \mathcal{S}_A$ si y sólo si existe $K > 0$ tal que $|x_n| \leq K$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Probar que la igualdad $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ define una métrica en $\mathcal{S}_A$.

9.- Sean $\mathbb{R} \supset A \neq \emptyset$ y $\mathcal{B}(A) = \{f\colon A \longrightarrow \mathbb{R} : \exists K > 0 : \forall x \in A, |f(x)| \leq K\}$ el conjunto de las funciones acotadas sobre A. Probar que la función $d\colon \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$, es una métrica en $\mathcal{B}(A)$.

♣10.- Sea $X = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$. Probar que las siguientes aplicaciones son distancias en X: $d_1(x,y) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ y $d_2(x,y) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.
Si $Y = \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ integrables en el sentido de Riemann}\}$, ¿es d_1 una distancia sobre Y?

11.- Sean la recta ampliada $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ y la aplicación $f\colon \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1,1]$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ si $x \in \mathbb{R}$, $f(-\infty) = -1$ y $f(\infty) = 1$. Probar que la aplicación $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre $\overline{\mathbb{R}}$.

12.- Probar que las siguientes aplicaciones son métricas. En los espacios métricos obtenidos, caracterizar las bolas, el interior, el derivado, la clausura y la frontera:

(i) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } \ x_1 = y_1 \\ |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| & \text{si } \ x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

(ii) $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } \ sg(x) = sg(y) \\ |x + y| + 1 & \text{si } \ sg(x) \neq sg(y) \end{cases}$$

(donde 0 se considera con signo positivo),

(iii) $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si } \quad x \neq y, x > 0, y > 0 \\ |x - y| & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(iv) $d\colon [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde para $x, y \in [0,\infty)$,

$$d(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si } \ x \neq y \\ 0 & \text{si } \ x = y \end{cases}$$

(v) $d\colon [0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ donde para $x,y\in[0,1]$,

$$d(x,y)=\begin{cases} 2-x-y & \text{si} \quad x\neq y \\ 0 & \text{si} \quad x=y \end{cases}$$

(vi) $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donde para $x,y\in\mathbb{R}$ y $a\in\mathbb{R}$,

$$d(x,y)=\begin{cases} |x+a|+|y+a| & \text{si} \quad x\neq y \\ 0 & \text{si} \quad x=y \end{cases}$$

(vii) $d\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ donde para $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$d(x,y)=\begin{cases} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} & \text{si} \quad x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2 \\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2} & \text{si} \quad x_1^2+x_2^2\neq y_1^2+y_2^2 \end{cases}$$

(viii) $d\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ donde para $x,y\in\mathbb{N}$,

$$d(x,y)=\begin{cases} 1+\frac{1}{x+y} & \text{si} \quad x\neq y \\ 0 & \text{si} \quad x=y \end{cases}$$

(ix) $d\colon [0,\infty)\times[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ donde para $x,y\in[0,\infty)$,

$$d(x,y)=\begin{cases} \text{máx}\{x,y\} & \text{si} \quad x\neq y \\ 0 & \text{si} \quad x=y \end{cases}$$

(x) $d\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ donde para $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$d(x,y)=\begin{cases} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} & \text{si} \quad x_1y_2=y_1x_2 \\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2} & \text{si} \quad x_1y_2\neq y_1x_2 \end{cases}$$

13.- Probar que hay exactamente dos isometrías de $(\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$ en $(\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$, que dejan fijo un punto dado $a\in\mathbb{R}$.

14.- Probar que estas funciones son isometrías:

(i) si $a\in\mathbb{R}^n$, la *traslación de vector* a, $t_a\colon (\mathbb{R}^n,d_{\mathrm{u}})\longrightarrow(\mathbb{R}^n,d_{\mathrm{u}})$, dada por $t_a(x)=a+x$;

(ii) si $\varphi\in\mathbb{R}$, la *rotación elemental de ángulo* φ, $r_\varphi\colon (\mathbb{R}^2,d_{\mathrm{u}})\longrightarrow(\mathbb{R}^2,d_{\mathrm{u}})$, dada por

$$r_\varphi(x_1,x_2)=(x_1\cos(\varphi)-x_2\sin(\varphi),x_1\sin(\varphi)+x_2\cos(\varphi));$$

(iii) la *aplicación antipodal*, $a\colon (\mathbb{R}^n,d_{\mathrm{u}})\longrightarrow(\mathbb{R}^n,d_{\mathrm{u}})$, dada por $a(x)=-x$.

15.- En el espacio métrico (X,d), para $a \in X$ y $r > 0$, probar las propiedades siguientes:

(i) $\overline{B}(a,r) = \displaystyle\bigcap_{s>r} B(a,s) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(a, r+\frac{1}{n}\right)$;

(ii) $\{a\} = \displaystyle\bigcap_{s>0} B(a,s) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(a, \frac{1}{n}\right)$;

(iii) $B(a,r) = \displaystyle\bigcup_{s<r} \overline{B}(a,s) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}\left(a, r-\frac{1}{n}\right)$;

(iv) $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$; (v) $B(a,r) \subset \overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ}$;

(vi) $\mathrm{fr}(B(a,r)) \cup \mathrm{fr}(\overline{B}(a,r)) \subset S(a,r)$.

16.- Un espacio métrico (X,d) se llama *discreto*, si todo átomo (subconjunto formado por un único punto) es abierto. Probar:

(i) (X,d) es discreto si y sólo si todos los subconjuntos de X son abiertos;

(ii) (X,d) es discreto si y sólo si todos los subconjuntos de X son cerrados;

(iii) (X,d_{dis}) es discreto. El recíproco no es cierto, es decir, existen espacios métricos discretos (X,d) para los cuales d no es la métrica discreta;

(iv) si la intersección arbitraria de abiertos es abierta, entonces (X,d) es discreto;

(v) si X es un conjunto finito, entonces (X,d) es discreto;

(vi) si $Y \subset X$, entonces (Y,d_Y) es discreto si y sólo si $Y \cap Y' = \emptyset$;

(vii) dar un ejemplo de dos subconjuntos discretos de la recta real, cuya unión no sea discreta.

♣**17.-** Sean (X,d), $\emptyset \neq A \subset X$, $r > 0$ y $V(A,r) = \displaystyle\bigcup_{x\in A} B(x,r)$. Se pide probar:

(i) $V(A\cap B,r) \subset V(A,r) \cap V(B,r)$;

(ii) si $s < r$, $V(A,s) \subset V(A,r)$;

(iii) $V(A\cup B,r) = V(A,r) \cup V(B,r)$;

(iv) $d(a,A) = \mathrm{ínf}\{r > 0 : a \in V(A,r)\}$;

(v) $\overline{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V\left(A, \frac{1}{n}\right)$. Concluir que $d(a, A) = 0$ si y sólo si $a \in \overline{A}$.

♣**18.-** Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia sobre X verificando:

a) para cada $x \in X$, el conjunto $C_x = \{y \in X : x\mathfrak{R}y\}$ es cerrado en X,

b) si $[x] \neq [y] \in X/\mathfrak{R}$, todo representante $a \in [x]$, verifica que $d(a, C_y) = d(C_x, C_y)$.

Para $[x], [y] \in X/\mathfrak{R}$, se define $\delta([x], [y]) = d(C_x, C_y)$. Se pide:

(i) probar que δ es un distancia en $X/\mathfrak{R}$. Se dice que $(X/\mathfrak{R}, \delta)$ es el *espacio métrico cociente de* (X, d) *por* $\mathfrak{R}$;

(ii) sea $p\colon X \longrightarrow X/\mathfrak{R}$ la proyección canónica. Probar que para cada $x, y \in X$, se cumple la desigualdad $\delta(p(x), p(y)) \leq d(x, y)$. Hallar $p(B(a, r))$, si $a \in X$;

(iii) si A es abierto en (X, d), probar que $p(A)$ es abierto en $(X/\mathfrak{R}, \delta)$. Demostrar que $B \subset X/\mathfrak{R}$ es abierto en $(X/\mathfrak{R}, \delta)$ si y sólo si $p^{-1}(B)$ es abierto en (X, d);

(iv) probar que $B \subset X/\mathfrak{R}$ es cerrado en $(X/\mathfrak{R}, \delta)$ si y sólo si $p^{-1}(B)$ es cerrado en (X, d);

(v) sea $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ y la relación sobre $\mathbb{R}$ dada por ($x\mathfrak{R}y$ si y sólo si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$):

1) demostrar que se cumplen a) y b);

2) probar que existe un cerrado A en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, tal que $p(A)$ no es cerrado en $(\mathbb{R}/\mathfrak{R}, \delta)$;

3) sea la aplicación $f\colon \mathbb{R}/\mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ definida por $f([x]) = (\cos(x), \sin(x))$. Probar que f está bien definida y es biyectiva; ¿cuál es la distancia δ_0 obtenida sobre $\mathbb{S}^1$ al transportar δ por f? Probar que δ_0 es equivalente a la distancia inducida por la distancia euclídea de $\mathbb{R}^2$.

19.- Sea el espacio métrico (X, d), $a \in X$ y $\emptyset \neq A \subset X$. Si $d(a, A) = 2$, probar que existe $r > 0$ tal que $d(x, A) > 1$, si $x \in B(a, r)$.

20.- Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$. Probar:

(i) si A es abierto, para cada $B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $A \cap \overline{B} = \emptyset$;

(ii) si A es abierto, probar que para cada $B \subset X$, es $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ y $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$;

(iii) probar que A es abierto si y sólo si para cada $B \subset X$, es $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

♣**21.-** Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $A \subset X$ definimos $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ y $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Se pide:

(i) si A es abierto (respectivamente, cerrado), probar que $A \subset \alpha(A)$ (respectivamente, $\beta(A) \subset A$);

(ii) probar que para cada $A \subset X$, es $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ y $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$;

(iii) encontrar conjuntos A en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ tales que sean distintos los conjuntos A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$, $\alpha(\overset{\circ}{A})$ y $\beta(\overline{A})$;

(iv) si A, B son abiertos disjuntos, entonces $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$ son también disjuntos.

22.- Sea (X, d) un espacio métrico. Dados A, B y $\{A_i\}_{i \in I}$ subconjuntos de X, probar:

(i) $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{i \in I} A_i}} \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$ y $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{i \in I} A_i}}$;

(ii) si $A \subset B$ entonces $A' \subset B'$. Además, $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$, $(A \cup B)' = A' \cup B'$, $(A')' \subset A'$ (es decir, A' es cerrado), $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' \subset \bigcap_{i \in I} A_i'$ y $\bigcup_{i \in I} A_i' \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)'$;

(iii) $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$, $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$, $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$ y $(\overline{A})' = A'$.

♣**23.-** Sea (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos en X tales que existe un $\delta > 0$ tal que si $i \neq j$, entonces $d(A_i, A_j) \geq \delta$. Probar que $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$.

♣**24.-** Sea (X, d) un espacio métrico. Una familia $\{C_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X se llama *localmente finita* si para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \cap C_i \neq \emptyset$ sólo para un número finito de $i \in I$. Se pide:

(i) probar que $\{B(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ no es localmente finita en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, pero si lo es la familia de sus complementarios;

(ii) dar una familia de conjuntos abiertos localmente finita en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ cuya unión sea $\mathbb{R}$;

(iii) si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una familia localmente finita, probar que cada punto de X pertenece a lo más a un número finito de conjuntos C_i (es decir, la familia es *puntualmente finita*). Probar que no toda familia puntualmente finita es localmente finita;

(iv) si la familia $\{C_i\}_{i\in I}$ es localmente finita, probar que $\overline{\bigcup_{i\in I} C_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{C_i}$. Concluir de aquí, que la reunión localmente finita de cerrados es cerrada.

25.- En (X, d), probar:

(i) si $A \subset X$, $\overline{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{x\in A} B(x, \frac{1}{n})$;

(ii) todo cerrado puede expresarse como una intersección numerable de abiertos;

(iii) todo abierto puede escribirse como una reunión numerable de cerrados.

26.- Dado un espacio métrico (X, d) y $A, B \subset X$ no vacíos, probar:

(i) $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$;

(ii) $\overline{A} = \overline{B}$ si y sólo si para cada $x \in X$, es $d(x, A) = d(x, B)$.

27.- Sea (X, d) un espacio métrico. Probar:

(i) si A no posee puntos aislados, entonces $\overline{A}$ tampoco los posee;

(ii) si X no posee puntos aislados, tampoco tendrán puntos aislados los abiertos de X.

♣**28.-** Sea X un conjunto numerable. Probar que puede definirse sobre él una métrica, tal que ninguno de sus puntos sea aislado.

29.- Sea (X, d) un espacio métrico, donde X posee más de un punto; ¿pueden ser $\emptyset$ y X los únicos abiertos?

30.- Sean los espacios métricos $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$ y consideremos su producto cartesiano $(X = X_1 \times \cdots \times X_n, d_{\text{máx}})$. Probar:

(i) $\mathring{A}_1 \times \cdots \times \mathring{A}_n = \overbrace{A_1 \times \cdots \times A_n}^{\circ}$ y $\overline{A_1 \times \cdots \times A_n} = \overline{A_1} \times \cdots \times \overline{A_n}$;

(ii) $A_1 \times \cdots \times A_n$ es abierto en $(X, d_{\text{máx}})$ si y sólo si A_i es abierto en (X_i, d_i) para cada $i \in I$ (análogamente para cerrados).

♣**31.-** Sea (X, d) un espacio métrico. Se pide probar las siguientes generalizaciones de la propiedad de Hausdorff (teorema 2.10):

(i) si $x \neq y \in X$, existen U y V abiertos disjuntos en X, tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$;

(ii) todo espacio métrico es *normal*: dados A y B conjuntos cerrados y disjuntos en X, existen abiertos U y V disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

32.- Sea (X, d) y Δ la diagonal en el espacio métrico producto $(X \times X, D)$ (D es cualquiera de las métricas producto definidas). Si el punto $x = (x_1, x_2) \notin \Delta$, probar que $D(x, \Delta) > 0$.

♣33.- Un espacio métrico (X, d) se llama *ultramétrico*, si para cada $x, y, z \in X$, se verifica la desigualdad $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$. Demostrar:

(i) si $d(x, z) \neq d(y, z)$, entonces $d(x, y) = \max\{d(x, z), d(z, y)\}$;

(ii) $B(a, r)$ y $\overline{B}(a, r)$ son abiertos y cerrados a la vez;

(iii) si $y \in B(x, r)$, entonces $B(x, r) = B(y, r)$; ¿se tiene un resultado análogo para las bolas cerradas?

(iv) si $B(x, r)$ y $B(y, s)$ se cortan, entonces una de estas bolas contiene a la otra (lo mismo para bolas cerradas);

(v) si $B(x, r)$ y $B(y, r)$ son distintas y están contenidas en $\overline{B}(z, r)$, su distancia es r;

(vi) (X, d_{dis}) es un espacio ultramétrico.

34.- Sea (X, d) un espacio métrico. Se pide:

(i) sea $\emptyset \neq A \subset X$. Si (X, d) es separable, probar que A es separable (es decir, el subespacio métrico (A, d_A) es separable);

(ii) si A es separable, probar que $\overline{A}$ es separable;

(iii) si $A_1, \cdots, A_n$ son separables, entonces $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ es separable.

35.- Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $A \subset X$ tal que para cada $a \in A$, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a, \varepsilon_a) \cap A$ es contable. Si (X, d) es separable, probar que A es contable.

36.- Sea (X, d) un espacio métrico separable y $\emptyset \neq A \subset X$. Se pide:

(i) probar que el conjunto de los puntos aislados de A es contable;

(ii) si $A' = \emptyset$, probar que A es contable;

(iii) si A es discreto en X, probar que A es contable.

♣37.- Se dice que (X,d) posee la *propiedad de intersección contable*, si dada cualquier familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados, tal que $\bigcap\limits_{i\in J} F_i \neq \emptyset$ para cada subconjunto contable J de I, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Probar que un espacio métrico (X,d) es separable si y sólo si posee la propiedad de intersección contable.

38.- Si (X,d) es separable, probar toda familia de abiertos dos a dos disjuntos es contable.

39.- Sea (X,d) un espacio métrico. Si $A,B\subset X$, A es abierto y B es denso en X, probar que $\overline{A} = \overline{A\cap B}$.

40.- Probar que la separabilidad en espacios métricos se conserva bajo equivalencias métricas y topológicas y bajo isometrías.

♣41.- Sea $X=\{f\colon [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}, f \text{ continua}\}$. Se consideran las distancias d_1 y d_2 definidas en el ejercicio 10. Con las notaciones obvias, se pide:

(i) sea $f(x)=2$ para cada $x\in[0,1]$. Calcular $B_{d_2}(f,1)$;

(ii) sean $r>0$ y $g\in X$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases} 4-\frac{4x}{r} & \text{si} \quad 0\leq x\leq \frac{r}{2} \\ 2 & \text{si} \quad \frac{r}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Probar que $g\in B_{d_1}(f,r)$, pero $g\notin B_{d_2}(f,1)$;

(iii) Deducir que d_1 y d_2 no son topológicamente equivalentes. Sin embargo, $\tau_{d_1}\subset\tau_{d_2}$.

42.- Dado (X,d), probar que X es una reunión contable de conjuntos acotados.

43.- Probar que dos bolas abiertas (respectivamente, cerradas) del mismo radio son isométricas en $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$.

44.- Sea (X,d) un espacio métrico y $\emptyset\neq A\subset X$. Se considera el subespacio métrico (A,d_A). Si $B\subset A$, probar:

(i) $\overline{B}^A=\overline{B}\cap A$, donde $\overline{B}^A$ denota la clausura de B en (A,d_A);

(ii) $\overset{\circ}{B}\subset\overset{\circ}{B}{}^A$ y $\overset{\circ}{B}{}^A=(X-\overline{A-B})\cap A$, donde $\overset{\circ}{B}{}^A$ denota el interior de B en (A,d_A);

(iii) si $B\subset A$ es cerrado en (A,d_A), probar que B es cerrado en (X,d) si y sólo si $\overline{B}\subset A$.

45.- Sea (X,d) un espacio métrico y $A,B \subset X$ tales que $X = A \cup B$. Sea $C \subset A \cap B$. Probar que C es abierto en (X,d) si y sólo si lo es en (A,d_A) y en (B,d_B).

46.- Sea (X,d) un espacio métrico y $A,B \subset X$ tales que $X = \overset{\circ}{A} \cup B = A \cup \overset{\circ}{B}$. Probar que para cada $C \subset X$, es $\overline{C} = \overline{C \cap A}^A \cup \overline{C \cap B}^B$.

47.- Sea (X,d) un espacio métrico y $A,B \subset X$, probar:

(i) si $\mathrm{fr}(A) \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$, entonces $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$;

(ii) si $\mathrm{fr}(A) \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$;

(iii) si $\mathrm{fr}(A) \cap \mathrm{fr}(B) = \emptyset$, entonces $\mathrm{fr}(A \cap B) = (\overline{A} \cap \mathrm{fr}(B)) \cup (\mathrm{fr}(A) \cap \overline{B})$;

(iv) $\mathrm{fr}(A \cup B) \subset \mathrm{fr}(A) \cup \mathrm{fr}(B)$;

(v) si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces $\mathrm{fr}(A \cup B) = \mathrm{fr}(A) \cup \mathrm{fr}(B)$;

(vi) $\mathrm{fr}(A) = \emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado a la vez;

(vii) si A y B son abiertos, entonces:

$$(A \cap \mathrm{fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{fr}(A)) \subset \mathrm{fr}(A \cap B) \subset (A \cap \mathrm{fr}(B)) \cup (\mathrm{fr}(A) \cap B) \cup (\mathrm{fr}(A) \cap \mathrm{fr}(B)).$$

48.- Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ abierto (respectivamente, cerrado). Probar:

(i) $\overset{\circ}{\overbrace{\mathrm{fr}(A)}} = \emptyset$; (ii) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{\overbrace{X - A}}$ es denso en X;

(iii) buscar un ejemplo en el que el conjunto de (ii) no sea denso;

(iv) probar que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

49.- Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $a \in X$, tales que $A \cap B(a,r) \neq \emptyset$ y $\delta(A) < r$. Probar que $A \subset B(a,2r)$.

♣50.- Sean (X,d) un espacio métrico acotado y $\Phi(X)$ la familia de los cerrados no vacíos de X. Dados $A,B \in \Phi(X)$, se define:

$$\rho(A,B) = \text{máx}\{\sup_{a \in A}\{d(a,B)\}, \sup_{b \in B}\{d(A,b)\}\}.$$

Probar que ρ define una métrica sobre $\Phi(X)$. $\rho(A,B)$ se conoce como la *distancia de Hausdorff* entre A y B. Probar que existe una isometría entre (X,d) y un subespacio cerrado de $(\Phi(X),\rho)$.

51.- Probar que la acotación en espacios métricos se conserva bajo isometrías y equivalencias métricas, pero no bajo equivalencias topológicas.

52.- Sea (X, d) y $A \subset X$. Probar:

(i) $\delta(A) = \delta(\overline{A})$, luego, A es acotado si y sólo si $\overline{A}$ lo es;

(ii) ¿puede decirse lo mismo de $\overset{\circ}{A}$ y A?

♣**53.-** Probar que todo cerrado de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$, se puede escribir como la frontera de algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

54.- Sea A un conjunto no vacío y acotado superiormente en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, se pide:

(i) probar que si $\sup(A) \notin A$, entonces $\sup(A) \in A'$;

(ii) si A es abierto, entonces $\sup(A) \notin A$.

55.- En el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, calcular el interior, el derivado, la clausura y la frontera de los siguientes conjuntos: $\{0 < x < 1 : x$ posee representación decimal con 0 en el primer dígito$\}$, $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$, $\{\frac{1}{x} : x \neq 0\}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$, $\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \cdots, \frac{1}{n}, n, \cdots\}$, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ (donde $\alpha \notin \mathbb{Q}$).

56.- Sea $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ y el conjunto $A = [0, 1) \cup (1, 3] \cup \{5\}$. Se pide:

(i) probar que $\{5\}$ es abierto y cerrado en (A, d_A);

(ii) lo mismo para $(1, 3]$; (iii) calcular $\overline{[0, 1)}^A$ y $\overbrace{[0, \frac{1}{2})^A}^{\circ}$;

(iv) probar que $\{5\}$ no es aislado en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, pero si lo es en (A, d_A).

57.- En $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$, calcular el interior, el derivado, la clausura y la frontera de los siguientes conjuntos: $\{(x_1, x_2) : x_1(x_1 - 1) = 0\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 > 0\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \geq 2\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1 < 0\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1 \leq 5, x_2 > 0\}$, $\{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, $\{(x_1, x_2) : x_2 = \lambda x_1\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

58.- Sea $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$ y $A = \{(x_1, x_2) : |x_1| < 1, |x_2| < 2\}$. Probar que para $(a_1, a_2) \in A$ y $r \geq 2\sqrt{5}$, se tiene que $B_A((a_1, a_2), r) = A$.

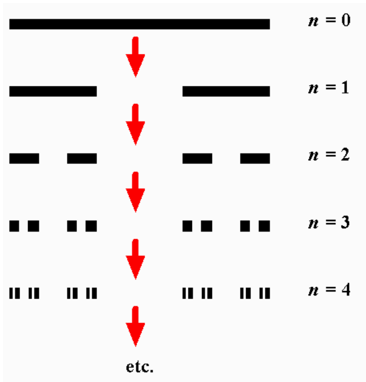
59.- Se pide calcular las siguientes distancias:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, si $A = \mathbb{N}$ y $B = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, calcular $d_{\mathrm{u}}(A, B)$;

(ii) en $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$, si $A = \{(x_1, x_2) : x_1x_2 = 1, x_1 > 0\}$ y $B = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0\}$, calcular $d_{\mathrm{u}}(A, B)$;

(iii) probar que tanto en (i) como en (ii), A y B son conjuntos cerrados y disjuntos.

♣**60.-** Sea $([0,1], d_{\mathrm{u}})$. Se divide $[0,1]$ en tres intervalos de la misma amplitud, se elimina el intervalo abierto central $\delta = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (que se llamará intervalo abierto de tipo 1) y se conservan los intervalos cerrados $\Delta_0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $\Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1]$, que se llamarán intervalos cerrados de tipo 1. Se divide cada intervalo cerrado de tipo 1 en tres intervalos de la misma amplitud. Se eliminan de nuevo los intervalos abiertos centrales (intervalos abiertos de tipo 2), $\delta_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $\delta_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ respectivamente, y se conservan los intervalos cerrados (de tipo 2) resultantes: $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $\Delta_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $\Delta_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$. Se continúa de este modo el proceso, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$, 2^n intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo n donde i_j es 0 o 1. Cada intervalo cerrado de tipo n se divide en tres partes de la misma amplitud, conservando dos intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n 0}$ y $\Delta_{i_1 \cdots i_n 1}$ (llamados intervalos cerrados de tipo $n+1$) y eliminando cada intervalo abierto $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo $n+1$ que queda entre ellos.



Sean C_n la reunión de los intervalos cerrados de tipo n y $\mathfrak{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. $\mathfrak{C}$ se llama *conjunto perfecto de Cantor* o *conjunto ternario de Cantor*. Se pide probar:

(i) C_n es cerrado en $[0,1]$ para cada n;

(ii) $\mathfrak{C}$ es un conjunto cerrado no vacío;

(iii) todo número $x \in [0,1]$, admite un desarrollo triádico $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, donde $a_n \in \{0,1,2\}$, y se representa del modo: $x = 0.a_1a_2 \cdots$. Si x admite un desarrollo triádico que no contiene la cifra 1, entonces este desarrollo es único. Probar que $x \in [0,1]$ pertenece a $\mathfrak{C}$ si y sólo si x admite un desarrollo triádico que no contiene a la cifra 1. Concluir que existe una biyección entre los conjuntos $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ y $\mathfrak{C}$, y que por lo tanto $\mathfrak{C}$ tiene la potencia del continuo, es decir, es no contable (el conjunto de Cantor es grande en el sentido conjuntista);

(iv) si se suman las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso, se obtiene la longitud del intervalo $[0,1]$ (el conjunto de Cantor es pequeño en el sentido medible);

(v) $\mathfrak{C}$ no posee puntos aislados en $[0,1]$;

(vi) $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}= \emptyset$ (el conjunto de Cantor es pequeño en el sentido topológico).

♣**61.-** Sea $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *convexo* si para cada $x, y \in A$, el segmento que los une $[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$, está contenido en A. Se pide probar:

(i) la intersección arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo (admitiendo que $\emptyset$ es convexo);

(ii) si A y B son convexos y $\lambda \in \mathbb{R}$, los conjuntos $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ y $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ son convexos;

(iii) si A es convexo y $t_1, \cdots, t_m \geq 0$, entonces $t_1 A + \cdots + t_m A = (t_1 + \cdots + t_m)A$ (donde $t_1 A + \cdots + t_m A = \{t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m : a_i \in A\}$). Lo anterior puede ser falso si A no es convexo;

(iv) si $A \subset \mathbb{R}^n$, se llama *envolvente convexa* de A, $co(A)$, a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A. Por (i), $co(A)$ es el menor convexo que contiene a A. Probar que si $A \neq \emptyset$, entonces la envolvente convexa es precisamente

$$co(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} t_i a_i, a_i \in A, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1, m \in \mathbb{N}\}.$$

Cada expresión de la forma $\sum_{i=1}^{m} t_i a_i$, donde $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$, se llama *combinación convexa*. Luego, $co(A)$ es el conjunto de las combinaciones convexas de elementos de A;

(v) si A es convexo, también lo son $\overline{A}$ y $\overset{\circ}{A}$;

(vi) probar que si A es un conjunto convexo y simétrico respecto al origen de coordenadas $0 \in \mathbb{R}^n$ (es decir, $A = \{-x : x \in A\}$), entonces A contiene a una bola abierta centrada en 0;

(vii) si A es convexo, $x \in \overset{\circ}{A}$ e $y \in \overline{A}$, entonces $\{tx + (1-t)y : t \in (0,1]\} \subset \overset{\circ}{A}$. Deducir que $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ y $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{A}}$;

(viii) si $A \subset \mathbb{R}^n$, se pide:

a) calcular $co(A)$ si $A = S(0,1)$;

b) probar que $\delta(A) = \delta(co(A))$;

c) si A es abierto, probar que $co(A)$ es abierto;

d) si A es finito, probar que $co(A)$ es cerrado;

e) si $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado, probar que $co(A)$ es cerrado;

f) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = x^2\}$ es cerrado, pero $co(A)$ no lo es;

(ix) sea A convexo en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $a \in A$ es un *punto extremal* de A, si $A - \{a\}$ es convexo o vacío. Probar:

a) si A es abierto, entonces no posee puntos extremales;

b) dar un ejemplo de cerrado convexo sin puntos extremales;

c) calcular los puntos extremales de $\overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$;

d) si $B \subset \mathbb{R}^n$ sea: $B^* = \{a \in B : \forall [x,y] \subset B : a \in [x,y], \text{ es } a = x \text{ ó } a = y\}$. Probar que A^* es el conjunto de los puntos extremales de A y $A^* = (A - \overset{\circ}{A})^*$.

62.- Sea $S = (\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1) \cup \{(1,0)\}$. Probar que para cada recta R en $\mathbb{R}^2$, $R \cap S$ es abierto en (R, d_{u}), pero S no es abierto en $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$.

63.- En el plano euclídeo $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$, se consideran los puntos $U = (0,1)$, $V = (0,-1)$, $O = (0,0)$, $P = (1,0)$, $Q = (2,0)$, $R = (4,0)$, $S = (2+\sqrt{5}, 0)$ y $T = (5,0)$. Sea

$$E = \{U, V, T\} \cup [O,P) \cup (P,Q] \cup [R,S)$$

(con esta notación se indican los intervalos correspondientes sobre el eje de abscisas).

(i) Probar que $\overset{\circ}{B}_E (Q, \sqrt{5})$ es un cerrado en (E, d_E), pero no es una bola cerrada;

(ii) probar que $\overline{B}_E(O,1)$ es un abierto en (E, d_E), pero no es una bola abierta.

Capítulo 3

Continuidad en espacios métricos

3.1. Aplicaciones continuas

Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos y $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ una función.

Definición 3.1. Si $a \in X$, se dice que f *es continua en* a, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ tal que para cada $x \in X$ verificando $d(x, a) < \delta$, es $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Observación 3.1. Si $(X, d) = (Y, \rho) = (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, esta definición es precisamente la usual de continuidad del Análisis Real.

Lema 3.1. *f es continua en $a \in X$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ tal que $f\left(B_X(a, \delta)\right) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$.*

Definición 3.2. Se dice que f *es continua en* X (o simplemente *continua*), si es continua en a para cada $a \in X$.

Ejemplos 3.1. Algunos ejemplos de funciones continuas son los siguientes:

(i) si $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es constante, es continua;

(ii) $1_X\colon (X, d) \longrightarrow (X, d)$ es continua;

(iii) si el espacio (X, d) es discreto (ejercicio 16 del apartado 2.8), para cualquier otro espacio métrico (Y, ρ) y cualquier función f, es $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua.

Observación 3.2. $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ no es continua en $a \in X$ si verifica cualquiera de las dos condiciones equivalentes siguientes:

(i) existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ pero es $\rho(f(x_\delta), f(a)) > \varepsilon_0$;

(ii) existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $\delta > 0$ es $f\left(B_X(a, \delta)\right) \not\subset B_Y(f(a), \varepsilon_0)$.

Teorema 3.2. $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *es continua si y sólo si para cada* V *abierto en* (Y,ρ), $f^{-1}(V)$ *es abierto en* (X,d).

Demostración: Si V abierto en (Y,ρ) y $a \in f^{-1}(V)$, es $f(a) \in V$. Por hipótesis, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B_Y(f(a),\varepsilon_a) \subset V$. Como f es continua en a, existe $\delta = \delta(a,\varepsilon_a) > 0$ tal que $f\left(B_X(a,\delta)\right) \subset B_Y(f(a),\varepsilon_a)$. Luego $B_X(a,\delta) \subset f^{-1}\left(B_Y(f(a),\varepsilon_a)\right) \subset f^{-1}(V)$, y queda probado que $f^{-1}(V)$ es abierto en (X,d). Y recíprocamente, por hipótesis, para cada $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto $f^{-1}\left(B_Y(f(a),\varepsilon)\right)$ es abierto en (X,d). Como $a \in f^{-1}\left(B_Y(f(a),\varepsilon)\right)$, debe existir $\delta > 0$ tal que $B_X(a,\delta) \subset f^{-1}\left(B_Y(f(a),\varepsilon)\right)$, con lo que queda probada la continuidad de la función. ∎

Observación 3.3. Las funciones continuas no transforman abiertos en abiertos: la función $f\colon (\mathbb{N},d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$ dada por $f(n) = n$ es continua, pero $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ no es abierto en $(\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$.

Por dualidad entre abiertos y cerrados, puede probarse la siguiente propiedad:

Teorema 3.3. $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *es continua si y sólo si para cada* F *cerrado en* (Y,ρ), $f^{-1}(F)$ *es cerrado en* (X,d).

Observación 3.4. Las funciones continuas no transforman cerrados en cerrados: la función $f\colon (\mathbb{Q},d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$ dada por $f(x) = x$ es continua, pero $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ no es cerrado en $(\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$.

Teorema 3.4. $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *es continua si y sólo si para cada subconjunto* $A \subset X$ *es* $f(\overline{A}^X) \subset \overline{f(A)}^Y$.

Demostración: Como $\overline{f(A)}^Y$ es cerrado en (Y,ρ), el teorema 3.3 garantiza que $f^{-1}\left(\overline{f(A)}^Y\right)$ es cerrado en (X,d). Como $A \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}^Y\right)$, la inclusión pasa a la clausura, es decir, $\overline{A}^X \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}^Y\right)$, y se deduce que $f(\overline{A}^X) \subset \overline{f(A)}^Y$. Recíprocamente, sea F cerrado en (Y,ρ); la hipótesis garantiza que $f(\overline{f^{-1}(F)}^X) \subset \overline{f(f^{-1}(F))}^Y \subset \overline{F}^Y = F$. Tomando imágenes recíprocas, se deduce que $\overline{f^{-1}(F)}^X \subset f^{-1}(F)$, y por el teorema 3.3, se concluye la continuidad de f. ∎

Observación 3.5. La igualdad no es cierta en general en el teorema 3.4: en efecto, la función $f\colon (\mathbb{Q},d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$ dada por $f(x) = x$ es continua, y $f(\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}}) = f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Teorema 3.5. *Sean* $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *y* $g\colon (Y,\rho) \longrightarrow (Z,\delta)$ *aplicaciones entre espacios métricos. Entonces:*

(i) si f es continua en a y g lo es en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a;

(ii) si f es continua en X y g lo es en Y, entonces $g \circ f$ es continua en X.

Definición 3.3. $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva, continua y f^{-1} es también continua. Se dice que (X,d) es homeomorfo a (Y,ρ).

Lema 3.6. *La relación "ser homeomorfo a" es una relación de equivalencia sobre la familia de todos los espacios métricos.*

Observación 3.6. Una aplicación biyectiva y continua entre dos espacios métricos no tiene porque ser un homeomorfismo: en efecto, como $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables, existe una función biyectiva entre ambos $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. La función $f\colon (\mathbb{N}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{Q}, d_{\mathrm{u}})$ es biyectiva y continua (ya que $(\mathbb{N}, d_{\mathrm{u}})$ es un espacio discreto, ver ejemplo 3.1 (iii)), pero la aplicación $f^{-1}\colon (\mathbb{Q}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{N}, d_{\mathrm{u}})$ no es continua, ya que $\{0\}$ es abierto en $(\mathbb{N}, d_{\mathrm{u}})$, pero $f^{-1}\{0\}$ no es abierto en $(\mathbb{Q}, d_{\mathrm{u}})$.

Proposición 3.7. *La composición de homeomorfismos es un homeomorfismo.*

Proposición 3.8. *Los espacios (X,d_1) y (X,d_2) son topológicamente equivalentes si y sólo si $1_X\colon (X,d_1) \longrightarrow (X,d_2)$ es un homeomorfismo.*

Lema 3.9. *Toda isometría es un homeomorfismo.*

Observación 3.7. Las isometrías preservan las propiedades métricas, mientras que los homeomorfismos conservan las topológicas.

3.2. Aplicaciones continuas y subespacios

Proposición 3.10. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. La aplicación inclusión $i_A\colon (A,d_A) \longrightarrow (X,d)$ es continua.*

Teorema 3.11. *Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ continua. Entonces, para cada $A \subset X$, su restricción a A, $f|_A\colon (A,d_A) \longrightarrow (Y,\rho)$, es también continua.*

Demostración: Basta con tener en cuenta que $f_A = f \circ i_A$. ∎

El recíproco sólo es parcialmente cierto:

Teorema 3.12. *Sean $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ y $A \subset X$, tal que $f|_A\colon (A,d_A) \longrightarrow (Y,\rho)$ es continua. Entonces, f es continua en $\overset{\circ}{A}$.*

Demostración: Sea $a \in \overset{\circ}{A}$, es decir, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B_X(a, \varepsilon_a) \subset A$. Como $f|_A$ es continua en a, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ tal que $f|_A (B_A(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$. Si se toma $\delta = \delta(a, \varepsilon) \leq \varepsilon_a$, es $B_A(a, \delta) = B_X(a, \delta) \cap A = B_X(a, \delta)$, con lo que para cada $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta = \delta(a, \varepsilon) \leq \varepsilon_a$ tal que $f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$, y se obtiene el resultado deseado. ∎

Observación 3.8. En las condiciones anteriores, f no tiene porque ser continua en A: sea la función característica $\chi_{[0,1]} : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$. La función es continua en $(0, 1)$, pero no en $[0, 1]$. Sin embargo, la restricción $\chi_{[0,1]}|_{[0,1]} : ([0, 1], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ es continua, al ser una función constante.

Teorema 3.13. *Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua, entonces $f : (X, d) \longrightarrow (f(X), \rho_{f(X)})$ es también continua.*

Definición 3.4. Una aplicación continua $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es un *embebimiento* si la función $f : (X, d) \longrightarrow (f(X), \rho_{f(X)})$ es un homeomorfismo. Así, (X, d) *puede pensarse* como un subespacio de (Y, ρ), y se dice que *está embebido* en (Y, ρ).

Observación 3.9. Dos espacios métricos pueden estar embebidos uno dentro del otro, sin ser homeomorfos: por ejemplo $(\mathbb{R}, d_u)$ se puede embeber en $([0, 1], d_u)$, puesto que $(\mathbb{R}, d_u)$ es homeomorfo a $((0, 1), d_u)$ (ver el ejercicio 30, del apartado 3.4) y la inclusión $i : ((0, 1), d_u) \longrightarrow ([0, 1], d_u)$ es claramente un embebimiento. Por otro lado, la inclusión natural $j : ([0, 1], d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ es un embebimiento. Sin embargo, $(\mathbb{R}, d_u)$ y $([0, 1], d_u)$ no son espacios homeomorfos. ¿Por qué?

Teorema 3.14. ***(Principio de prolongación de identidades)*** *Sean $f, g : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continuas y $D \subset X$ denso. Si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.*

Demostración: Supongamos que $f \neq g$, es decir, existe $a \in X$ tal que $f(a) \neq g(a)$ ($a \notin D$). Para $r_a = \rho(f(a), g(a))$, es $B_Y(f(a), \frac{r_a}{2}) \cap B_Y(g(a), \frac{r_a}{2}) = \emptyset$. Como f y g son continuas en a, para $\varepsilon = \frac{r_a}{2}$ existe $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ tal que $f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \frac{r_a}{2})$ y $g(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(g(a), \frac{r_a}{2})$. Así, $f(B_X(a, \delta)) \cap g(B_X(a, \delta)) = \emptyset$. Como D es denso en X, sabemos que $B_X(a, \delta) \cap D \neq \emptyset$, de donde existe $d \in B_X(a, \delta)$ con $f(d) = g(d)$, lo cual es imposible. ∎

Ejemplo 3.1. Sean $f, g : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, donde $f = 1$ y $g = \chi_{\mathbb{Q}}$. Para el denso $\mathbb{Q}$, es $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ y $f \neq g$; como f es continua al ser una función constante, el teorema 3.14 garantiza que g no puede ser continua.

3.3. Aplicaciones uniformemente continuas

Definición 3.5. $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es *uniformemente continua*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ verificando $d(x,y) < \delta$, es $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Teorema 3.15. *Si $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es uniformemente continua, es continua.*

Observación 3.10. El recíproco no es cierto: sea la función $f\colon ((0,1], d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces:

(i) f es continua en $(0,1]$: para $a \in (0,1]$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta < \mathrm{mín}\left\{\frac{a}{2}, \varepsilon\frac{a^2}{2}\right\}$ tal que si $|x-a| < \delta$, es $|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| = \frac{|x-a|}{|x||a|} < \frac{2}{a^2}\frac{\varepsilon a^2}{2} = \varepsilon$;

(ii) f no es uniformemente continua: si lo fuera, sean ε y δ como en la definición 3.5 y $a < \mathrm{mín}\left\{2\delta, \frac{1}{\varepsilon}, 1\right\}$; entonces $a, \frac{a}{2} \in (0,1]$, $|a - \frac{a}{2}| < \delta$, pero $|f(x) - f(\frac{a}{2})| = \frac{1}{a} > \varepsilon$.

Teorema 3.16. *La composición de aplicaciones uniformemente continuas, es uniformemente continua.*

Observación 3.11. La continuidad es una propiedad que se expresa en términos de abiertos. Esto no es verdad para la continuidad uniforme, donde la definición $(\varepsilon - \delta)$ juega un papel esencial: la continuidad uniforme es una propiedad adaptada a espacios métricos, mientras que la continuidad es una noción asociada a espacios topológicos.

Proposición 3.17. *La funciones $f, g\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ dadas por $f(x) = d(x,a)$ y $g(x) = d(x,A)$ son uniformemente continuas, para $a \in A$ y $A \subset X$.*

Demostración: Para $\varepsilon > 0$, basta con tomar $\delta = \varepsilon$ y si $d(x,y) < \delta$, es $|f(x) - f(y)| = |d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y)$, por la proposición 2.5. Para g, se deduce de manera similar aplicando la proposición 2.6. ∎

Ejemplos 3.2. Algunos ejemplos de aplicaciones uniformemente continuas son:

(i) la identidad $1_X\colon (X,d) \longrightarrow (X,d)$ es uniformemente continua;

(ii) las aplicaciones constantes son uniformemente continuas;

(iii) las isometrías son uniformente continuas, pero el recíproco no es cierto: la función $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{dis}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, es una biyección uniformemente continua, pero no es una isometría;

(iv) para cualquier espacio métrico (Y,ρ) y cada función, $f\colon (X, d_{\mathrm{dis}}) \longrightarrow (Y,\rho)$ es uniformemente continua. Esta propiedad no es cierta para cualquier espacio discreto: para la aplicación $f\colon (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{N}, d_{\mathrm{u}})$, la función $f(\frac{1}{n}) = n$ es continua, pero no es uniformemente continua.

Definición 3.6. Dos espacios (X, d) e (Y, ρ) se llaman *uniformemente homeomorfos*, si existe $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ biyectiva, uniformemente continua y de inversa uniformemente continua.

Lema 3.18. *Dos espacios métricos uniformemente homeomorfos, son homeomorfos.*

3.4. Ejercicios

1.- Responder a las siguientes cuestiones:

(i) si (X, d) es un espacio métrico discreto e (Y, ρ) es arbitrario, probar que toda aplicación $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es continua;

(ii) en las condiciones de (i), describir las aplicaciones continuas $f\colon (Y, \rho) \longrightarrow (X, d)$;

(iii) ¿qué puede decirse de (X, d), si toda aplicación $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ es continua?

2.- Sean $f, g\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continuas. Probar que también lo son las funciones: $f \pm g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(x) \neq 0$ para cada $x \in X$), $c.f$ ($c \in \mathbb{R}$), $|f|$, $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$.

3.- Sean $f, g\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continuas, se pide:

(i) probar que el conjunto $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en (X, d). Concluir que si D es denso en (X, d) y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$;

(ii) sea $b \in Y$. Probar que el conjunto $A = \{x \in X : f(x) = b\}$ es cerrado en (X, d). Concluir que si $(Y, \rho) = (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, entonces las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ constituyen un conjunto cerrado en (X, d).

4.- Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos y $\{A_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X tales que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ tal que $f|_{A_i}$ es continua para cada $i \in I$. Probar:

(i) si cada A_i es abierto en (X, d), entonces f es continua;

(ii) si cada A_i es cerrado en (X, d) y el conjunto I es finito, entonces f es continua;

(iii) comprobar que f no es continua en general.

5.- Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Definimos los conjuntos $A + x = \{a + x : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Probar:

(i) si A es abierto (respectivamente, cerrado) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, entonces $A + x$ es abierto (respectivamente, cerrado) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$;

(ii) si A y B son abiertos en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, entonces $A + B$ es abierto en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$. No sucede lo mismo si se cambia el calificativo de abierto por el de cerrado.

6.- Probar que son continuas las funciones $f, g\colon (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, donde:

(i) $f(x, y) = x + y$;

(ii) $g(x, y) = xy$. Concluir que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, xy = 1\}$, es cerrado en $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$.

7.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$. Probar que son equivalentes:

(i) f es continua;

(ii) para cada $B \subset Y$, $f^{-1}(\overset{\circ}{B}{}^{Y}) \subset \overbrace{f^{-1}(B)^{X}}^{\circ}$;

(iii) para cada $B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)}^{X} \subset f^{-1}(\overline{B}^{Y})$.

8.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Probar que si D es denso en (X, d), entonces $f(D)$ es denso en (Y, ρ). Si F es denso en (Y, ρ), ¿es $f^{-1}(F)$ denso en (X, d)?

9.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$. Probar que f es continua en (X, d) si y sólo si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $A_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $B_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos en (X, d).

10.- Sea (X, d) y $A \subset X$. Probar que la función característica de A es continua en x si y sólo si $x \notin \mathrm{fr}(A)$. ¿Bajo que condiciones es χ_A continua?

11.- Sean $f, g\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continuas. Probar que $h\colon (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$ definida por $h(x, y) = (f(x), g(y))$ es continua.

12.- Sean A y B cerrados, no vacíos y disjuntos en un espacio métrico (X, d). Se pide:

(i) encontrar una función $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continua, tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$;

(ii) probar que existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

13.- Sean $f, g\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continuas y $a \in X$. Probar:

(i) si $f(a) \neq g(a)$, probar que existe $r > 0$, tal que $f(B_X(a, r)) \cap g(B_X(a, r)) = \emptyset$; en particular, si $x \in B_X(a, r)$, entonces $f(x) \neq g(x)$;

(ii) supongamos que para cada $r > 0$, existe $x_r \in B_X(a, r)$ tal que $f(x_r) = g(x_r)$. Probar que $f(a) = g(a)$. Concluir que si $f, g\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ son continuas y $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$, entonces $f = g$.

14.- Sean $f, g\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continuas y $a \in X$, tal que $f(a) < g(a)$. Probar que existe $r > 0$ tal que para cada $x, y \in B_X(a, r)$, es $f(x) < g(y)$. ¿Cómo se expresa esta propiedad si f es la función idénticamente nula? Concluir que si $s > 0$ y $a \notin \overline{B}_X(x, s)$, existe $r > 0$ tal que $B_X(a, r) \cap \overline{B}_X(x, s) = \emptyset$.

♣**15.-** Sean $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua, $B \subset Y$ y $A = \{x \in X : \rho(f(x), Y - B) > 0\}$. Probar que para cada $x \in A$, es $d(x, X - A) > 0$.

16.- Estudiar la continuidad de $f, g\colon (X, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, donde $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y

(i) $f(0) = 0$ y $f(\frac{1}{n}) = n$;

(ii) $g(0) = 0$ y $g\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$.

17.- Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de las funciones: $f\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{dis}})$, $f\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{dis}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \rho)$, y $f\colon (\mathbb{R}, \rho) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, donde $\rho(x, y) = 2|x - y|$.

18.- Sean las métricas sobre $\mathbb{R}$, dadas por:

$$d_1(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } sg(x) = sg(y) \\ |x + y| + 1 & \text{si } sg(x) \neq sg(y) \end{cases}$$

$$d_2(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \neq y, x > 0, y > 0 \\ |x - y| & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de las funciones: $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d_i) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ y $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_i)$, para $i \in \{1, 2\}$. Hacer el mismo ejercicio para $f = \chi_{\{0\}}$ y $g(x) = \frac{x}{2} - 1$.

19.- Sean A y B cerrados en (X, d), y los conjuntos $C = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$, $D = \{x \in X : d(x, A) > d(x, B)\}$ y $E = \{x \in X : d(x, A) = d(x, B)\}$. Probar:

(i) C y D son abiertos y E es cerrado en (X, d);

(ii) hallar C, D y E, si $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$ y A y B son dos rectas (respectivamente, dos circunferencias exteriores).

20.- Probar que una biyección de $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ es continua si y sólo si es monótona.

21.- Sean (X, d) un espacio métrico, $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ una aplicación continua y el conjunto abierto $U = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Probar que para cada $x \in \mathrm{fr}(U)$, es $f(x) = 0$.

♣**22.-** Sea $f\colon (\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, d_{\mathrm{u}})$ una función. Para cada $a \in \mathbb{R}^n$, se llama *oscilación* de f en a al número real $\omega(f, a) = \inf\{\delta(f(B(a, \varepsilon))) : \varepsilon > 0\}$. Se pide probar:

(i) f es continua en a si y sólo si $\omega(f,a)=0$;

(ii) para cada $\varepsilon>0$, el conjunto $A_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n : \omega(f,x)\geq\varepsilon\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$;

(iii) calcular $\omega(g,x)$, para $x\in\mathbb{R}$ y la función $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \\ x & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

♣**23.-** Sea A un convexo (ejercicio 61 del apartado 2.8) no vacío de $\mathbb{R}^n$. Una aplicación $f\colon(A,d_{\mathrm{u}})\longrightarrow(\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$ se llama *convexa*, si para cada $x,y\in A$ y $t\in[0,1]$, es

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y).$$

Se pide probar:

(i) si f es convexa en A, entonces $f\left(\sum_{i=1}^{m}t_ia_i\right)\leq\sum_{i=1}^{m}t_if(a_i)$, donde $t_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{m}t_i=1$ y $a_i\in A$;

(ii) si A es abierto convexo, toda función convexa sobre A es continua sobre A;

(iii) dar un ejemplo en donde se pruebe que (ii) no es cierto en general si A no es abierto.

24.- Probar que las bolas abiertas en el espacio euclídeo de dimensión n son homeomorfas entre sí y a su vez a $(\mathbb{R}^n,d_{\mathrm{u}})$.

♣**25.-** Sea $f\colon(\mathbb{R}^n,d_{\mathrm{u}})\longrightarrow(\mathbb{R}^m,d_{\mathrm{u}})$ una aplicación lineal, es decir, si $a,b\in\mathbb{R}^n$ y $t,s\in\mathbb{R}$, es $f(sa+tb)=sf(a)+tf(b)$. Si $\|x\|=d_{\mathrm{u}}(x,0)$ es la norma de x, probar que son equivalentes:

(i) f es continua; (ii) f es continua en 0;

(iii) existe $c>0$ tal que $\|f(x)\|\leq c\|x\|$, para cada $x\in\mathbb{R}^n$;

(iv) existe $c>0$ tal que $\|f(x)-f(y)\|\leq c\|x-y\|$, para cada $x,y\in\mathbb{R}^n$.

26.- Sea $f\colon(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ biyectiva. Probar que f es un homeomorfismo si y sólo si para cada $A\subset X$, se tiene $f(\overline{A}^X)=\overline{f(A)}^Y$.

27.- Sea $f\colon(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ un homeomorfismo y $A\subset X$, tal que $A\cap A'=\emptyset$. Probar que $f(A)\cap f(A)'=\emptyset$.

28.- Sea una función $f\colon(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ y D la métrica sobre X dada por $D(x,y)=d(x,y)+\rho(f(x),f(y))$. Probar que si f es continua en X, entonces la aplicación identidad $1_X\colon(X,D)\longrightarrow(X,d)$ es un homeomorfismo.

29.- Sea $f\colon(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ una función. Se pide probar:

(i) si f es continua, entonces su grafo G_f (definición (1.19) es cerrado en $(X \times Y, d_{\text{máx}})$. El recíproco es falso;

(ii) sea p la restricción a G_f de la proyección $p_1\colon (X \times Y, d_{\text{máx}}) \longrightarrow (X, d)$. Probar que p es biyectiva y continua. Probar que f es continua si y sólo si p es un homeomorfismo.

30.- Sea $f\colon (\mathbb{R}, d_{\text{u}}) \longrightarrow ((-1,1), d_{\text{u}})$, donde $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Probar que f es un homeomorfismo. Concluir que cualquier intervalo abierto (con la métrica de subespacio inducida por la usual) es homeomorfo a la recta real.

31.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ un homeomorfismo. Estudiar si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas:

(i) X es acotado si y sólo si Y lo es;

(ii) $U \subset X$ es abierto en (X, d) si y sólo si $f(U)$ es abierto en (Y, ρ);

(iii) $F \subset X$ es cerrado en (X, d) si y sólo si $f(F)$ es cerrado en (Y, ρ);

(iv) $A \subset X$ es numerable si y sólo si $f(A)$ lo es;

(v) $D \subset X$ es denso en (X, d) si y sólo si $f(D)$ es denso en (Y, ρ);

(vi) si $A \subset X$, $x \in \overset{\circ}{A}^{X}$ si y sólo si $f(x) \in \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}^{Y}$;

(vii) si $A \subset X$, $x \in A'$ si y sólo si $f(x) \in (f(A))'$;

(viii) si $A \subset X$, $x \in \overline{A}^{X}$ si y sólo si $f(x) \in \overline{f(A)}^{Y}$.

32.- Sean $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ y $g\colon (Y, \rho) \longrightarrow (Z, \eta)$ continuas, tales que la composición $g \circ f\colon (X, d) \longrightarrow (Z, \eta)$ es un homeomorfismo. Probar que si f es sobreyectiva, entonces f y g son homeomorfismos.

♣33.- Probar que los espacios euclídeos siguientes son dos a dos homeomorfos:

(i) el cilindro vertical $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$;

(ii) el cilindro $Y = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$;

(iii) el plano privado del origen $Z = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;

(iv) la corona circular $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;

(v) la esfera privada de los polos norte y sur, $U = \mathbb{S}^2 - \{P, Q\}$, donde $P = (0, 0, 1)$ y $Q = (0, 0, -1)$;

(vi) el cono privado de su vértice $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

♣34.- Dar un homeomorfismo entre el primer cuadrante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ y el semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, como subespacios del plano euclídeo.

♣35.- Sea $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, convexo y acotado, tal que $0 \in A$. Se pide probar:

(i) para cada $x \in S(0, 1)$, existe un único $y \in \mathrm{fr}(A)$ de la forma $\lambda.x$, donde $\lambda > 0$;

(ii) si $y = \phi(x)$, probar que la aplicación $\phi\colon (S(0, 1), d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathrm{fr}(A), d_{\mathrm{u}})$ es un homeomorfismo;

(iii) deducir que la frontera de un subconjunto convexo, acotado, de interior no vacío de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$, es homeomorfa a $(S(0, 1), d_{\mathrm{u}})$;

(iv) sea $\varphi\colon (\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, definida por $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x) = \|x\|\phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ si $x \neq 0$. Probar que φ es un homeomorfismo;

(v) deducir que un subconjunto convexo, abierto y acotado de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$, es homeomorfo a la bola abierta $(B(0, 1), d_{\mathrm{u}})$ y por consiguiente a $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$;

(vi) deducir que un subconjunto convexo, cerrado y acotado de interior no vacío de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$ es homeomorfo a la bola cerrada $(\overline{B}(0, 1), d_{\mathrm{u}})$;

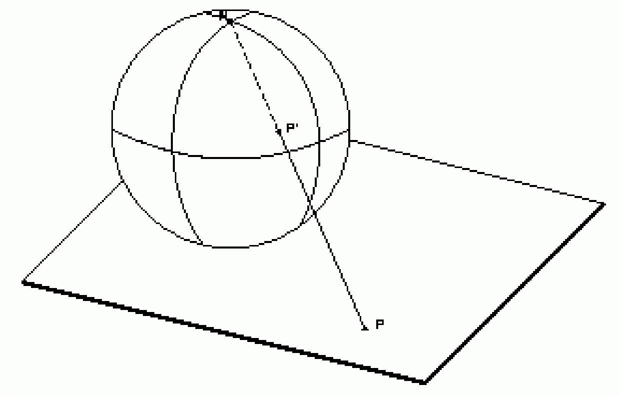
(vii) probar propiedades similares para partes convexas, de interior no vacío y no acotadas de $\mathbb{R}^n$.

36.- Sea $f\colon (\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, d_{\mathrm{u}})$ una aplicación lineal y biyectiva. Probar que para que f sea un homeomorfismo es necesario y suficiente que existan constantes $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \beta\|x\|$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

♣37.- En este ejercicio se trata de definir la *proyección estereográfica*, una aplicación esencial en geometría y topología:

(i) la circunferencia unidad en el plano euclídeo es $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Dado $(a_1, a_2) \in \mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\}$, se considera la recta que pasa por (a_1, a_2) y $(0, 1)$. Esta recta corta al eje de abscisas en el punto $\left(\frac{a_1}{1-a_2}, 0\right)$. Se define la aplicación $h\colon (\mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ por $h(a_1, a_2) = \frac{a_1}{1-a_2}$. Probar que h es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*;

(ii) Análogamente, para $n \geq 1$, la esfera unidad en el espacio euclídeo de dimensión $n+1$ se define por $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Probar que la aplicación $h\colon (\mathbb{S}^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$, dada por $h(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \left(\frac{a_1}{1-a_{n+1}}, \ldots, \frac{a_n}{1-a_{n+1}}\right)$, es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*.



♣**38.-** Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que existe una métrica acotada ρ sobre X, de manera que la identidad $1_X\colon (X,d)\longrightarrow (X,\rho)$ es un homeomorfismo uniforme.

♣**39.-** Sea $f\colon (X,d)\longrightarrow (Y,\rho)$. Probar que es uniformemente continua, si y sólo si para cada $A,B\subset X$ tales que $d(A,B)=0$ se tiene $\rho(f(A),f(B))=0$.

40.- Sean los espacios métricos $(X_1,d_1),\cdots,(X_n,d_n)$. Consideremos su producto cartesiano $X=X_1\times\cdots\times X_n$ y $d_{\text{máx}}$ la métrica del máximo. Se pide probar:

(i) las proyecciones $p_i\colon (X,d_{\text{máx}})\longrightarrow (X_i,d_i)$ son uniformemente continuas;

(ii) si U es abierto en $(X,d_{\text{máx}})$, entonces $p_i(U)$ es abierto en (X_i,d_i). ¿Esta propiedad se debe a la continuidad de las proyecciones?

(iii) dado un espacio métrico (Y,ρ), probar que una función $f\colon (Y,\rho)\longrightarrow (X,d_{\text{máx}})$ es continua si y sólo si para cada $i\in I$, las aplicaciones $p_i\circ f$ lo son.

♣**41.-** Una función $f\colon (X,d)\longrightarrow (Y,\rho)$ es *lipschitziana*, si existe un número real positivo λ tal que para cada $x,y\in X$, se cumple $\rho(f(x),f(y))\leq \lambda d(x,y)$. Se pide probar:

(i) toda función lipschitziana es uniformemente continua. El recíproco no es cierto: $f\colon ([0,\infty),d_{\text{u}})\longrightarrow ([0,\infty),d_{\text{u}})$, dada por $f(x)=\sqrt{x}$ es uniformemente continua y no lipschitziana;

(ii) las isometrías son aplicaciones lipschizianas. El recíproco no es cierto;

(iii) las aplicaciones de la proposición 3.17 son lipschitzianas.

42.- Sea $(\mathbb{R}^2,d)$ donde d es la métrica definida por,

$$d(x,y)=\begin{cases} d_{\text{u}}(x,y) & \text{si} \quad x_2=y_2\\ |x_1-y_1|+1 & \text{si} \quad x_2\neq y_2\end{cases}$$

¿Son continuas las proyecciones $p_1, p_2 \colon (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$? ¿Y lipschitzianas?

43.- Sea $f \colon ([0, \infty), d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, tal que existe $a > 0$ verificando que $f|_{[0,a]}$ y $f|_{[a,\infty)}$ son uniformemente continuas. Probar que f es uniformemente continua.

44.- Sea $A \subset \mathbb{R}$. Probar que la función $f \colon (A, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, dada por $f(x) = x^2$ es uniformemente continua si A es acotado, pero no si $A = \mathbb{R}$.

♣**45.-** Se pide probar:

(i) la función $f \colon (\mathbb{R} - \{0\}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ dada por $f(x) = \frac{x}{|x|}$ es continua, pero no es uniformemente continua;

(ii) sea $f \colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ una aplicación continua entre espacios métricos. Se supone que existen $a \neq b \in X$, tales que los conjuntos cerrados y disjuntos $F = f^{-1}(a)$ y $G = f^{-1}(b)$ verifican que $d(F, G) = 0$. Probar que f no es uniformemente continua.

Capítulo 4

Completitud en espacios métricos

4.1. Definición de sucesión

Definición 4.1. Una *sucesión* en $X \neq \emptyset$ es una aplicación $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$. Normalmente, en vez de utilizar la notación funcional, se utiliza la notación con subíndices $f(n) = x_n$, y se habla de la sucesión f o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El punto x_n se llama *término* de la sucesión y $Rg\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = f(\mathbb{N})$ es el *rango* de la sucesión.

Observación 4.1. Destacamos a continuación algunas propiedades relativas a sucesiones:

(i) la función f definiendo una sucesión no tiene porque ser inyectiva, y por lo tanto, en una sucesión pueden existir términos iguales;

(ii) no hay que confundir el rango con la propia sucesión: si $X = \mathbb{R}$, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la *sucesión oscilante*, cuyo rango es finito $\{-1, 1\}$;

(iii) si f es constante, es decir, existe $x \in X$ tal que $f(n) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se habla de la *sucesión constante igual a* x y en este caso $f(\mathbb{N}) = \{x\}$;

(iv) si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $x_n = x$, se habla de la *sucesión semiconstante igual a* x (que es constante si $n_0 = 1$). El rango de una sucesión semiconstante es finito, aunque el recíproco no es cierto (por ejemplo, las sucesiones oscilantes).

Definición 4.2. Una *subsucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión definida por $y_n = x_{\varphi(n)}$, donde $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente. Es decir, se eligen elementos de la sucesión original, sin alterar el orden.

Lema 4.1. *Si* $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *es una función estrictamente creciente, es* $\varphi(n) \geq n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Lema 4.2. *Toda sucesión es una subsucesión de sí misma.*

Demostración: Basta con tomar como $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función identidad. ∎

Lema 4.3. *Una subsucesión de una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sigue siendo una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración: Es una consecuencia de que la composición de funciones estrictamente crecientes es una función estrictamente creciente. ∎

4.2. Sucesiones convergentes

Definición 4.3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (X,d). Se dice que $x \in X$ es *límite* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ es $x_n \in B(x,\varepsilon)$. Se dice también que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x y se denota por $\{x_n\} \to x$.

Lema 4.4. *Si $\{x_n\} \to x$ en (X,d), el rango de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotado.*

Demostración: Para $\varepsilon = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ es $d(x_n,x) < 1$. Sea $K = \max\{d(x,x_1),\ldots,d(x,x_{n_1}),1\}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $d(x,x_n) \leq K$, con lo que $Rg\,(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset \overline{B}(x,K)$. ∎

Observación 4.2. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$, la sucesión oscilante $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero tiene rango acotado.

Lema 4.5. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (X,d), tal que $x_n \in B(x,\frac{1}{n})$. Entonces, $\{x_n\}$ converge a x.*

Teorema 4.6. *Una sucesión convergente en (X,d) lo hace de manera única.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a dos puntos distintos, $x \neq y$. Sea $d(x,y) = r > 0$. Por la propiedad de Hausdorff (teorema 2.10), es $B(x,\frac{r}{2}) \cap B(y,\frac{r}{2}) = \emptyset$, lo cual contradice la convergencia. ∎

Observación 4.3. Si $\{x_n\} \to x$ en (X,d), se denota también como $\lim(x_n) = x$.

Observación 4.4. Algunos ejemplos de sucesiones convergentes son:

(i) en cualquier espacio métrico, una sucesión semiconstante converge hacia la constante que se repite;

(ii) si (X,d) es un espacio métrico discreto (ejercicio 16 del apartado 2.8), las únicas sucesiones que convergen son las semiconstantes;

(iii) las sucesiones oscilantes no convergen en ningún espacio métrico: en efecto dada la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n = x$ para n par y $x_n = y \neq x$ para n impar, si $\{x_n\} \to z$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$ debería ser $x_n \in B(z,\varepsilon)$ para n suficientemente grande, es decir, $x, y \in B(z,\varepsilon)$, lo que es imposible.

Teorema 4.7. *En (X,d), si $\{x_n\} \to x$, cualquier subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$.*

Demostración: Basta con utilizar el lema 4.1. ∎

Observación 4.5. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_u)$, la sucesión$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero la subsucesión de los términos pares $\{(-1)^{2n}\} \to 1$.

Observación 4.6. Algunas observaciones referentes a la convergencia de sucesiones son:

(i) si en (X,d) el rango de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finito, existe una subsucesión constante $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, luego convergente;

(ii) aunque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sólo posea subsucesiones convergentes a un único punto, no se deduce que sea convergente: en $(\mathbb{R}, d_u)$, la sucesión $\{1, 2, 1, 3, \dots, 1, n, \dots\}$ sólo posee subsucesiones convergentes a 1, pero ella no converge;

(iii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee dos subsucesiones convergentes a puntos distintos, entonces ella no converge;

(iv) cualquier reordenación de una sucesión convergente converge al mismo punto.

Lema 4.8. *En (X,d), si $\{x_n\} \to x$ y $Rg\,(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ es infinito, es $(Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}))' = \{x\}$.*

Demostración: Sea $R = Rg\,(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$. Como $\{x_n\} \to x$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ es $x_n \in B(x,\varepsilon)$. Como R es infinito, es claro que entonces debe ser $(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap R \neq \emptyset$, para cada $\varepsilon > 0$, es decir, $x \in R'$. Supongamos que existe $y \neq x$, $y \in R'$. Sea $d(x,y) = r$ y $\varepsilon_0 = \frac{r}{2}$. Por la convergencia de la sucesión, existe $n_0 > 0$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $x_n \in B(x,\varepsilon_0)$ y además $(B(y,\varepsilon_0) - \{y\}) \cap R \neq \emptyset$. Pero, por la propiedad de Hausdorff es $B(x,\varepsilon_0) \cap B(y,\varepsilon_0) = \emptyset$, por lo que $(B(y,\varepsilon_0) - \{y\}) \cap R$ contiene como mucho los puntos $\{x_1, \dots, x_{n_0-1}\}$, en contra del lema 2.19. ∎

Observación 4.7. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_u)$, sea la sucesión $\{n^{(-1)^n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6 \dots, \frac{1}{2n-1}, 2n, \dots\}$. Es claro que $\left(Rg(\{n^{(-1)^n}\}_{n\in\mathbb{N}})\right)' = \{0\}$, pero la sucesión no converge.

Teorema 4.9. *En (X,d), $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de términos distintos dos a dos en A, tal que $\{x_n\} \to x$.*

Demostración: Sea $x \in A'$. Sabemos que para cada $\varepsilon > 0$, $(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos. Así, podemos afirmar que:

(i) para $\varepsilon = 1$, existe $x_1 \in (B(x,1) - \{x\}) \cap A$;

(ii) supongamos dados $x_1, \dots, x_{n-1}$ (distintos dos a dos) tales que para $i \in \{1, \dots n-1\}$ es $x_i \in (B(x, \frac{1}{i}) - \{x\}) \cap A$.

Como $(B(x, \frac{1}{n}) - \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos, se puede elegir $x_n \in (B(x, \frac{1}{n}) - \{x\}) \cap A$ de modo que $x_n \neq x_i$ para $i \in \{1, \dots n-1\}$. Queda así construida una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A, de términos distintos dos a dos. Además, por la propiedad arquimediana, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon > 0$, tal que para $n \geq n_\varepsilon$ es $d(x, x_n) < \varepsilon$, con lo que $\{x_n\} \to x$. Observar que la sucesión construida no es única. Recíprocamente, si los términos de la sucesión son dos a dos diferentes, el rango de la sucesión $Rg\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset A$ es infinito, con lo que por el lema 4.8, es $(Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})' = \{x\} \subset A'$. ∎

Corolario 4.10. *En (X,d), es $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \to x$.*

Demostración: Como $\overline{A} = A \cup A'$, basta con notar que si $x \in A$, la sucesión constante igual a x converge a x, y aplicar en otro caso el teorema 4.9. ∎

Corolario 4.11. *En (X,d), es $A \subset X$ es denso si y sólo si todo punto de X es límite de una sucesión de puntos de A.*

Corolario 4.12. *En (X,d), es $x \in \mathrm{fr}(A)$ si y sólo si existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X - A$, tales que $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to x$.*

Corolario 4.13. *En (X,d), si $A \subset X$, se cumple:*

(i) A es cerrado si y sólo si dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \to x$, es $x \in A$;

(ii) A es abierto si y sólo si dada $\{x_n\} \to x \in A$, existe $n_A \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_A$ es $x_n \in A$.

Ejemplo 4.1. En $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, el conjunto $A = (0,1]$ no es ni abierto ni cerrado:

(i) A no es cerrado pues existe $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ y $0 \notin A$;

(ii) A no es abierto pues existe $\{1 + \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R} - A$ tal que $\{1 + \frac{1}{n}\} \to 1$ y $1 \in A$.

Teorema 4.14. *La aplicación $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es continua en x si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X con $\{x_n\} \to x$, la sucesión de las imágenes verifica que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.*

Demostración: Si f es continua, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ tal que $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$. Como $\{x_n\} \to x$, para δ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ es $x_n \in B_X(x, \delta)$, con lo que $f(x_n) \in B_Y(f(x), \varepsilon)$, y queda probado que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Recíprocamente, supongamos que f no es continua en x. Existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_X(x, \frac{1}{n}) - \{x\}$ de modo que $f(x_n) \notin B_Y(f(x), \varepsilon)$. Hemos construido de este modo una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X que converge a x (ver lema 4.5), pero tal que $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$. ∎

4.3. Sucesiones de Cauchy

Definición 4.4. En (X, d), una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se llama *de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_\varepsilon$ es $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, es decir, los términos de la sucesión se acercan entre sí a medida que los índices crecen.

Si los términos de una sucesión se aproximan a un punto, entonces, se acercan entre sí:

Teorema 4.15. *En (X, d), si $\{x_n\} \to x$, entonces es de Cauchy.*

Observación 4.8. El recíproco no es cierto: en $((0, 1], d_{\mathrm{u}})$, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no converge.

Teorema 4.16. *En (X, d), si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y posee una subsucesión convergente $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$, entonces $\{x_n\} \to x$.*

Demostración: Como $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Y la condición de Cauchy dice que $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_1$ es $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $n_\varepsilon = \text{máx}\{n_0, n_1\}$, para $n \geq n_\varepsilon$ es $d(x, x_n) \leq d(x, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x_n) < \varepsilon$. ∎

Corolario 4.17. *En (X, d), si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de rango finito, converge.*

Corolario 4.18. *En (X, d), si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y $(Rg(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}))' \neq \emptyset$, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.*

Demostración: Si $x \in (Rg(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})'$, por el corolario 4.10, existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $(Rg(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}))'$ tal que $\{y_n\} \to x$, que se puede elegir como una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (observación 4.6 (iv)). Por el teorema 4.16, es $\{x_n\} \to x$. ∎

Teorema 4.19. *El rango de una sucesión de Cauchy en (X, d) es un conjunto acotado.*

Demostración: Para $\varepsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ es $x_n \in B(x_{n_1}, \varepsilon)$. Sea $K = \text{máx}\{1, d(x_1, x_{n_1}), \dots d(x_{n_1-1}, x_{n_1})\}$. Entonces, $Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset \overline{B}(x_{n_1}, K)$. ∎

Observación 4.9. El recíproco no es cierto, como lo prueban las sucesiones oscilantes.

Teorema 4.20. *Si $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ es uniformemente continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.*

Demostración: La continuidad uniforme garantiza que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ es $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Y la condición de Cauchy afirma que para $\delta > 0$ existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_\delta$ es $d(x_m, x_n) < \delta$. Así, es $\rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. ∎

Observación 4.10. Esta propiedad no es cierta para funciones continuas: en efecto, sea $f\colon ((0,1], d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, que es continua, pero no uniformemente continua. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $((0,1], d_{\mathrm{u}})$, pero la sucesión de sus imágenes $\{f(\frac{1}{n}) = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, por no estar acotada.

4.4. Espacios métricos completos

Definición 4.5. Un espacio métrico (X,d) se llama *completo*, si toda sucesión de Cauchy es convergente. Así, en este tipo de espacios, se puede averiguar si una sucesión es convergente, sin necesidad de calcular su límite.

Teorema 4.21. *Si (X,d) es completo y $A \subset X$ es cerrado, entonces (A, d_A) es completo.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (A, d_A). Como (X,d) es completo, $\{x_n\} \to x$ en (X,d). Pero, $x \in \overline{A} = A$. ∎

Teorema 4.22. *Si $A \subset X$ y (A, d_A) es completo, entonces A es cerrado en (X,d).*

Demostración: Sea $x \in \overline{A}$; existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \to x$. Luego, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (A, d_A), por serlo en (X,d). Por completitud y unicidad de límite, es necesariamente $x \in A$. ∎

Corolario 4.23. *Si (X,d) es completo, (A, d_A) es completo si y sólo si A es cerrado.*

Definición 4.6. (X,d) posee la *propiedad de Cantor*, si dada cualquier familia numerable de conjuntos $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cerrados, no vacíos y encajados ($F_{n+1} \subset F_n$, para $n \in \mathbb{N}$), tales que $\text{ínf}\{\delta(F_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$, es $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Teorema 4.24. ***(Teorema de Cantor)*** *(X,d) es completo si y sólo si posee la propiedad de Cantor. Además, estas intersecciones numerables de familias de cerrados encajados se reducen a un punto.*

Demostración: Sea (X,d) completo y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de cerrados encajados, no vacíos y tales que $\inf\{\delta(F_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Por la elección de los diámetros, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(F_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$. Luego, para cada $m,n \geq n_\varepsilon$, al ser $x_m, x_n \in F_{n_\varepsilon}$, es también $d(x_n,x_m) < \varepsilon$. Así, hemos construido una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. Por la completitud, existe $x \in X$ tal que $\{x_n\} \to x$. La subsucesión $\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ en F_k converge también a x; así para cada $k \in \mathbb{N}$ es $x \in \overline{F_k} = F_k$ y $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Recíprocamente, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy y $R_k = Rg\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$. Es $R_{k+1} \subset R_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y como $\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ es de Cauchy, R_k está acotado e $\inf\{\delta(R_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Si $F_n = \overline{R_n}$, la familia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia contable de cerrados no vacíos, encajada y como $\delta(\overline{R_n}) = \delta(R_n)$ es $\inf\{\delta(F_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Por la propiedad de Cantor, será $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y además la intersección se reduce a un punto, ya que si $x,y \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, $d(x,y) \leq \delta(F_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que $d(x,y) = 0$. Sea entonces $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ es $x \in F_n = \overline{R_n}$ y $x_n \in R_n$, es $d(x_n,x) \leq \delta(R_n)$. Así, como los diámetros tienden a cero, para cada $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$, es $d(x_n,x) < \varepsilon$. ∎

Observación 4.11. Los conjuntos de la definición 4.6 deben ser cerrados y con la propiedad de que sus diámetros tiendan a cero. En efecto, en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$:

(i) si $F_n = (0, \frac{1}{n})$, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos (no cerrados), encajados y cuyos diámetros tienden a cero, pero $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$;

(ii) si $F_n = [n, \infty)$, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados encajados, pero sus diámetros no tienden a 0 y $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

Definición 4.7. Sea el espacio métrico (X,d). Una aplicación $f\colon (X,d) \longrightarrow (X,d)$ se llama *contractiva* si existe un número real $k \in (0,1)$ tal que $d(f(x),f(y)) < kd(x,y)$.

Proposición 4.25. *Cualquier aplicación contractiva $f\colon (X,d) \longrightarrow (X,d)$ es uniformemente continua.*

Teorema 4.26. ***(Teorema del punto fijo)*** *Si (X,d) es un espacio métrico completo y $f\colon (X,d) \longrightarrow (X,d)$ es una aplicación contractiva, existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración: Para cada $x \in X$, al ser f contractiva, es

$$d(f^n(x), f^{n-1}(x)) < kd(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) < \cdots < k^{n-1}d(f(x), x),$$

donde $f^n(x)$ denota el punto obtenido al aplicar f n veces a x. Como $k \in (0,1)$, se deduce que la sucesión $\{x_n = f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por lo tanto, converge a $x_0 \in X$. Como f es continua, $\{f(x_n) = f^{n+1}(x)\} \to f(x_0)$; pero $\{f(x_n) = f^{n+1}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con lo que forzosamente es $x_0 = f(x_0)$. Si existiera otro punto $y_0 \in X$ fijo para f, sería $d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) < kd(x_0, y_0) < d(x_0, y_0)$, lo cual es imposible. ∎

4.5. Ejercicios

1.- Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en X. Se supone que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ es un conjunto finito. Probar que ambas sucesiones poseen el mismo límite o que ambas no convergen.

2.- Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos distintos dos a dos. Sea A el rango de la sucesión y $f: A \longrightarrow A$ una aplicación biyectiva. Si $\text{lím}(x_n) = x$, probar que $\text{lím}(f(x_n)) = x$.

3.- Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X. Probar:

(i) $\text{lím}(x_n) = x$ si y sólo si $\text{lím}(d(x_n, x)) = 0$ en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$;

(ii) si $\text{lím}(x_n) = x$, entonces $\text{lím}(d(x_n, y)) = d(x, y)$ en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$;

(iii) si $\text{lím}(x_n) = x$ y $\text{lím}(y_n) = y$, entonces $\text{lím}(d(x_n, y_n)) = d(x, y)$ en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$;

(iv) si $\text{lím}(x_n) = x$, entonces $\text{lím}(y_n) = x$ si y sólo si $\text{lím}(d(x_n, y_n)) = 0$ en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$;

(v) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y $\text{lím}(d(x_n, y_n)) = 0$ en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$, entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

4.- Sea $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Se pide probar:

(i) si $\text{lím}(x_n) = x$ e $y < x$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, es $y < x_n$;

(ii) si $\text{lím}(x_n) = x \neq 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, x_n tiene el mismo signo que x;

(iii) si $\text{lím}(x_n) = x$, $\text{lím}(y_n) = y$ y $x < y$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, es $x_n < y_n$;

(iv) si $\text{lím}(x_n) = x$, $lim(y_n) = y$ y $x_n < y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$. Dar un ejemplo en el que $x = y$;

(v) si para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\text{lím}(x_n) = x$ y $\text{lím}(z_n) = x$, probar que $\text{lím}(y_n) = x$.

5.- Sea $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente y acotada superiormente. Probar que $\text{lím}(x_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. Enunciar el resultado análogo para una sucesión decreciente de números reales.

6.- Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes en $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$. Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{x_n \pm y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n{\cdot}y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\frac{x_n}{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($y_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$).

♣**7.-** En $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***diverge***, si para cada $K > 0$, existe $n_K \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_K$, es $|x_n| > K$. Se pide probar:

(i) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, no converge;

(ii) dar un ejemplo de sucesión real ni convergente ni divergente;

(iii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente no acotada superiormente, entonces diverge;

(iv) si $A \subset \mathbb{R}$ es no acotado, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A divergente;

(v) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de rango no acotado, existe una subsucesión divergente;

(vi) toda subsucesión de una sucesión divergente, diverge.

8.- Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Probar que si $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. ¿Bastaría con que $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ fueran convergentes?, ¿y $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$? Encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la recta real, no convergente, tal que $\{x_{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja para $k \geq 2$.

9.- Probar que son equivalentes en (X, d) los siguientes enunciados:

(i) todo subconjunto de X es completo;

(ii) X es completo y discreto;

(iii) toda sucesión de Cauchy en X es semiconstante.

10.- Probar que (X, d_{dis}) es un espacio métrico completo.

11.- Sea $(\mathbb{N}, d)$, donde $d(m, n) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Probar que la sucesión $\{x_n = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no converge: éste es un ejemplo de espacio métrico discreto no completo.

Sin embargo, el espacio $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ con la misma métrica (donde $\frac{1}{+\infty} = 0$), es completo.

12.- Sea (X, d) y $d^*(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$. Se pide probar:

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d) si y sólo si lo es en (X, d^*);

(ii) si (X, d) es completo, entonces (X, d^*) también lo es.

♣13.- Sea X el conjunto de las sucesiones reales acotadas y la distancia $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n|$. Estudiar la completitud del espacio métrico (X, d).

♣14.- Sea $X = C([0, 1], \mathbb{R})$. Estudiar la completitud de los espacios métricos (X, d) y (X, ρ), donde $d(f, g) = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) - g(x)|$ y $\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|$.

15.- Sean (X, d) e (Y, ρ) espacios métricos. Se pide probar:

(i) Si (X, d) e (Y, ρ) son isométricos, X es completo si y sólo si Y lo es;

(ii) si (X, d) e (Y, ρ) son homeomorfos, no hay relación entre la completitud de ambos espacios;

(iii) si (X, d) e (Y, ρ) son métricamente equivalentes, X es completo si y sólo si Y lo es;

(iv) si (X, d) e (Y, ρ) son topológicamente equivalentes, no hay relación entre la completitud de ambos espacios.

16.- Sea (X, d) un espacio métrico y D un conjunto denso en X, tal que toda sucesión de Cauchy en D converge en X. Probar que (X, d) es completo.

17.- Dados los espacios métricos $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$, consideremos el espacio métrico (X, d), donde $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ y d es cualquiera de las métricas producto $d_{\text{máx}}$, d_{sum} o d_{u}. Se pide probar:

(i) una sucesión converge en (X, d) si y sólo si las sucesiones coordenadas convergen en los espacios factores respectivos;

(ii) una sucesión es de Cauchy en (X, d) si y sólo si las sucesiones coordenadas lo son en los espacios factores respectivos;

(iii) (X, d) es completo si y sólo si cada uno de los espacios factores lo es.

18.- En (X, d) se pide probar:

(i) cualquier subsucesión de una sucesión de Cauchy, es de Cauchy;

(ii) una sucesión de Cauchy de rango finito es semiconstante, y por lo tanto convergente. Concluir que si X es finito, entonces el espacio métrico (X, d) es completo.

19.- Probar que el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, d_u)$ es completo. Decidir cuales de los siguientes subespacios euclídeos lo son: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$.

♣**20.-** En (X, d) se pide probar:

(i) si todo conjunto cerrado y acotado es completo, probar que (X, d) es completo;

(ii) si todo conjunto infinito y acotado posee puntos de acumulación, probar que (X, d) es completo.

21.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua y (X, d) completo. Probar que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d), entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y, ρ). Dar un contraejemplo en el caso en el que (X, d) no sea completo.

♣**22.-** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{x_m : m \geq n\}$. Se pide probar:

(i) si $\{x_n\} \to x$, entonces $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$;

(ii) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si y sólo si $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\delta(A_n)\} = 0$.

♣**23.-** Sea (X, d) un espacio métrico no completo. El objetivo de este ejercicio es el de construir un espacio métrico completo, asociado de manera canónica a (X, d) y "cercano" a él, en un sentido que se verá más adelante. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en (X, d); se pide probar:

(i) la relación binaria sobre $\mathfrak{R}$ dada por $\{x_n\}\mathfrak{R}\{y_n\}$ si y sólo si $d(x_n, y_n) \to 0$ en $(\mathbb{R}, d_u)$ (utilizar el ejercicio 3), es una relación de equivalencia sobre $\mathfrak{R}$. Llamamos $\tilde{x}$ a la clase de $\{x_n\}$ y $\widetilde{X}$ al espacio cociente $X/\mathfrak{R}$;

(ii) $\delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{lím}(d(x_n, y_n))$ define una distancia en $\widetilde{X}$;

(iii) la aplicación $f\colon (X, d) \longrightarrow (\widetilde{X}, \delta)$ que lleva cada $x \in X$ en la clase de la sucesión constante igual a x, es una isometría de X en una parte densa de $\widetilde{X}$;

(iv) $(\widetilde{X}, \delta)$ es completo.

Se dice que $(\widetilde{X}, \delta)$ es la *completación métrica* de (X, d), que "puede pensarse" como un subespacio denso en $\widetilde{X}$ (al ser isométrico a un subespacio denso de $(\widetilde{X}, \delta)$).

24.- En (X, d), probar que la unión finita (respectivamente, la intersección arbitraria) de subconjuntos completos es completo.

25.- Para los espacios métricos del ejercicio 12 del apartado 2.8, caracterizar las sucesiones convergentes y las de Cauchy y estudiar su completitud.

♣**26.-** Sea (X, d) un espacio métrico acotado y $(\Phi(X), \rho)$ como en el ejercicio 50 del apartado 2.8. Probar que (X, d) es completo si y sólo si $(\Phi(X), \rho)$ lo es.

♣**27.-** En (X, d) se introducen los siguientes tipos de conjuntos (que necesitaremos para el ejercicio 28), que son *topológicamente pequeños* por poseer interior vacío:

Definición 4.8. Un conjunto A se dice *nada denso*, si $X - \overline{A}$ es denso.

Definición 4.9. Un conjunto $A \subset X$ se dice *de primera categoría* o *magro*, si se puede escribir como una unión contable de conjuntos nada densos. Y se dice *de segunda categoría* si no es de primera.

Se pide demostrar:

(i) A es magro si y sólo si $A \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$, donde F_n es cerrado de interior vacío;

(ii) un subconjunto de un conjunto magro, es magro;

(iii) la unión contable de magros es un conjunto magro;

(iv) un conjunto numerable es magro si y sólo si ninguno de sus puntos es aislado;

(v) las rectas son conjuntos magros en el plano euclídeo.

♣**28.-** Probar el **teorema de Baire**: *si (X, d) es un espacio métrico completo, cualquier conjunto de primera categoría tiene interior vacío*.
Este resultado es de particular importancia, sobre todo en la construcción de demostraciones de existencia en Análisis (como el teorema de la aplicación abierta y el principio de la acotación uniforme).

♣**29.-** Sea (X, d) un espacio métrico completo. Deducir los siguientes corolarios del teorema de Baire:

(i) (X, d) es de segunda categoría;

(ii) cualquier conjunto abierto y no vacío en (X, d) es de segunda categoría;

(iii) la intersección de cualquier familia numerable de conjuntos abiertos y densos es un conjunto denso.

Los espacios métricos que verifican la propiedad enunciada en (iii) se llaman *espacios de Baire*. Es decir, hemos probado que todo espacio métrico completo es de Baire.

♣**30.-** En (X,d) se pide probar:

(i) si (X,d) es completo y $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, donde F_n es un conjunto cerrado, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\overset{\circ}{F_n} \neq \emptyset$;

(ii) si (X,d) es completo y $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, donde F_n es cerrado, entonces $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$ es un abierto denso;

(iii) si (X,d) es completo y numerable, el conjunto de los puntos aislados de X es un abierto denso;

(x) si (X,d) es completo y no posee puntos aislados, entonces X es no numerable.

♣**31.-** Deducir las siguientes aplicaciones del teorema de Baire en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$:

(i) todo cerrado numerable en $\mathbb{N}$ contiene una infinidad de puntos aislados, luego $\mathbb{R}$ es no numerable y no magro;

(ii) $\mathbb{Q}$ y el conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ son magros e $\mathbb{I}$ es de segunda categoría;

(iii) el conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ no posee ningún punto aislado, luego no es contable (ya lo sabíamos por la construcción del ejercicio 60 (iii) del apartado 2.8, pero es una forma alternativa de demostrarlo);

(iv) no existe ninguna función $f\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ cuyos puntos de continuidad sean exactamente los de $\mathbb{Q}$. Sin embargo, si existen tales funciones cuyos puntos de continuidad sean exactamente los de $\mathbb{I}$, por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es el menor entero tal que } x = \frac{m}{n} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

♣**32.-** En este ejercicio se trata de demostrar que existe $f\colon ([0,1], d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, una función continua que no posee derivada en ningún punto.
Es la típica demostración de teorema de existencia utilizando el teorema de Baire: se prueba que algún elemento del espacio debe tener una determinada propiedad, comprobando que el espacio es de segunda categoría y que el conjunto de los elementos que no poseen dicha propiedad forma un espacio de primera categoría.

En el ejercicio 14 de este tema se ha demostrado que el espacio métrico $(C([0,1],\mathbb{R}),d)$ (donde $d(f,g) = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x) - g(x)|$) es completo (luego de segunda categoría según el ejercicio 29 (ii)). Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de las funciones en $(C([0,1],\mathbb{R}),d)$ que poseen derivada en algún punto. Se trata de probar que este conjunto es de primera categoría (ver [W], página 186): para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{E}_n = \left\{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) : \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \forall h \in \left(0, \frac{1}{n}\right], \text{ es } \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq n \right\}.$$

Se pide probar:

(i) $\mathcal{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$,

(ii) el interior de $\mathcal{E}_n$ es vacío,

(iii) $\mathcal{E}_n$ es cerrado.

Capítulo 5

Conexión en espacios métricos

5.1. Espacios y conjuntos conexos

Proposición 5.1. *En* (X,d) *son equivalentes las siguientes condiciones:*

(i) existen abiertos $U, V \subset X$ *no vacíos, disjuntos tales que* $U \cup V = X$*;*

(ii) existen cerrados $F, G \subset X$ *no vacíos, disjuntos tales que* $F \cup G = X$*;*

(iii) existe $A \subset X$ *propio (es decir,* $\emptyset \neq A \neq X$*) abierto y cerrado a la vez;*

(iv) existe $A \subset X$ *propio con* $\mathrm{fr}(A) = \emptyset$*;*

(v) existe una aplicación $f\colon (X,d) \longrightarrow (\{0,1\}, d_{\mathrm{u}})$ *continua y sobreyectiva.*

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$ Basta con tomar $F = U = X - V$ y $G = V = X - U$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Basta con tomar $A = F = X - G$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ El conjunto A tiene frontera vacía por ser abierto y cerrado a la vez.

$(iv) \Rightarrow (v)$ La aplicación $\chi_A\colon (X,d) \longrightarrow (\{0,1\}, d_{\mathrm{u}})$ es continua (al ser $\mathrm{fr}(A) = \emptyset$) y sobreyectiva (al ser A propio).

$(v) \Rightarrow (i)$ Basta con tomar $U = f^{-1}(\{0\})$ y $V = f^{-1}(\{1\})$. ∎

Definición 5.1. Si (X,d) verifica cualquiera de las condiciones equivalentes de la proposición 5.1, se dice que es un *espacio métrico disconexo*. A los conjuntos de (i) o (ii) se les llama una *disconexión* de (X,d).

Definición 5.2. (X,d) es *conexo* si no es disconexo, es decir, intuitivamente está formado "de una única pieza". $A \subset X$ se llama *conexo* si el espacio métrico (A, d_A) lo es.

Lema 5.2. *En* (X,d)*,* $A \subset X$ *es disconexo si y sólo si existen abiertos* U *y* V *en* (X,d)*, tales que* $U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$*,* $U \cap V \cap A = \emptyset$ *y* $A \subset U \cup V$*.*

Lema 5.3. *En (X,d), $A \subset X$ es disconexo si y sólo si existen cerrados F y G en (X,d), tales que $F \cap A \neq \emptyset \neq G \cap A$, $F \cap G \cap A = \emptyset$ y $A \subset F \cup G$.*

La conexión es una propiedad absoluta, en el siguiente sentido:

Lema 5.4. *Sean (X,d) y $B \subset A \subset X$. B es conexo en (A,d_A) si y sólo si es conexo en (X,d).*

Ejemplos 5.1. Algunos ejemplos de espacios métricos conexos y disconexos son:

(i) en cualquier espacio métrico (X,d), los átomos (conjuntos formados por un único punto) son conexos;

(ii) si (X,d) es un espacio métrico discreto (ejercicio 16 del apartado 2.8), $A \subset X$ es conexo si y sólo si se reduce a un punto;

(iii) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, son disconexos $(0,1] \cup [2,5)$ y $\mathbb{R} - \{0\}$.

Teorema 5.5. *Sean (X,d) y $A \subset X$ conexo. Si $B \subset X$ es tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo. En particular, la clausura de todo conjunto conexo es conexa.*

Demostración: Supongamos que B no es conexo. Por el lema 5.2, existen abiertos U y V en (X,d), tales que $U \cap B \neq \emptyset \neq V \cap B$, $U \cap V \cap B = \emptyset$ y $B \subset U \cup V$. Como $A \subset B$ es conexo, deberá ser $U \cap A = \emptyset$ ó $V \cap A = \emptyset$. Supongamos que $U \cap A = \emptyset$, entonces $U \cap \overline{A} = \emptyset$ al ser U abierto. Como $B \subset \overline{A}$, será $U \cap B = \emptyset$, lo que es absurdo. ∎

Observación 5.1. El recíproco no es cierto: se verá en el teorema 5.14 que $\mathbb{Q}$ no es conexo en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, pero $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ si lo es (teorema 5.14).

Observación 5.2. No existe un resultado análogo al teorema 5.5 para el interior o la frontera:

(i) en $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$, el conjunto $A = \overline{B}((1,0),1) \cup \overline{B}((-1,0),1)$, ya que las bolas son conexas en cualquier espacio euclídeo y usando los teoremas 5.6 y 5.14, y el corolario 5.18. Pero $\overset{\circ}{A}$ no es conexo;

(ii) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $[0,1]$ es conexo (proposición 5.13), pero su frontera no lo es.

Observación 5.3. La conexión no se comporta bien respecto a las operaciones de conjuntos:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, los conjuntos $A = \{0\}$ y $B = \{1\}$ son conexos, pero su unión $A \cup B = \{0,1\}$ no lo es;

(ii) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $A = (0,1)$ es conexo (teorema 5.14), pero su complementario $\mathbb{R} - A$ no lo es;

(iii) en $(\mathbb{R}^2, d_u)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x \geq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x \leq 0\}$ son conjuntos conexos (son ambos homeomorfos a un intervalo cerrado, y basta con utilizar el teorema 5.14 y el corolario 5.18), pero su intersección $A \cap B = \{(0, 1), (0, -1)\}$ no lo es.

Pero, existen resultados parciales:

Teorema 5.6. *En (X, d), se verifica:*

(i) si $\{C_i : i \in I\}$ es una familia de conexos y existe $i_0 \in I$ tal que $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ para cada $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo;

(ii) si $\{C_i : i \in I\}$ es una familia de conexos tales que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo.

Demostración: (ii) se deduce trivialmente de (i). Supongamos que $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ no es conexo, es decir, existen abiertos U y V en (X, d), tales que $U \cap C \neq \emptyset \neq V \cap C$, $U \cap V \cap C = \emptyset$ y $C \subset U \cup V$. Para cada $i \in I$, es $U \cap V \cap C_i = \emptyset$ y $C_i \subset U \cup V$, y por la conexión de C_i, debe ser $U \cap C_i = \emptyset$ ó $V \cap C_i = \emptyset$. Supongamos que $U \cap C_{i_0} = \emptyset$, con lo que $C_{i_0} \subset V$. Sean $I_U = \{i \in I : U \cap C_i = \emptyset\}$ y $I_V = \{i \in I : V \cap C_i = \emptyset\}$. Si $i \in I_V$, es $C_i \cap C_{i_0} \subset C_i \cap V = \emptyset$, contra la hipótesis, así que $I_V = \emptyset$. Entonces, para cada $i \in I$ es $U \cap C_i = \emptyset$, con lo que $U \cap C = \emptyset$, en contra de la hipótesis. ∎

5.2. Componentes conexas

En todo espacio métrico existen conjuntos conexos, al menos los átomos (conjuntos formados por un único punto). Se trata ahora de determinar los conexos "maximales" en (X, d). El tamaño y número de estos conexos dará una idea de "cuanto se aleja" X de ser conexo.

Definición 5.3. Sean (X, d), $x \in X$ y $\mathcal{F}(x) = \{C \subset X : C \text{ es conexo y } x \in X\}$. Claramente, $\mathcal{F}(x)$ es no vacío, ya que al menos $\{x\} \in \mathcal{F}(x)$. Como $\bigcap_{C \in \mathcal{F}(x)} C \neq \emptyset$, el teorema 5.6 garantiza que $C(x) = \bigcup_{C \in \mathcal{F}(x)} C$ es un conjunto conexo, llamado *componente conexa* del punto x.

Lema 5.7. $C(x)$ *es el mayor conexo que contiene al punto* x.

Lema 5.8. *En (X, d), el conjunto de las componentes conexas forma una partición del espacio.*

Demostración: Es claro que $X = \bigcup_{x \in X} C(x)$, al ser $x \in C(x)$. Si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, el conjunto $C(x) \cup C(y)$ es conexo y $x \in C(x) \cup C(y)$. Como $C(x)$ es el mayor conexo que contiene a x, debe ser $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$, luego $C(y) \subset C(x)$. Aplicando un argumento similar para y, se deduce que $C(y) = C(x)$. ∎

Esta partición determina una relación de equivalencia en X: $x \sim y$ si y sólo si x e y pertenecen a la misma componente conexa, es decir, si y sólo si $C(x) = C(y)$. Las clases de equivalencia respecto a esta relación son justamente las *componentes conexas*.

Lema 5.9. (X, d) *es conexo si y sólo si existe una única componente conexa.*

Teorema 5.10. *Las componentes conexas en* (X, d) *son conjuntos cerrados.*

Demostración: Sea C una componente conexa. Por el teorema 5.5, $\overline{C}$ es también conexo, y la propiedad de maximalidad implica que $C = \overline{C}$. ∎

5.3. Espacios totalmente disconexos

Definición 5.4. El espacio métrico (X, d) se llama *totalmente disconexo*, si para cada $x \in X$ es $C(x) = \{x\}$.

Ejemplos 5.2. Algunos ejemplos de espacios totalmente disconexos son:

(i) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ son totalmente disconexos;

(ii) si (X, d) es discreto y con más de un punto, es totalmente disconexo.

Lema 5.11. (X, d) *es totalmente disconexo si y sólo si las componentes conexas se reducen a puntos.*

5.4. Conexión en espacios euclídeos

Definición 5.5. Un *intervalo* I en $\mathbb{R}$ es un conjunto convexo, es decir, si $a, b \in I$, para cada $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq b$, es $c \in I$.

Observación 5.4. Así, $I \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo si existen $a, b \in I$ y $a < c < b$, tal que $c \notin I$.

Observación 5.5. Son intervalos para $a, b \in \mathbb{R}$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $[a, a] = \{a\}$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ y $\mathbb{R}$.

Proposición 5.12. *Si A es conexo en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, es un intervalo.*

Demostración: Supongamos que A tiene más de un punto (si se reduce a un punto, la propiedad queda probada). Sean $a, b \in A$, $a < b$ y supongamos que existe $a < c < b$, tal que $c \notin A$. Entonces, $U = (-\infty, c)$ y $V = (c, \infty)$ son abiertos en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, tales que $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$, $A \cap U \cap V = \emptyset$ y $A \subset U \cup V = \mathbb{R} - \{c\}$, en contra de la conexión de A. ∎

Proposición 5.13. *El intervalo $[a, b]$ es conexo en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, para $a < b$.*

Demostración: Si $[a, b]$ no fuera conexo, por el lema 5.3, existirían F y G cerrados en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, tales que $F \cap [a, b] \neq \emptyset \neq G \cap [a, b]$, $F \cap G \cap [a, b] = \emptyset$ y $[a, b] \subset F \cup G$). Como $[a, b]$ es cerrado en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $F \cap [a, b]$ y $G \cap [a, b]$ son también cerrados en $\underline{(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})}$. Como $F \cap [a, b]$ está acotado superiormente por b, existe $c = sup\{F \cap [a, b]\} \in \overline{F \cap [a, b]} = F \cap [a, b]$. Además, $F \cap [a, b]$ es abierto en $([a, b], d_{\mathrm{u}})$ (ya que $F \cap [a, b] = (\mathbb{R} - G) \cap [a, b]$), luego existe $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \subset F \cap [a, b]$. Supongamos que $c \neq b$, entonces existe $d \in [a, b]$, tal que $c < d < c + \delta$, y en tal caso $d \in F \cap [a, b]$, contra la definición de supremo. Así, $b = c$, y por lo tanto $b \in F \cap [a, b]$. Un argumento similar prueba que $b \in G \cap [a, b]$, con lo que se llega a una contradicción. ∎

Teorema 5.14. *A es conexo en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ si y sólo si es un intervalo.*

Demostración: Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $a \in A$. Para cada $x \in A$, sea $I_x = [x, a]$ si $x \leq a$ e $I_x = [a, x]$ si $a \leq x$. La familia $\{I_x : x \in A\}$ es una familia de conexos en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ según la proposición 5.13. Además, $a \in \bigcap\limits_{x \in A} I_x$, con lo que por el teorema 5.6, $A = \bigcup\limits_{x \in A} I_x$ es conexo. ∎

Teorema 5.15. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$ es conexo.*

Demostración: $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ es conexo, pues $\mathbb{R}$ es un intervalo. Y $\mathbb{R}^n$ puede pensarse como la unión de todas las rectas pasando por el origen de coordenadas. Basta con utilizar el corolario 5.18 y el teorema 5.6. ∎

5.5. Conexión y continuidad

Teorema 5.16. *Sea* $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *continua y sobreyectiva. Si* (X,d) *es conexo,* (Y,ρ) *también lo es.*

Demostración: Si (Y,ρ) no fuera conexo, existiría $A \subset Y$ propio abierto y cerrado a la vez. Entonces, $f^{-1}(A)$ sería propio, abierto y cerrado en (X,d), contra la hipótesis. ∎

Corolario 5.17. *Sea* $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *continua. Si* A *es conexo en* (X,d)*, entonces* $f(A)$ *es conexo en* (Y,ρ)*.*

Corolario 5.18. *Sea* $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *un homeomorfismo.* (X,d) *es conexo si y sólo si* (Y,ρ) *lo es.*

Teorema 5.19. ***(Teorema del valor intermedio)*** *Sean* $f\colon (\mathbb{R},d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$ *continua y* $a,b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *y* $f(a) \neq f(b)$*. Entonces,* f *toma cualquier valor entre* $f(a)$ *y* $f(b)$*.*

Demostración: Supongamos que $f(a) < f(b)$. Como $f([a,b])$ es conexo, deberá ser un intervalo, y en particular, $[f(a),f(b)] \subset f([a,b])$. ∎

5.6. Ejercicios

1.- En un espacio métrico (X,d), probar que son equivalentes:

(i) (X,d) es conexo,

(ii) para cada $x,y \in X$; existe un conjunto conexo C_{xy} tal que $x,y \in C_{xy}$;

(iii) para toda función continua $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$, $f(X)$ es conexo;

(iv) toda función continua $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R},d_{\mathrm{u}})$ tal que $f(X)$ toma valores negativos y positivos, se anula en al menos un punto;

(v) toda función continua $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ (donde (Y,ρ) es un espacio métrico discreto) es constante;

(vi) todo subconjunto propio de X posee frontera no vacía.

2.- Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ conexo. Si $B \subset X$ es tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap (X - B) \neq \emptyset$, entonces se tiene $A \cap \mathrm{fr}(B) \neq \emptyset$.

3.- Sean A y B subconjuntos conexos en (X,d). Se pide:

(i) probar que $A \cup B$ es conexo si y sólo si $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset$. Escribir explícitamente el caso en que ambos conjuntos son cerrados (respectivamente, abiertos);

(ii) aplicarlo al caso en que $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$, $A = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = sen\left(\frac{1}{x}\right)\}$ y $B = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$;

(iii) si $\emptyset \neq \mathrm{fr}(A) \subset B$, probar que $A \cup B$ es conexo.

4.- En (X, d), sean A y B subconjuntos cerrados (respectivamente, abiertos). Probar que si $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos. Ver que la condición impuesta a A y B es necesaria.

5.- En (X, d) conexo, probar:

(i) si (X, d) no es acotado, toda esfera es no vacía;

(i) para cada par de puntos $x, y \in X$, existe $z \in X$, tal que $d(x, z) = d(y, z)$;

(ii) si $Card(X) \geq 2$, entonces $Card(X) \geq Card(\mathbb{R})$;

(iii) si $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es continua y no constante, entonces $f(X)$ es no contable.

6.- Sean (X, d) y $a, b \in X$. Se supone que existe $A \subset X$ abierto y cerrado, tal que $a \in A$ y $b \notin A$. Probar que ningún subconjunto conexo de X puede contener a a y b simultáneamente.

7.- Decidir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas en (X, d):

(i) Si A es conexo, entonces $\overset{\circ}{A}$ y $\mathrm{fr}(A)$ son conexos;

(ii) si A, B conexos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos;

(iii) si $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ es continua y sobreyectiva, X tiene m componentes conexas e Y tiene n componentes conexas, entonces $m \geq n$;

(iv) la imagen continua de un conjunto disconexo, es disconexa.

8.- Sea (X, d) un espacio métrico donde toda bola abierta es conexa. Probar que X es conexo.

9.- Sea (X, d) y una familia de conjuntos conexos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que su unión es conexa.

10.- En (X, d) un espacio métrico, probar:

(i) si A es conexo, no vacío, abierto y cerrado en X, entonces es una componente conexa;

(ii) si A es abierto y cerrado en X y C es conexo, entonces es $C \subset A$ ó $C \subset X - A$;

(iii) si C es la componente conexa de x, entonces está contenida en cada conjunto abierto y cerrado que contiene a x.

♣**11.-** Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ una aplicación continua entre dos espacios métricos. Se dice que f es *localmente constante* si para cada $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que f es constante en $B(x, r_x)$. Probar que si (X,d) es conexo y f es localmente constante, es constante.

12.- La conexión ¿se conserva bajo equivalencias topológicas? ¿bajo equivalencias métricas? ¿bajo isometrías?

13.- Si (X,d) posee una cantidad finita de componentes conexas, probar que son abiertas y cerradas.

14.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ un homeomorfismo. Probar que la imagen de una componente conexa, es una componente conexa. En particular, (X,d) es conexo si y sólo si (Y,ρ) lo es.

15.- Probar que el producto de espacios métricos es conexo si y sólo si cada espacio factor lo es.

16.- Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ continua y (X,d) es conexo. Probar que el grafo de f, G_f (definición (1.19), es conexo en el espacio producto $(X \times Y, d)$, donde d es cualquiera de las métricas producto $d_{\text{máx}}$, d_{sum} o d_{u}.

17.- Describir las aplicaciones continuas $f\colon (\mathbb{R}, d_{\text{u}}) \longrightarrow (X,d)$, donde (X,d) es un espacio métrico discreto.

18.- Utilizando el ejercicio 37 del apartado 3.4, probar que los conjuntos siguientes son conexos en el espacio euclídeo correspondiente: $\mathbb{S}^1 - \{(0,1)\}$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n - \{(0,\dots,0,1)\}$, $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{R}^n - \{(0,\cdots,0)\}$ (para $n > 1$).

19.- Probar que los siguientes conjuntos de $(\mathbb{R}^2, d_{\text{u}})$ no son dos a dos homeomorfos: $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \geq 1\}$, $B = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \geq 0\}$ y $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

20.- Probar que no son homeomorfos los siguientes conjuntos de $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$: $(0,1)$, $(0,1]$ y $[0,1]$. Además, ningún subconjunto de la recta real es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, d_{\text{u}})$.

21.- Probar que $(\mathbb{Q}, d_{\text{u}})$ y $(\mathbb{Q}, d_{\text{dis}})$ poseen los mismos conjuntos conexos. ¿Son homeomorfos estos dos espacios métricos? ¿Son topológicamente equivalentes?

22.- Demostrar que en el plano euclídeo $A = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}$ ó $y \in \mathbb{Q}\}$ es conexo y $B = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{Q}\}$ no lo es.

♣**23.-** Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices reales cuadradas $n \times n$, que se identifica al espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n^2}$. Probar que el conjunto de las matrices inversibles $G_n \subset M_n(\mathbb{R})$, es un abierto formado de dos componentes conexas.

24.- Probar que un polinomio real impar posee al menos una raíz real.

25.- Dados $A, B, I, J \subset \mathbb{R}$, donde I y J son intervalos, se pide probar:

(i) si $f\colon (A, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ es monótona y $f(A)$ es denso en J, entonces f es continua. En particular, si $f\colon (A, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ es monótona y $f(A)$ es un intervalo, entonces f es continua;

(ii) si $f\colon (I, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ es continua e inyectiva, entonces f es monótona y es un homeomorfismo de I sobre el intervalo $f(I)$;

(iii) si $f\colon (I, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (J, d_{\mathrm{u}})$ es una biyección, entonces f es homeomorfismo si y sólo si f es monótona.

26.- Sea $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continua. Si $\min\limits_{x \in X}\{f(x)\} < c < \max\limits_{x \in X}\{f(x)\}$, demostrar el conjunto $X - \{f^{-1}(c)\}$ es disconexo.

♣**27.-** Sea $f\colon ([0,1], d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continua tal que $f(0) = f(1)$. Para cada $n > 1$, probar que existe $x \in [0,1]$, tal que $x + \frac{1}{n} \in [0,1]$ y $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

28.- Probar que todo abierto de la recta real se puede escribir como una reunión, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos dos a dos disjuntos.

29.- Considerando los espacios euclídeos correspondientes, probar:

(i) si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}^2$ son homeomorfos, entonces $\overset{\circ}{B} = \emptyset$;

(ii) no existe $f\colon (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continua e inyectiva. Concluir que $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ y $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$ no son homeomorfos.

30.- Probar que no existe $f\colon ([0,1], d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continua, tal que $x \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $f(x) \notin \mathbb{Q}$.

31.- Describir las funciones continuas $f\colon ([0,2] \cup (4,6], d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, d_{\mathrm{u}})$.

32.- Se consideran las letras mayúsculas como subconjuntos del plano euclídeo:

A B C D E F G H I J L M N O P Q R S T U V X Z,

desprovistas de extremidades. Se pide agruparlas por letras homeomorfas.

33.- Para los espacios métricos del ejercicio 12 del apartado 2.8, estudiar la conexión y determinar la componente conexa de cada punto.

34.- Para $n \geq 1$, sea $f\colon (\mathbb{S}^n, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continua. Probar que existe $x \in \mathbb{S}^n$, tal que $f(x) = f(-x)$.

35.- Sean $D = \{(x,0) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\}$ y $g\colon (D, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (D, d_{\mathrm{u}})$ un homeomorfismo. Probar que $g(0,0) = (0,0)$ y que la restricción de g al conjunto $\{(-1,0),(1,0),(0,1)\}$ es una permutación de este conjunto.

36.- Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{I}, y \geq 0\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y < 0\}$, probar que $A \cup B$ es conexo en $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{u}})$.

♣**37.-** Sea (X,d) un espacio métrico y las relaciones binarias $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ dadas por:

$x\mathfrak{R}_1 y$ si y sólo si existe una parte conexa C que contiene a ambos puntos;

$x\mathfrak{R}_2 y$ si y sólo si todo abierto y cerrado conteniendo a x, contiene a y.

Se pide probar:

(i) $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ son relaciones de equivalencia sobre X;

(ii) con las notaciones obvias, probar que $[x]_1 = C(x)$ y $[x]_2$ es la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados que contienen a x. Observar que ambos conjuntos son cerrados;

(iii) para cada $x \in X$, $[x]_1 \subset [x]_2$;

(iv) si $A \subset \mathbb{R}$, $[x]_1 = [x]_2$ en (A, d_{u});

(v) sea $C = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$, unión de los conjuntos $A = \{(\frac{1}{n}, y) : n \in \mathbb{N}, -1 \leq y \leq 1\}$ y $B = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1, y \neq 0\}$. Probar que $[x]_1 \neq [x]_2$ en (C, d_{u}).

38.- Probar las siguientes propiedades:

(i) si $Y = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ y $f\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (Y, d_{\mathrm{u}})$ es continua y sobreyectiva, entonces $f^{-1}((0,0))$ debe contener al menos tres puntos;

(ii) si $f\colon (\mathbb{S}^1, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow ([0,1], d_{\mathrm{u}})$ es continua y sobreyectiva, para cada $c \in (0,1)$, el conjunto $f^{-1}(c)$ debe contener más de un punto.

♣**39.-** Si (X,d) es conexo y $k \in \mathbb{N}$, x se llama un *punto de corte de orden* k, si $X - \{x\}$ posee k componentes conexas. Se pide:

(i) probar que se trata de una propiedad que se preserva por homeomorfismos;

(ii) en la recta real, ¿qué tipos de puntos de corte poseen los intervalos $[0, 1]$, $(0, 1]$ y $(0, 1)$?

(iii) si $n > 1$, $(\mathbb{R}^n, d_u)$ posee un punto de corte de orden 1, luego $(\mathbb{R}^n, d_u)$ y $(\mathbb{R}, d_u)$ no son homeomorfos.

♣40.- La conexión es una propiedad difícil de manejar, al tratarse de una propiedad en sentido negativo: un espacio es conexo si "no existe" una separación no trivial por abiertos disjuntos. La conexión por caminos, que vamos a introducir y que está muy relacionada con la conexión, posee la ventaja de ser una propiedad *algebraica* y en sentido positivo.

Definición 5.6. Un *camino* en un espacio métrico (X, d) es una aplicación continua $\sigma\colon ([0, 1], d_u) \longrightarrow (X, d)$. Si $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, se dice que σ es un camino de a a b.

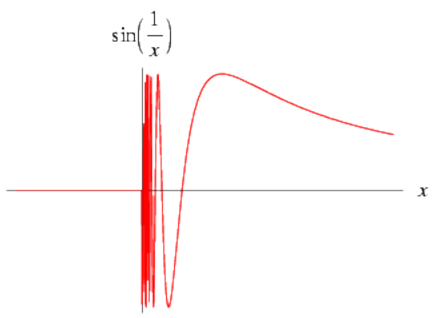
Definición 5.7. (X, d) es *conexo por caminos*, si para todo par de puntos $a, b \in X$ existe un camino que los une.

Probar que si (X, d) es conexo por caminos, es conexo. Comprobar que el recíproco no es cierto:

la *curva seno topológico* es el subespacio del plano euclídeo

$$A = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0 \right\}.$$

A es conexo, pero no es conexo por caminos.



♣41.- Veamos que existe un recíproco parcial de la propiedad enunciada en el ejercicio 40.

Definición 5.8. (X, d) es *localmente conexo por caminos*, si para cada $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(x, \varepsilon)$ es conexa por caminos.

Demostrar que si (X, d) es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos. Es decir, la curva seno topológico no es localmente conexa por caminos.

♣42.- Demostrar las siguientes propiedades:

(i) los espacios discretos no son conexos por caminos;

(ii) en $(\mathbb{R}, d_u)$, los conjuntos conexos y los conexos por caminos coinciden;

(iii) en $(\mathbb{R}^n, d_u)$ para $A \subset \mathbb{R}^n$, se verifica

a) si A es conexo y abierto, es conexo por caminos;

b) si A es convexo, es conexo por caminos;

c) si A es contable y $n > 1$, $\mathbb{R}^n - A$ es conexo por caminos;

(iv) la imagen continua de un espacio conexo por caminos, es conexa por caminos;

(v) la unión de cualquier familia de conjuntos conexos por caminos con un punto en común, es un conjunto conexo por caminos;

(vi) la clausura de un conjunto conexo por caminos, no es en general conexa por caminos.

♣**43.-** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$. En $(\mathbb{R}^n, d_u)$, se pide probar:

(i) si A es acotado, $\mathbb{R}^n - A$ tiene una componente conexa no acotada;

(ii) si A es convexo, es conexo. El recíproco no es cierto.

♣**44.-** Sea $(\mathbb{P}, d_u)$ el *espacio peine*, es decir:

$$\mathbb{P} = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Se pide probar:

(i) $\mathbb{P}$ conexo por caminos y $\mathbb{P} - \{(0,0)\}$ es conexo;

(ii) si $A = \{0\} \times (0,1)$, $\mathbb{P} - A$ es conexo y posee dos componentes conexas por caminos;

(iii) si $B = \{0\} \times \mathbb{I}$ y $C = (\mathbb{P} - A) \cup B$, C es conexo y posee una cantidad no contable de componentes conexas por caminos.

Capítulo 6

Compacidad en espacios métricos

6.1. Espacios y conjuntos compactos

Definición 6.1. Si $X \neq \emptyset$, un *cubrimiento* de X (respectivamente, de $A \subset X$) es una familia $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$, tal que $X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ (respectivamente, $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$).

Definición 6.2. Un *subrecubrimiento* de un cubrimiento $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i \in I}$ de X es una subfamilia $\mathcal{V} = \{A_i\}_{i \in J}$ (es decir, $J \subset I$), que sigue cubriendo X. Si J es finito, se habla de *subrecubrimiento finito*.

Definición 6.3. En (X, d), si $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de X y A_i es abierto para cada $i \in I$, se habla de un *cubrimiento por abiertos*.

Definición 6.4. (X, d) es *compacto* si todo cubrimiento por abiertos de X posee un subrecubrimiento finito. Y $A \subset X$ es *compacto* si (A, d_A) lo es.

Observación 6.1. Se trata de una generalización topológica del concepto de conjunto finito: en (X, d), si A es finito, es claramente compacto. Vamos a ver que existen conjuntos compactos infinitos, aunque sus propiedades los hacen semejantes a los conjuntos finitos.

Ejemplos 6.1. Algunos ejemplos de espacios compactos son:

(i) $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ no es compacto, ya que la familia de abiertos $\{(n-1, n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ cubre $\mathbb{R}$, pero no posee subrecubrimiento finito;

(ii) si (X, d) es discreto (ejercicio 16, apartado 2.8), $A \subset X$ es compacto si y sólo si es finito;

(iii) $((0, 1], d_{\mathrm{u}})$ no es compacto, ya que la familia de abiertos $\{(\frac{1}{n}, 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$ cubre $(0, 1]$, pero no posee subrecubrimiento finito

Por dualidad con el concepto de abierto, se obtiene la siguiente caracterización:

Teorema 6.1. *(X, d) es compacto si y sólo si para cada familia de cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$ tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, existe una familia finita $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ tal que $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} = \emptyset$.*

Definición 6.5. Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ en X tiene la *propiedad de intersección finita* si para toda subfamilia finita $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ es $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$.

A partir de esta definición, se obtiene una nueva caracterización de compacidad:

Corolario 6.2. *(X, d) es compacto si y sólo si para cualquier familia de cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$ con la propiedad de intersección finita, es $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

La compacidad es una propiedad absoluta, en el siguiente sentido:

Proposición 6.3. *A es compacto en (X, d) si y sólo si para cualquier familia de abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ en (X, d) tales que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, existe una subfamilia finita $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ tal que $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.*

Teorema 6.4. *Si A es cerrado en (X, d) compacto, entonces A es compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en (X, d) que cubren A. Entonces $X = (X - A) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$. Como $X - A$ es abierto, hemos encontrado un cubrimiento por abiertos del compacto X, por lo que existe $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$, tal que $X = (X-A) \cup \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$, y por lo tanto $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$. ∎

El siguiente resultado asemeja un compacto a un punto:

Lema 6.5. *Sea A compacto en (X, d) y $x \notin A$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.*

Demostración: Para cada $a \in A$ es $a \neq x$. La propiedad de Hausdorff (teorema 2.10) garantiza que si $d(a, x) = r_a$, es $B(a, \frac{r_a}{2}) \cap B(x, \frac{r_a}{2}) = \emptyset$. Pero $A \subset \bigcup_{a\in A} B(a, \frac{r_a}{2})$, y al ser compacto, existe $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$, de modo que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{r_{a_i}}{2})$. Si tomamos $\varepsilon = \text{mín}\{\frac{r_{a_i}}{2} : 1 \leq i \leq n\}$, es $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. ∎

Ejemplo 6.1. El lema anterior demuestra que $(0,1]$ no es compacto en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, ya que $0 \notin A$ y para cada $\varepsilon > 0$ es $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (0,1] \neq \emptyset$.

Teorema 6.6. *Si A es compacto en (X,d), entonces A es cerrado.*

Demostración: Si $x \notin A$, por el lema 6.5, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, con lo que $x \notin \overline{A}$. ∎

Teorema 6.7. *Si A es compacto en (X,d), entonces A está acotado.*

Demostración: Sea el cubrimiento $A \subset \bigcup\limits_{a \in A} B(a,1)$. Como A es compacto, existe una familia finita $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$, tal que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(a_i,1)$. Si $a, b \in A$, existen $1 \leq i, j \leq n$ tales que $a \in B(a_i,1)$ y $b \in B(a_j,1)$. Entonces, $d(a,b) \leq d(a,a_i) + d(a_i,a_j) + d(a_j,b) < 2 + d(a_i,a_j)$. Si $k = \text{máx}\{d(a_i,a_j) : 1 \leq i,j \leq n\}$, es claro que para cada $a, b \in A$ es $d(a,b) < 2 + k$. ∎

Teorema 6.8. *La unión finita y la intersección arbitraria de compactos es compacta.*

Observación 6.2. La unión arbitraria de compactos no es compacta: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $\{x\}$ es compacto, pero $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ no lo es.

Observación 6.3. Según los teoremas 6.6 y 6.7, un compacto A en (X,d) es cerrado y acotado. Pero el recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{dis}})$, $\mathbb{R}$ es cerrado y acotado, pero no es compacto.

6.2. Compacidad y continuidad

Las funciones continuas llevan compactos en compactos:

Teorema 6.9. *Sea $f : (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ continua. Si A es compacto en (X,d), entonces $f(A)$ es compacto en (Y,ρ).*

Demostración: Sea $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos en (Y,ρ) que cubren $f(A)$. Entonces, $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos en (X,d) que cubren A. Como A es compacto, existe $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$, tal que $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})$, y por lo tanto $f(A) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{i_k}$. ∎

Corolario 6.10. *Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ continua y (X,d) compacto. Si A es cerrado en (X,d), entonces $f(A)$ es cerrado en (Y,ρ).*

Demostración: A es cerrado en el compacto (X,d), luego es compacto por el teorema 6.4. El teorema 6.9 garantiza que $f(A)$ es compacto en (Y,ρ), y por lo tanto cerrado, según el teorema 6.6. ∎

Observación 6.4. La compacidad es esencial en el corolario 6.10: $f\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua, $\mathbb{R}$ es cerrado y $f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ no lo es.

Teorema 6.11. *Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ biyectiva y continua. Si (X,d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración: El corolario 6.10 afirma que f^{-1} es continua. ∎

Observación 6.5. La compacidad de (X,d) es esencial: $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{dis}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ es continua y biyectiva, pero no es un homeomorfismo.

Teorema 6.12. *Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ continua. Si (X,d) es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$; para cada $x \in X$ existe $\delta_x = \delta(x,\varepsilon) > 0$ tal que $f\left(B_X(x,\delta_x)\right) \subset B_Y(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$. Pero, $X = \displaystyle\bigcup_{x\in X} B_X\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$, por lo que existe $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ tal que $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_X\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$. Sea $\delta_0 = \min\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2} : 1 \le i \le n\right\}$; éste es el valor que satisface la condición de continuidad uniforme: en efecto, si $a,b \in X$ y $d(a,b) < \delta_0$, existe $1 \le i \le n$ tal que $a \in B_X(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$, y entonces $d(b,x_i) \le d(b,a) + d(a,x_i) < \delta_0 + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i}$. Luego, $a,b \in B_X(x_i,\delta_{x_i})$, con lo que la continuidad de f garantiza que $f(a), f(b) \in B_Y(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2})$, y entonces es $\rho(f(a),f(b)) < \varepsilon$. ∎

6.3. Compacidad secuencial

Definición 6.6. (X,d) es *secuencialmente compacto*, si toda sucesión en (X,d) posee una subsucesión convergente.

Ejemplo 6.2. $((0,1], d_{\mathrm{u}})$ no es secuencialmente compacto, pues la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones convergentes.

Definición 6.7. (X, d) posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass*, si todo conjunto infinito $A \subset X$ posee puntos de acumulación.

Teorema 6.13. (X, d) *es secuencialmente compacto si y sólo si posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass.*

Demostración: Sea A infinito, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos distintos dos a dos en A y supongamos que la subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \overline{A}$: como es de términos distintos dos a dos, es $x \in A'$. Recíprocamente, supongamos que (X, d) posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si su rango es finito, existe una subsucesión constante, que converge. En caso contrario, si $A = Rg\,(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, es $A' \neq \emptyset$. Para $x \in A'$, existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A, de términos distintos dos a dos, que se puede elegir como una subsucesión de la primera, y que converge a x. ∎

Teorema 6.14. *Si* (X, d) *es secuencialmente compacto, entonces es completo.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Por hipótesis, existe una subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\} \to x \in X$. El corolario 4.18 garantiza que $\{x_n\} \to x$. ∎

Ejemplo 6.3. El recíproco no es cierto: $(\mathbb{R}, d_{\text{dis}})$ es completo y no es secuencialmente compacto, pues la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones convergentes.

Definición 6.8. (X, d) es *totalmente acotado* o *precompacto*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de puntos $\{x_1^\varepsilon, \dots, x_n^\varepsilon\} \subset X$, tal que $X = B(x_1^\varepsilon, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n^\varepsilon, \varepsilon)$.

Lema 6.15. *Si* (X, d) *es precompacto, es acotado.*

Demostración: X se puede escribir como una unión finita de conjuntos acotados. ∎

Ejemplo 6.4. El recíproco no es cierto: $(\mathbb{R}, d_{\text{dis}})$ es acotado y no es precompacto.

Teorema 6.16. *En* (X, d)*, son equivalentes:*

(i) (X, d) *es compacto,*

(ii) (X, d) *es secuencialmente compacto,*

(iii) (X, d) *es precompacto y completo.*

Demostración: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Sea A infinito y supongamos que $A' = \emptyset$. Para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $(B(x,r_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$. Como $X = \bigcup_{x \in X} B_X(x,r_x)$ y X es compacto, existe $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_X(x_i,r_{x_i})$. Pero, por construcción, $B_X(x_i,r_{x_i})$ tiene como mucho un punto de A, lo que es imposible.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Si (X,d) es secuencialmente compacto, ya sabemos que es completo. Supongamos que existe ε_0 que contradice la precompacidad de (X,d). Sea $x_1 \in X$; existe $x_2 \in X$ tal que $d(x_1,x_2) \geq \varepsilon_0$. Continuando de esta manera, dada $\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ elegida de este modo, existe $x_n \in X$ tal que $d(x_i,x_n) \geq \varepsilon_0$, si $i < n$. Queda construida de modo recurrente una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_i,x_n) \geq \varepsilon_0$ si $1 \leq i < n$. Por la compacidad secuencial, existe una subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, luego de Cauchy: así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m,n \geq n_0$ es $d(x_{\varphi(n)},x_{\varphi(m)}) < \varepsilon_0$, lo cual es absurdo.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* Supongamos que (X,d) no es compacto, es decir, existe un cubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, sin subrecubrimientos finitos. Sea $\{x_1^1,\ldots,x_{n_1}^1\} \subset X$ tal que $X = B(x_1^1,1) \cup \cdots \cup B(x_{n_1}^1,1)$. De entre estas bolas, existe al menos una que no puede ser recubierta por una familia finita de los $\{U_i\}_{i\in I}$, sea $B(x_{m_1}^1,1)$. La precompacidad es hereditaria (ver ejercicio 17 del apartado 6.5), es decir, $B(x_{m_1}^1,1)$ es precompacto: sea $\{x_1^2,\ldots,x_{n_2}^2\} \subset X$ tal que $B(x_{m_1}^1,1) \subset B(x_2^2,\frac{1}{2}) \cup \cdots \cup B(x_{n_2}^2,\frac{1}{2})$. De entre estas bolas, existe al menos una que no puede ser recubierta por una familia finita de los $\{U_i\}_{i\in I}$, sea $B(x_{m_2}^2,\frac{1}{2})$. Así, se va construyendo una familia $B(x_{m_k}^k,\frac{1}{k}) \subset \cdots \subset B(x_{m_1}^1,1)$ de bolas encajadas que no pueden ser recubiertas por una familia finita de los $\{U_i\}_{i\in I}$. Además, $\delta\left(B(x_{m_k}^k,\frac{1}{k})\right) \leq \frac{2}{k}$. Si se considera $F_k = \overline{B(x_{m_k}^k,\frac{1}{k})}$, tenemos una familia numerable de cerrados encajados, cuyos diámetros tienden a cero. Por la completitud de (X,d), es $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k = \{x_0\}$. Sea $i_0 \in I$ tal que $x_0 \in U_{i_0}$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x_0,\varepsilon_0) \subset U_{i_0}$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{k_0} < \varepsilon_0$. Entonces, $B(x_{m_{k_0}}^{k_0},\frac{1}{k_0}) \subset B(x_0,\varepsilon_0) \subset U_{i_0}$, lo que contradice la elección de estas bolas, que no podían estar contenidas en ninguna familia finita de los $\{U_i\}_{i\in I}$: en efecto, $B(x_{m_{k_0}}^{k_0},\frac{1}{k_0}) \subset F_{k_0} \subset \overline{B}(x_{m_{k_0}}^{k_0},\frac{1}{k_0})$, y si $x \in B(x_{m_{k_0}}^{k_0},\frac{1}{k_0})$, entonces $d(x,x_0) \leq d(x,x_{m_{k_0}}^{k_0}) + d(x_{m_{k_0}}^{k_0},x_0) < \frac{2}{k_0} < \varepsilon_0$. ∎

Ejemplo 6.5. La completitud es necesaria en las anteriores equivalencias: $((0,1),d_{\mathrm{u}})$ es precompacto, pero no es secuencialmente compacto.

Teorema 6.17. ***(Lema del recubrimiento de Lebesgue)*** *Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. Existe $\varepsilon > 0$ (llamado* número de Lebesgue del recubrimiento*) tal que si $A \subset X$ tiene diámetro menor que ε, entonces existe $i_\varepsilon \in I$ tal que $A \subset U_{i_\varepsilon}$.*

Demostración: En caso contrario, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe x_n tal que $B(x_n,\frac{1}{2^n}) \not\subset U_i$ para cada $i \in I$. Se obtiene así una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que posee una subsucesión convergente

$\{x_{\varphi(n)}\} \to x$, por compacidad. Sea $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$ y $\lambda > 0$ tal que $B(x,\lambda) \subset U_{i_0}$. Por convergencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $x_{\varphi(n)} \in B(x, \frac{\lambda}{2})$. Pero entonces para enteros tales que $\frac{1}{2^n} < \frac{\lambda}{2}$, es $B(x_{\varphi(n)}, \frac{\lambda}{2}) \subset B(x,\lambda) \subset U_{i_0}$. ∎

6.4. Compacidad en espacios euclídeos

Teorema 6.18. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, el intervalo $[a,b]$ es compacto en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos, tales que $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Sea

$$A = \{x \in [a,b] : [a,x] \text{ está contenido en una unión finita de los } \{U_i\}_{i\in I}\}.$$

A es no vacío, pues $a \in A$. Además, si $x_1 \in A$ y $x_2 < x_1$, es $x_2 \in A$, al ser $[a,x_2] \subset [a,x_1]$. Por otro lado, si $x \in A$ y $x < b$, existe $y > x$ tal que $y \in A$: en efecto, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Sea $r_x > 0$ tal que $(x - r_x, x + r_x) \subset U_{i_0} \cap [a,b]$. Entonces, $[a, x + \frac{r_x}{2}] = [a,x] \cup (x - r, x + \frac{r_x}{2}]$, que está contenida en una unión finita de los $\{U_i\}_{i\in I}$ (los que tiene que ver con $[a,x]$) y U_{i_0}. Sea $c = \sup(A)$: por lo anterior, es $c = b$. Sea $j_0 \in I$ tal que $b \in U_{j_0}$ y $r_b > 0$ tal que $(b - r_b, b + r_b) \subset U_{j_0}$. Como $b = \sup(A)$, $b - r_b$ no es cota superior de A, luego existe $x \in A$ tal que $b - r_b < x \leq b$. Pero, como se ha visto antes, es entonces $b - r_b \in A$. Así, $[a,b] = [a, b - r_b] \cup (b - r_b, b]$ está contenido en una unión finita de $\{U_i\}_{i\in I}$, y queda probada la propiedad. ∎

Teorema 6.19. ***(de Heine-Borel)*** *En $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, A es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Corolario 6.20. *En $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$, A es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración: Basta con usar el ejercicio 7 del apartado 6.5, y utilizar que todo conjunto acotado está contenido en un cubo de dimensión n (producto de n intervalos). ∎

Lema 6.21. *Si A es compacto en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, entonces $\sup(A), \inf(A) \in A$.*

Teorema 6.22. ***(de Weierstrass)*** *Sea $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continua y (X,d) compacto. Entonces, f alcanza sus valores máximo y mínimo.*

Demostración: Como $f(X)$ es compacto, es $\alpha = \inf(f(X)), \beta = \sup(f(X)) \in f(X)$. Luego, existen $a, b \in X$ tales que $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$, es decir, f alcanza su mínimo absoluto en a y su máximo absoluto en b. ∎

Teorema 6.23. ***(Caracterización de la compacidad)*** *(X, d) es compacto si y sólo si para cualquier función $f\colon (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ continua, f alcanza sus valores extremos.*

Demostración: Sólo queda por ver una de las implicaciones: si X no es compacto, existe $A \subset X$ infinito tal que $A' = \emptyset$. Sea $S = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ numerable. Entonces, es $S' = \emptyset$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \notin S'$, existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $(B(a_n, \varepsilon_n) - \{a_n\}) \cap S = \emptyset$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ distintos tales que $\overline{B}(a_n, \frac{\varepsilon_n}{4}) \cap \overline{B}(a_m, \frac{\varepsilon_m}{4}) = \emptyset$ (si esta intersección fuese no vacía, y x un punto en ella, sería $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, x) + d(x, a_m) < \varepsilon_0$, donde $\varepsilon_0 = \text{mín}\{\varepsilon_m, \varepsilon_n\}$, lo que es absurdo). Sea $s_n < \text{mín}\{\frac{\varepsilon_n}{4}, \frac{1}{n}\}$ y $B_n = \overline{B}(x_n, s_n)$. La familia $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de bolas cerradas dos a dos disjuntas; sea B la unión de todas ellas, que es un conjunto cerrado. La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin B \\ \frac{n}{s_n}(s_n - d(x, x_n)) & \text{si} \quad x \in B_n \end{cases}$$

es continua y como $f(x_n) = n$, f no alcanza su máximo absoluto. ∎

6.5. Ejercicios

1.- Sea (X, d) un espacio métrico. Se pide probar:

(i) si A es compacto y $b \in X$, existe $a \in A$ tal que $d(a, b) = d(A, b)$;

(ii) si A es compacto y $B \subset X$, existe $a \in A$ tal que $d(a, B) = d(A, B)$;

(iii) si A y B son compactos, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, b) = d(A, B)$;

(iv) si A es compacto, existen $a, b \in A$ tales que $d(a, b) = \delta(A)$;

(v) si $A \subset X$ y B es compacto, es $d(A, B) = 0$ si y sólo si $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

2.- En (X, d), se pide probar:

(i) si $x \notin A$ compacto, existen abiertos disjuntos U y V, tales que $x \in U$ y $A \subset V$;

(ii) si A y B son compactos disjuntos, entonces $d(A, B) > 0$ y existen abiertos disjuntos U y V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$;

(iii) si A y B son compactos, $A \not\subset B \not\subset A$ y $d(A, B) = 0$, entonces $\mathrm{fr}(A) \cap \mathrm{fr}(B) \neq \emptyset$.

3.- Sea (X,d) y $A \subset X$. ¿Qué relación existe entre los compactos de (X,d) y los compactos de (A,d_A)? En $(\mathbb{Q},d_u)$, probar que el conjunto $F=\{x\in\mathbb{Q} : 2<x^2<3, x\geq 0\}$ es cerrado y acotado, pero no es compacto.

4.- Sea (X,d) y $A \subset X$. Si $A\cap K$ es cerrado en (K,d_K) para cada compacto K, probar que A es cerrado.

5.- Sean (X,d), $A\subset X$ compacto y $r>0$. Probar que $\displaystyle\bigcup_{x\in A}\overline{B}(x,r)$ es cerrado.

♣6.- Sean (X,d) y K compacto $\subset V$ abierto. Existe $r>0$ tal que $\displaystyle\bigcup_{x\in K}B(x,r)\subset V$.

7.- Un producto de espacios métricos es compacto si y sólo si cada espacio factor lo es.

♣8.- Sean (X,d) e (Y,ρ) espacios métricos, $(X\times Y,D)$ su producto (D es cualquiera de las métricas producto $d_{\text{máx}}$, d_{sum} o d_u) y $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$. Se pide probar:

(i) si X es compacto, para todo cerrado de $(X\times Y,D)$, su proyección sobre Y es cerrada;

(ii) si $(Y,\rho)=(\mathbb{R},d_u)$, entonces X es compacto si y sólo si para todo cerrado de $X\times\mathbb{R}$, su proyección sobre $\mathbb{R}$ es cerrada;

(iii) si X es compacto, f es continua si y sólo si su grafo G_f (definición (1.19) es compacto en $(X\times Y,D)$;

(iv) si Y es compacto y G_f es cerrado en $(X\times Y,D)$, entonces f es continua;

(v) si para cada espacio métrico (X,d) y toda aplicación $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ tal que G_f es cerrado en $(X\times Y,D)$, se verifica que f es continua, entonces Y es compacto.

9.- Sean (X,d) un espacio métrico compacto, y $f\colon (X,d)\longrightarrow(X,d)$ continua tal que $d(f(x),f(y))<d(x,y)$ si $x\neq y$. Probar que f posee un único punto fijo en X.

10.- Sea (X,d) compacto y $f\colon (X,d)\longrightarrow(X,d)$ continua sin puntos fijos. Probar que existe $k>0$ tal que para cada $x\in X$, es $d(x,f(x))\geq k$.

11.- Sea $f\colon (X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$, tal que la restricción a cada compacto es continua. Probar que f es continua.

♣12.- Sea (X,d) compacto y $f\colon (X,d)\longrightarrow(X,d)$ continua. Probar que existe un compacto $A\subset X$ no vacío, tal que $f(A)=A$.

13.- Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados de un espacio métrico (X,d) compacto, tal que $\displaystyle\bigcap_{i\in I}A_i=\emptyset$. Probar que existe $\varepsilon>0$ tal que si $B\subset X$ es un conjunto de diámetro menor que ε, entonces existe $j\in I$ tal que $B\cap A_j=\emptyset$.

14.- Sea (X, d) un espacio compacto cuyas componentes conexas son abiertas. Probar que existe a lo más un número finito de componentes.

♣15.- Sea (X, d) un espacio métrico tal que para cada métrica ρ topológicamente equivalente a d, (X, ρ) es acotado. Probar que (X, d) es compacto.

16.- Para los espacios métricos del ejercicio 12 del apartado 2.8, estudiar la compacidad.

♣17.- En un espacio métrico (X, d), probar:

(i) todo subconjunto de un conjunto precompacto es precompacto;

(ii) la clausura de un conjunto precompacto es precompacta;

(iii) la imagen uniformemente continua de un conjunto precompacto es precompacta;

(iv) todo conjunto precompacto es separable.

♣18.- En (X, d), sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $R = Rg\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Probar:

(i) si $\text{lím}(x_n) = x$, entonces $R \cup \{x\}$ es compacto;

(ii) si $\text{lím}(x_n) = x$, entonces $\overline{R}$ es compacto. El recíproco es falso, pero si $\overline{R}$ es compacto, existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge;

(iii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces R es precompacto. Y si R es precompacto, existe una subsucesión de Cauchy de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

(iv) (X, d) es completo si y sólo si todo conjunto precompacto posee clausura compacta. Así, en un espacio completo, todo conjunto precompacto posee derivado compacto;

(v) si todo acotado en X posee clausura compacta, entonces (X, d) es completo;

(vi) probar que (X, d) es compacto si y sólo si es completo y precompacto.

19.- Sea (X, d) un espacio métrico, donde existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(x, r)$ es compacta para cada $x \in X$. Probar que (X, d) es completo. Si $A \subset X$ es compacto, demostrar que el conjunto $\{x \in X : d(x, A) \leq s\}$ es compacto para cada $s < r$.

20.- Probar que un espacio métrico donde toda bola cerrada es compacta, es completo. Demostrar que en este tipo de espacios métricos, los conjuntos compactos son los cerrados y acotados. Se puede aplicar esta propiedad a los espacios euclídeos.

21.- Sean (X, d) compacto, $f\colon (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ continua y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados encajados. Probar que $f(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$.

22.- Probar que (X,d) es compacto si y sólo si para cada sucesión de cerrados encajados, su intersección es no vacía. Observar que no se impone la condición de que los diámetros de los cerrados tiendan a cero: ésta es otra manera de probar que todo espacio compacto es completo.

23.- Sea (X,d) y una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados con la propiedad de intersección finita. Supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que F_{i_0} es compacto. Probar que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

24.- Sea (X,d) completo, tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento finito de X, por conjuntos de diámetro menor que ε. Probar que (X,d) es compacto.

25.- Probar que la precompacidad se conserva bajo equivalencias métricas e isometrías. La compacidad se conserva bajo equivalencias topológicas, métricas e isometrías.

26.- En (X,d) se pide probar:

(i) si (X,d) es compacto y la clausura de cada bola abierta es la correspondiente bola cerrada, probar que toda bola abierta es conexa;

(ii) dar un ejemplo de espacio métrico totalmente disconexo, donde también suceda esto;

(iii) en $(\mathbb{R}^2, d_{\text{máx}})$, sea $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0 \text{ ó } x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Probar que toda bola en A es conexa, pero no se verifica el fenómeno de (i).

♣**27.-** Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Probar que (X,d) es conexo si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $x, y \in X$, existe una familia de puntos $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset X$, tales que $x_0 = x$, $x_n = y$ y $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ para $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, es decir, existe una ε-*cadena* relacionando los puntos x e y.

28.- Si K es compacto, convexo y de interior no vacío en $(\mathbb{R}^n, d_{\text{u}})$, probar que es homeomorfo a una bola cerrada.

29.- Estudiar la conexión, la compacidad y la completitud de los siguientes subespacios del plano euclídeo: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x-1) = 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$,
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x+1)^2 \quad \text{ó} \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad y = 0\}$,
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$,
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ y $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

30.- Sean $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$ y $A, B \subset \mathbb{R}$ cerrados. ¿Es $A + B$ cerrado? ¿Y si A y B son compactos?

31.- Sea (X,d) compacto y $f\colon (X,d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\text{u}})$ una función continua. Se supone que para cada $x \in X$ es $f(x) > 0$. Probar que existe $M > 0$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in X$.

32.- Sea $f\colon (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x)$ posee exactamente dos puntos. Probar que f no es continua.

♣ **33.-** Otro concepto relacionado con cubrimientos por abiertos es el de *paracompacidad*, que es una generalización de la noción de compacidad esencial en el estudio de variedades diferenciables.

Definición 6.9. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubrimientos de X, se dice que $\mathcal{U}$ *refina* a $\mathcal{V}$, y se escribe $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, si cada $U \in \mathcal{U}$ está contenido en algún $V \in \mathcal{V}$. Se dice también que $\mathcal{U}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{V}$.

Definición 6.10. En un espacio métrico (X, d), una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X se llama *localmente finita* si cada $x \in X$ posee un entorno que corta sólo a una cantidad finita de $U \in \mathcal{U}$.

Definición 6.11. En un espacio métrico (X, d), una colección $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X se llama σ-*localmente finita* si $\mathcal{V} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, donde cada $\mathcal{V}_n$ es una familia localmente finita. Observar que aunque $\mathcal{V}$ sea un cubrimiento σ-localmente finito de X, las subcolecciones $\mathcal{V}_n$ localmente finitas que lo componen no tienen porque ser cubrimientos de X.

Definición 6.12. Un espacio métrico (X, d) se llama *paracompacto* si todo cubrimiento por abiertos de X posee un refinamiento abierto σ-localmente finito.

Demostrar el **teorema de Stone**: *Todo espacio métrico es paracompacto* (ver [W], página 147).

♣ **34.-** Las nociones de compacidad y de conexión son ambas herramientas potentes, pero no tienen relación entre ellas. Cuando se combinan dan lugar al concepto de *continuo*.

Definición 6.13. K es un *continuo* en (X, d) si es compacto y conexo.

Las esferas de cualquier dimensión $\mathbb{S}^n$ y las bolas en espacios euclídeos son ejemplos de continuos.

En (X, d), se pide probar:

(i) dada una familia $\{K_i : i \in I\}$ de continuos su intersección $\displaystyle\bigcap_{i \in I} K_i$ es un continuo;

(ii) si K es un continuo tal que para cada par de puntos $a, b \in K$ es $K - \{a, b\}$ no conexo, entonces K es homeomorfo a la circunferencia unidad $(\mathbb{S}^1, d_{\mathrm{u}})$.

Bibliografía

[BRV] F. Bombal, L. Rodríguez y G. Vera, *Problemas de Análisis Matemático: espacios métricos y normados. El espacio* $\mathbb{R}^n$, AC, 1982.

[B] V. Bryant, *Metric spaces: iteration and application*, Cambridge University Press, 1996.

[C] E.T. Copson, *Metric spaces*, Cambridge University Press, 1988.

[D] $*$ J.M. Díaz Moreno, *Introducción a la teoría de espacios métricos*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 1982.

[F] G. Flory, *Ejercicios de Topología y Análisis*, Reverté, 1978.

[G] J.R. Giles, *Introduction to the Analysis of Metric Spaces*, Cambridge University Press, 1987.

[H] $*$ B.I. Hernando Boto, *Problemas sobre espacios métricos, normados y de Hilbert*, Publ. Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2002.

[I] I.L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos*, Limusa, 1973.

[J] A. El Jai, *Éléments de Topologie et Espaces Métriques*, Presses Universitaires de Perpignan, 2007.

[JA] P.K. Jain and K. Ahmad, *Metric Spaces*, Narosa, 1996.

[Ka] I. Kaplansky, *Set Theory and Metric Spaces*, Chelsea Pub. Co., 1977.

[Ku] S. Kumaresan, *Topology of Metric Spaces*, Alpha Sci., 2005.

[Lim] E.L. Lima, *Espaços metricos*, Projeto Euclides, 1977.

[Lip] S. Lipschutz, *Topología General*, McGraw Hill, 1967.

[Mi] F. Michavila, *Espacios métricos. Espacios vectoriales normados*, AC, 1981.

[Mu] J.R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2002.

[P] C.G.C. Pitts, *Introduction to Metric Spaces*, Oliver and Boyd, 1972.

[R] $*$ R.B. Reisel, *Elementary theory of Metric Spaces*, Springer, 1982.

[Se] $*$ M.O. Searcóid, *Metric spaces*, Springer, 2007.

[SV] $*$ S. Shirali and H.L. Vasudeva, *Metric spaces*, Springer, 2006.

[Su] W.A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford Sci. Publ., 1993.

[W] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.