

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA



Prof. Marta Macho Stadler

**MÁSTER EN MODELIZACIÓN E INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA,
ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN 2014/2015**

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: marta.macho@ehu.es
<http://www.ehu.es/~mtwmastm>
Tlf: 946015352 Fax: 946012516

Portada: Ilustración de Adam Pekalski (www.adampekalski.com/).

Índice general

Introducción	5
0.1. ¿Por qué la Topología Algebraica?	5
0.2. ¿Dónde se aplica la Topología Algebraica?	6
0.2.1. Teoría de grafos	7
0.2.2. La teoría de nudos	8
0.2.3. Otras aplicaciones	10
0.2.4. Organización del texto	10
1. Preliminares	1
1.1. Categorías y funtores	1
1.2. Conexión por caminos	4
1.3. Algunas nociones sobre grupos	6
1.3.1. Grupo (no abeliano) libre con dos generadores	6
1.3.2. Grupo libre sobre un conjunto	6
1.3.3. Producto libre de dos grupos	6
1.3.4. Producto amalgamado de dos grupos	7
1.3.5. Presentaciones de grupos	8
1.4. Clasificación de superficies compactas	9
1.4.1. Definición de superficie y ejemplos	9
1.4.2. Regiones poligonales	10
1.4.3. Suma conexa de superficies	12
1.5. Problemas	16
2. Homotopía de aplicaciones	23
2.1. Homotopía de aplicaciones	23
2.2. La categoría de espacios topológicos y homotopías	25
2.3. Problemas	27

3. El grupo fundamental	33
3.1. Homotopía de caminos	33
3.2. El grupo fundamental	35
3.3. Grupo fundamental de la esfera de dimensión 1	39
3.4. Teorema de Seifert–Van Kampen	44
3.5. Grupos de homotopía superiores	46
3.6. Problemas	48
4. Estudio de los espacios recubridores	55
4.1. Espacios recubridores	56
4.2. Propiedades de levantamiento	58
4.3. Aplicaciones recubridoras y grupo fundamental	59
4.4. El grupo de las transformaciones recubridoras	60
4.5. Homomorfismos recubridores	63
4.6. El espacio recubridor universal	64
4.7. Acciones propiamente discontinuas y espacios recubridores	65
4.8. El teorema de clasificación de los espacios recubridores	66
4.9. Problemas	67
Bibliografía	71

Introducción

0.1. ¿Por qué la Topología Algebraica?

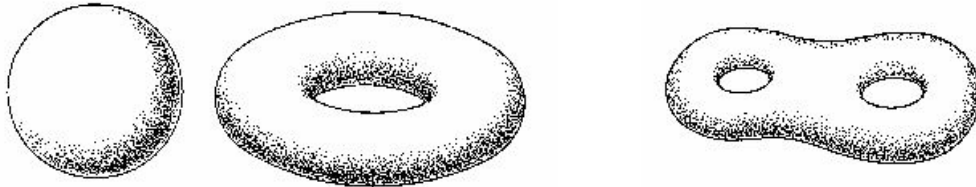
Uno de los problemas básicos de la *topología* es el de determinar cuando dos espacios son o no homeomorfos. No hay un método general para resolver esta cuestión, pero existen técnicas que se pueden aplicar en casos particulares.

Probar que dos espacios *son* homeomorfos consiste en encontrar una función continua de uno de los espacios sobre el otro, que tenga una inversa continua. Pero, la construcción de funciones continuas no es un problema sencillo en general.

Probar que dos espacios *no son* homeomorfos es un asunto diferente: para ello, debemos demostrar que no existe ninguna función continua con inversa continua entre ambos espacios. Si encontramos una propiedad topológica verificada por uno de los espacios pero no por el otro, el problema queda resuelto y los espacios no pueden ser homeomorfos. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ no puede ser homeomorfo al intervalo abierto $(0, 1)$ (ambos provistos de la topología inducida por la de la recta real), porque el primer espacio es compacto y el segundo no. También sabemos que los espacios euclídeos \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 no pueden ser homeomorfos, porque si se elimina un punto de \mathbb{R}^2 el espacio resultante sigue siendo conexo, pero éste no es el caso si se priva a \mathbb{R} de un punto.

Las herramientas topológicas que conocemos de un curso de topología general no son las más adecuadas para solucionar este problema de *detectar* la equivalencia topológica de dos espacios. Por ejemplo, ¿podemos probar que el plano euclídeo \mathbb{R}^2 no es homeomorfo al espacio euclídeo \mathbb{R}^3 ? Si pasamos revista a las propiedades topológicas que conocemos –compacidad, conexión, metrizabilidad, etc.– no encontramos ninguna peculiaridad que nos permita distinguirlos.

Otro ejemplo ilustrativo se obtiene al considerar superficies como la esfera S^2 , el toro T^2 o la superficie compacta de género dos T_2 . De nuevo, ninguna de las propiedades topológicas que conocemos nos permiten distinguirlos: los tres espacios son compactos, conexos y metrizables.



Así, debemos introducir nuevas propiedades y técnicas para resolver este problema. Una de las herramientas más naturales es la de *conexión simple*: de manera informal, un espacio X es simplemente conexo, cuando toda curva cerrada en X puede contraerse a un punto en el espacio. Esta cualidad permite distinguir \mathbb{R}^2 de \mathbb{R}^3 : si se elimina un punto de \mathbb{R}^3 , el espacio resultante es simplemente conexo, pero éste no es el caso si se considera \mathbb{R}^2 privado de un punto. Esta propiedad también diferencia \mathbb{S}^2 , que es simplemente conexo, de \mathbb{T}^2 que no lo es. Pero, por ejemplo, no distingue entre \mathbb{T}^2 y \mathbb{T}_2 , porque ninguno de los dos espacios posee esta propiedad.

Hay una idea, más general que la de conexión simple, un concepto que engloba a ésta como un caso particular y que tiene relación con un cierto grupo, llamado *el grupo fundamental* del espacio. Dos espacios homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos; y la condición de conexión simple consiste precisamente en que el grupo fundamental sea trivial. La prueba de que \mathbb{S}^2 y \mathbb{T}^2 no son homeomorfos puede reformularse, diciendo que el grupo fundamental de \mathbb{S}^2 es trivial y que el de \mathbb{T}^2 no lo es. El grupo fundamental distingue *mejor* los espacios que la condición de conexión simple. Puede usarse, por ejemplo, para probar que \mathbb{T}^2 y \mathbb{T}_2 no son homeomorfos, argumentando que \mathbb{T}^2 tiene grupo fundamental abeliano, mientras que el de \mathbb{T}_2 no lo es.

Lamentablemente, con estas herramientas, tampoco somos capaces de probar que, por ejemplo, \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^n para $n > 2$ no son homeomorfos: para demostrarlo habría que recurrir a propiedades de *homología*, que escapan de los objetivos de este curso.

0.2. ¿Dónde se aplica la Topología Algebraica?

Los resultados que veremos en este curso, que son tan sólo una pequeña parte de lo que se denomina **topología algebraica**, se aplican en primer lugar a otras ramas de las matemáticas: son, sin duda alguna, esenciales en muchos de los razonamientos de geometría diferencial, análisis, álgebra, análisis numérico e investigación operativa.

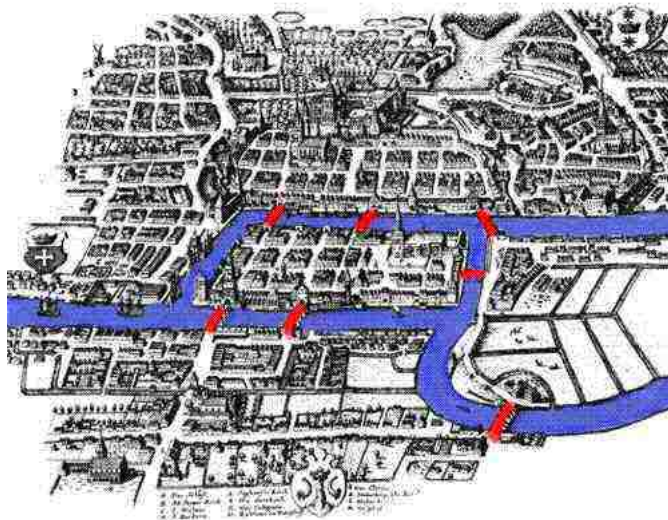
Pero es además una herramienta indispensable en física, química, medicina, biología, informática, teoría de juegos, etc.

Citamos a continuación brevemente algunas de estas aplicaciones.

0.2.1. Teoría de grafos

El estudio de grafos está ligado habitualmente a la topología, convirtiéndose en una valiosa herramienta matemática en campos tan dispares como la investigación operativa, la lingüística, la química, la física, la genética y la teoría de redes. Un *grafo* es un conjunto de puntos, los *vértices*, algunos de los cuales están ligados entre sí por medio de líneas, las *aristas*. La naturaleza geométrica de estos arcos no tiene importancia, sólo cuenta la manera en la que los vértices están conectados. Un buen texto para profundizar en esta materia es [R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2000].

Uno de los problemas clásicos de matemáticas resueltos con esta teoría es el conocido *problema de los siete puentes de Könisberg*: en 1700, los habitantes de Könisberg, se preguntaban si era posible recorrer esta ciudad pasando una vez y sólo una por cada uno de los puentes sobre el río Pregel, y volviendo al punto de partida. En aquella época, Könisberg tenía siete puentes, uniendo las cuatro partes de la ciudad separadas por las aguas, y dispuestas como se muestra en la figura.



En 1736, L. Euler probó que la respuesta a esta pregunta era negativa, usando un grafo con cuatro vértices simbolizando las cuatro partes separadas de la ciudad y trazando entre estos vértices las aristas, representando los puentes: este grafo no es *euleriano*, condición probada como necesaria y suficiente para que el problema tenga respuesta positiva.

En 1847, G. Kirchhoff analizó un tipo especial de grafo llamado *árbol* y utilizó este concepto en ciertas aplicaciones de redes eléctricas, al formular su extensión de las leyes de Ohm para flujos eléctricos. Diez años después, A. Cayley usó el mismo tipo de grafos para contar los distintos isómeros de hidrocarburos saturados del tipo C_nH_{2n+2} , para n entero positivo.

El *teorema de los cuatro colores* (ver un excelente repaso histórico del problema en [R. A. Wilson, *Four colors suffice: how the map problem was solved*, Penguin Books, 2002]) tiene también estrecha relación con esta teoría. En 1852, F. Guthrie plantea la siguiente conjetura: *para colorear cualquier mapa geopolítico plano (suponiendo cada país formado por un único trozo), de tal modo que dos países con frontera común sean de distinto color, basta (como máximo) con cuatro colores*. Si se elige un punto en cada país representado y se traza una línea uniendo dos puntos cada vez que correspondan a dos países adyacentes, se obtiene un grafo. El problema del coloreado consiste entonces en atribuir un color a cada vértice del grafo, de manera que dos vértices conectados tengan siempre un color diferente.

En 1976, K. Appel y W. Haken dan una prueba del teorema de los cuatro colores, demostrando mediante un complicado programa de ordenador que, efectivamente, cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa plano. Algunos matemáticos tienen muchas reservas con respecto a esta demostración. Pero, en 1996, N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas, publican una nueva prueba, sin los inconvenientes de la demostración de Appel y Haken, como el elevado número de configuraciones a estudiar y el tiempo que todo este procedimiento requiere.

El teorema de los cuatro colores es igualmente cierto para mapas esféricos. Sobre otras superficies, el número de colores necesarios varía, por ejemplo un mapa tórico precisa como mínimo siete colores.

Los grafos no sólo interesan a los matemáticos puros. Se usan también para representar circuitos eléctricos, para realizar cálculos teóricos relativos a partículas elementales, etc. La teoría de grafos tiene igualmente una importancia económica directa, por sus numerosas aplicaciones en investigación operativa. Por ejemplo, para determinar el trayecto óptimo (el menos costoso, el más rápido) de camiones que deben repartir y recoger productos a numerosos clientes esparcidos por un país determinado, la red de carreteras puede modelizarse por un grafo, cuyas aristas son las carreteras de una ciudad a otra, a cada arista se le asocian varios números: longitud del camino correspondiente, tiempo de recorrido, coste del peaje, etc. Usando cálculos y algoritmos a veces complejos, se determinan una o varias soluciones, y se trata entonces de encontrar la mejor de ellas: se está estudiando la llamada *topología de la red*.

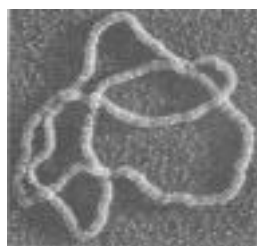
0.2.2. La teoría de nudos

La técnica de tejido, que precisa cruces y anudados de hilos, se conoce ya en el neolítico. Aún en épocas anteriores, existen métodos que permiten unir una lámina de sílex a su mango, con tripas, nervios de animales o fibras vegetales. Lamentablemente, la descomposición de todas estas ligaduras orgánicas no permitirá nunca conocer con precisión la edad de los primeros nudos. En la época actual, los marinos se han apropiado de esta

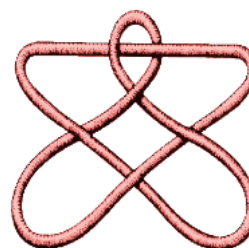
técnica, esencial para su trabajo. En 1944, el pintor C.W. Ashley describe y dibuja en su libro *The Ashley Book of Knots* exactamente 3.854 nudos.

Los nudos están presentes en ámbitos tan dispares como la decoración, la industria textil, la magia, el alpinismo o la cirugía. Su estudio matemático permite además ver su relación con la física, la química o la biología molecular.

El ADN, el material genético más importante en la mayoría de los organismos, se ve habitualmente como una *doble hélice*, en la que dos cadenas de nucleótidos complementarios se enrollan a lo largo de un eje curvo común. La doble hélice puede moverse en el espacio para formar una nueva hélice de orden mayor; en este caso se habla de ADN *sobreenrollado*. Una gran parte de los ADN conocidos se muestran de esta manera sobreenrollada en algún momento del ciclo de su vida. Cada propiedad física, química y biológica del ADN (comportamiento hidrodinámico, energético, ...) está influenciado por las deformaciones asociadas al sobreenrollamiento.



Fotografía ADN



Nudo que la representa

La comprensión del mecanismo del sobreenrollamiento y las consecuencias de estas características estructurales para el ADN es un problema matemático bastante complejo, que hace intervenir dos ramas de la matemática: la topología algebraica y la geometría diferencial. Para estudiar matemáticamente el sobreenrollamiento, hay que construir un modelo en el que la estructura se represente como un estrecho lazo torcido de espesor infinitesimal. Por ello, es necesario describir los nudos, encontrar características esenciales que permitan distinguirlos, en otras palabras, clasificarlos sin riesgo a confusión. Estas propiedades, que deben permanecer inalterables a lo largo de la deformación, se llaman *invariantes del nudo*.

Combinando la teoría de nudos con la *teoría física de cuerdas*, ha sido posible dar una descripción unificada de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: gravedad, electromagnetismo y las interacciones fuertes y débiles entre partículas.

Los químicos crean en el laboratorio moléculas anudadas, cuyas propiedades les permiten modificar su forma o desplazarse en función de factores eléctricos, químicos o luminosos, decididos por la persona que dirige la experiencia. Estas nuevas moléculas se parecen en algunas ocasiones a aquellas que, en la naturaleza, estuvieron en el origen de la vida. Otras, permiten imaginar memorias para futuros *ordenadores moleculares*, ya no electrónicos.

0.2.3. Otras aplicaciones

La topología algebraica, en particular a través de la denominada topología digital, posee numerosas aplicaciones en informática gráfica, robótica o procesamiento de imágenes digitales (utilizado a su vez en control automático de calidad, lectura automática de documentos, radiología, meteorología, geología, etc.).

En teoría de sistemas dinámicos, el estudio de las propiedades cualitativas (topológicas) de los modelos permite hacer predicciones certeras sobre el comportamiento de los sistemas observados.

La teoría de homotopía se ha descubierto con una herramienta indispensable en *física*

- (i) para clasificar formas de objetos como *solitones*, *vórtices*, etc.;
- (ii) en estudio de *crisales líquidos*, sustancias que exhiben la dualidad sólido-líquido, es decir que, simultáneamente, poseen propiedades de los líquidos (fluidez y viscosidad) y propiedades ópticas que se parecen de modo asombroso a las de los cristales;
- (iii) para la clasificación de defectos y texturas en medios ordenados, como los cristales.

Además, físicos y químicos se centran en la teoría de *casi-cristales*, aleaciones metálicas, donde la disposición de los átomos es regular, como en un cristal, pero aperiódica. Las teorías de grafos y de mosaicos proporcionan modelos de difracción para los sólidos casi-cristalinos.

La *teoría cuántica de campos* emplea las teorías de homotopía y homología como herramientas básicas, la *teoría de fibrados* es esencial en estudios *electromagnéticos*, etc. Sin duda, se descubrirán en el futuro otras muchas maneras de aplicar las teorías topológicas a otros campos de la Ciencia.

0.2.4. Organización del texto

Las demostraciones de los resultados más importantes están indicadas en el texto.

Hay una amplia colección de ejercicios, de diferente dificultad, alguno de los cuales deberá entregarse resuelto como ejercicio del curso.

La bibliografía indicada es muy amplia, aunque no exhaustiva. Se indican con * los textos más recomendables, por su sencillez en algunos casos, o por tratarse de textos básicos y *clásicos* en otras ocasiones.

Zaragoza, febrero 2015

Preliminares

En este capítulo, repasamos algunos conceptos y estudiamos otros que utilizaremos constantemente durante el curso.

1.1. Categorías y funtores

Intuitivamente, una *categoría* puede pensarse como una colección de conjuntos dotados de estructuras de la misma especie y aplicaciones que preservan estas estructuras. De manera más precisa

Definición 1.1. Una *categoría* \mathcal{C} está formada por

- (1) una clase de *objetos*, $\text{Obj}(\mathcal{C})$,
- (2) a cada par ordenado de objetos (X, Y) , le corresponde un conjunto de *morfismos*, denotado $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, siendo las familias $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ disjuntas si el par (X, Y) es distinto del par (X', Y') . Un morfismo cualquiera $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ se escribe usualmente del modo $f: X \rightarrow Y$,
- (3) dada una terna de objetos de la categoría (X, Y, Z) , se define una aplicación

$$\circ : \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

llamada *composición*, que cumple los dos axiomas siguientes

- **Asociatividad:** si $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ y $h \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, es $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
- **Identidad:** a cada objeto Y en la categoría se le puede asociar el *morfismo identidad* (que es único, debido a los axiomas), $1_Y \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$, tal que si $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, entonces $g \circ 1_Y = g$ y $1_Y \circ f = f$.

Ejemplos 1.1. Algunos ejemplos de categorías son

- (i) \mathfrak{Set} , la categoría de conjuntos y aplicaciones;

- (ii) $\mathfrak{G}roup$, la categoría de grupos y homomorfismos de grupos;
- (iii) $\mathfrak{A}b$, la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos;
- (iv) $\mathfrak{R}ing$, la categoría de anillos conmutativos con unidad y homomorfismos de anillos;
- (v) $\mathfrak{T}op$, la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas;
- (vi) $\mathfrak{V}ect_{\mathbb{R}}$, la categoría de espacios vectoriales reales y aplicaciones \mathbb{R} -lineales;
- (vii) $\mathfrak{D}iff^{\infty}$, la categoría de variedades diferenciales de clase C^{∞} y aplicaciones diferenciables de clase C^{∞} ;
- (viii) $\mathfrak{T}op_*$, la categoría de pares de espacios topológicos con punto base $(X, \{x_0\})$ (donde $x_0 \in X$) y aplicaciones continuas $f: X \rightarrow Y$ tales que $f(x_0) = y_0$;
- (ix) $\mathfrak{P}ar\mathfrak{T}op$, la categoría de pares de espacios topológicos (X, A) (donde $A \subset X$) y aplicaciones continuas $f: X \rightarrow Y$ tales que $f(A) \subset B$.

Definición 1.2. Si $f \in hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ y existe $g \in hom_{\mathfrak{C}}(Y, X)$, tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, se dice que f es una *equivalencia* en la categoría \mathfrak{C} . Se dice que g es la inversa de f y se denota por $g = f^{-1}$.

Definición 1.3. Un *functor covariante* T de una categoría \mathfrak{C}_1 en una categoría \mathfrak{C}_2 , denotado $T: \mathfrak{C}_1 \rightarrow \mathfrak{C}_2$, está definido por

- (i) una función T que asocia a cada objeto X en \mathfrak{C}_1 , un objeto $T(X)$ en \mathfrak{C}_2 ,
- (ii) una función, denotada también T , que asocia a cada morfismo $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X, Y)$ un morfismo $T(f) \in hom_{\mathfrak{C}_2}(T(X), T(Y))$, de tal modo que
 - (1) $T(1_X) = 1_{T(X)}$,
 - (2) si $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X, Y)$ y $g \in hom_{\mathfrak{C}_1}(Y, Z)$, es $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

Definición 1.4. Un *functor contravariante* $T: \mathfrak{C}_1 \rightarrow \mathfrak{C}_2$, está definido por

- (i) una función T que asocia a cada objeto X en \mathfrak{C}_1 , un objeto $T(X)$ en \mathfrak{C}_2 ,
- (ii) una función, denotada también T , que asocia a cada morfismo $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X, Y)$ un morfismo $T(f) \in hom_{\mathfrak{C}_2}(T(Y), T(X))$, de tal modo que
 - (1) $T(1_X) = 1_{T(X)}$,
 - (2) si $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X, Y)$ y $g \in hom_{\mathfrak{C}_1}(Y, Z)$, es $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$.

El gran problema de la topología algebraica es el de encontrar y estudiar una suficiente cantidad de funtores, de modo que la solución de una cuestión topológica *complicada* equivalga a la de un problema algebraico más simple. Es decir, se trata de encontrar funtores de \mathfrak{Top} en \mathfrak{Group} , o de \mathfrak{Top} en \mathfrak{Ab} , etc.

Ejemplos 1.2. Algunos ejemplos de funtores son

- (i) el functor *identidad* de cualquier categoría \mathfrak{C} en sí misma, definido de la manera obvia;
- (ii) el functor *de olvido*, de la categoría \mathfrak{Top} en la categoría de conjuntos \mathfrak{Set} , que asigna a cada espacio topológico X el conjunto base X (sin estructura) y a cada aplicación continua la misma aplicación *olvidando* su continuidad. Existen también funtores de olvido entre otras muchas categorías, por ejemplo de \mathfrak{Group} en \mathfrak{Set} , de \mathfrak{Ab} en \mathfrak{Group} , etc;
- (iii) si M es un espacio topológico, se define el functor covariante $(- \times M): \mathfrak{Top} \rightarrow \mathfrak{Top}$, donde $(- \times M)(X) = X \times M$ para cada espacio topológico X y si $f: X \rightarrow Y$ es continua, $(- \times M)(f) = f \times 1_M$;
- (iv) el functor *espacio dual*, $(-)^*: \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$, que asigna a cada espacio vectorial real V , su dual V^* (espacio vectorial de las aplicaciones lineales $V \rightarrow \mathbb{R}$) y a cada aplicación lineal $\varphi: V \rightarrow W$ la aplicación dual $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$ definida por $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$, es un ejemplo de functor contravariante;
- (v) el functor contravariante $C^\infty(-; \mathbb{R}): \mathfrak{Diff}^\infty \rightarrow \mathfrak{Ring}$, que asocia a una variedad diferenciable M el anillo de las funciones reales diferenciables en M y a la aplicación de clase $C^\infty f: M \rightarrow N$ el homomorfismo $f^*: C^\infty(N; \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R})$, dado por $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Proposición 1.1. Si $T: \mathfrak{C}_1 \rightarrow \mathfrak{C}_2$ es un functor y f es una equivalencia en \mathfrak{C}_1 , entonces $T(f)$ es una equivalencia en \mathfrak{C}_2 , tal que $(T(f))^{-1} = T(f^{-1})$.

Definición 1.5. Si T y S son dos funtores de la categoría \mathfrak{C}_1 en la categoría \mathfrak{C}_2 , una *transformación natural* Φ de S en T , denotada $\Phi: S \rightarrow T$, es un sistema de morfismos en \mathfrak{C}_2 , $\Phi_X \in \text{hom}_{\mathfrak{C}_2}(S(X), T(X))$ para cada objeto X en \mathfrak{C}_1 , que hace conmutativo el siguiente diagrama, para cada $f \in \text{hom}_{\mathfrak{C}_1}(X, Y)$

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{S(f)} & S(Y) \\ \Phi_X \downarrow & & \downarrow \Phi_Y \\ T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y) \end{array}$$

Si cada Φ_X es una equivalencia, Φ se llama una *equivalencia natural*. En tal caso, se cumple $\psi = \Phi^{-1}$ (es decir, $\psi_X = \Phi_X^{-1}$, para cada objeto X en \mathfrak{C}_1), y es también una equivalencia natural (invirtiendo las flechas verticales en el diagrama anterior), llamada *equivalencia natural inversa*.

Ejemplos 1.3. Algunos ejemplos de transformaciones naturales son

(i) consideremos los siguientes funtores

- $(-)^X: \mathfrak{Ring} \rightarrow \mathfrak{Group}$, que asocia a un anillo R el grupo multiplicativo R^X de los elementos inversibles del anillo, y a un homomorfismo $f: R \rightarrow S$ su restricción al subconjunto de los elementos inversibles $f|_{R^X}: R^X \rightarrow S$;
- $GL(n; -): \mathfrak{Ring} \rightarrow \mathfrak{Group}$, que asocia a un anillo R el grupo $GL(n; R)$ de las matrices $n \times n$, inversibles y con valores en el anillo R , y a un homomorfismo $f: R \rightarrow S$ el homomorfismo de grupos $f^*: GL(n; R) \rightarrow GL(n; S)$, definido por $f^*((a_{ij})_{i,j}) = (f(a_{ij}))_{i,j}$.

Entonces, $det_R: GL(n; R) \rightarrow R^X$, que asocia a cada matriz inversible su determinante, es una transformación natural entre estos dos funtores;

(ii) consideremos los funtores

- identidad $Id: \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$,
- el functor doble dual $(-)^{**}: \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Entonces, $\Phi: \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$, definido por $\Phi_V(v) = (f \rightarrow f(v))$, para el espacio vectorial real V y $f \in V^*$, es una transformación natural entre estos dos funtores. Si restringimos Φ a la subcategoría de los espacios vectoriales de dimensión finita, se obtiene una equivalencia natural.

1.2. Conexión por caminos

La conexión es una propiedad difícil de manejar, al tratarse de una propiedad en sentido negativo: un espacio topológico es conexo si no existe una *separación* no trivial por abiertos disjuntos. La conexión por caminos posee la ventaja de ser una propiedad *algebraica* y en sentido positivo.

Definición 1.6. Dado un espacio topológico X , un *camino* en X es una aplicación continua $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$. Si $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, se dice que σ es un camino de a a b .

Definición 1.7. X es *conexo por caminos*, si para todo par de puntos $a, b \in X$ existe un camino que los une.

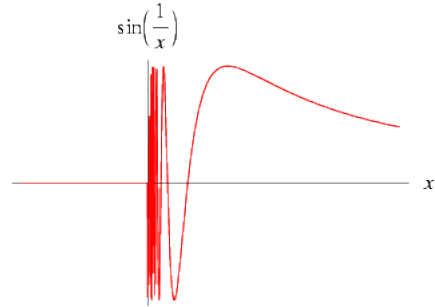
Proposición 1.2. Si X es conexo por caminos, es conexo.

El recíproco no es cierto:

Ejemplo 1.1. La curva seno topológico es el subespacio del plano euclídeo

$$A = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x > 0 \right\}.$$

A es conexo, pero no es conexo por caminos.



Ejemplos 1.4. A continuación se dan algunos ejemplos de espacios conexos por caminos

- (i) los espacios indiscretos son conexos por caminos;
- (ii) en la recta real, los conjuntos conexos y los conexos por caminos coinciden;
- (iii) para $A \subset \mathbb{R}^n$, se verifica
 - si A es conexo y abierto, es conexo por caminos;
 - si A es convexo, es conexo por caminos;
 - si A es contable y $n > 1$, $\mathbb{R}^n - A$ es conexo por caminos.

Teorema 1.3. La imagen continua de un espacio conexo por caminos, es conexa por caminos.

Por lo tanto, la conexión por caminos es una propiedad topológica, pasa al cociente, etc. Pero, no es una propiedad hereditaria.

Teorema 1.4. El producto finito de espacios conexos por caminos, es conexo por caminos.

Se define sobre X la relación binaria $x \sim y$ si y sólo si existe un camino en X que une x e y . Se trata de una relación de equivalencia, cuyas clases son las *componentes conexas por caminos* de X . Se denota usualmente por $\pi_0(X)$ a la familia de estas clases. La componente conexa por caminos de un punto x es el mayor conjunto conexo por caminos de X que lo contiene.

Definición 1.8. X es *localmente conexo por caminos*, si cada punto de X posee una base local formada por conjuntos conexos por caminos.

A pesar del ejemplo 1.1, existe un recíproco parcial de la proposición 1.2

Proposición 1.5. Si X es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos.

1.3. Algunas nociones sobre grupos

1.3.1. Grupo (no abeliano) libre con dos generadores

Sea E el conjunto de las palabras finitas (incluida la palabra vacía) que se pueden formar al yuxtaponer los símbolos a^p y b^q , con $p, q \in \mathbb{Z}$. Dada una palabra, está permitido efectuar las siguientes reducciones

- reemplazar un grupo de dos símbolos consecutivos $a^p a^q$ por el símbolo a^{p+q} ;
- reemplazar un grupo de dos símbolos consecutivos $b^p b^q$ por el símbolo b^{p+q} ;
- suprimir a^0 y b^0 .

Una palabra para la que toda reducción es imposible, es una *palabra reducida*. Está formada por una sucesión de símbolos alternativamente de la forma a^p y b^q , con exponentes no nulos. Se verifica fácilmente que toda palabra admite una única reducción.

Se denota por $L(a, b)$ o $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, al conjunto de las palabras reducidas dotado de la ley de composición siguiente: *el producto $m \cdot m'$ de dos palabras, es la palabra reducida asociada a la palabra (no necesariamente reducida) obtenida al escribir m y m' consecutivamente.*

Para esta ley, $L(a, b)$ es un grupo para el que la palabra vacía es el elemento neutro y $(a^{-p_1} b^{-q_1} \dots a^{-p_n} b^{-q_n})$ es la inversa de la palabra $(b^{q_1} a^{p_1} \dots b^{q_n} a^{p_n})$.

Las aplicaciones $\tilde{a}, \tilde{b}: \mathbb{Z} \rightarrow L(a, b)$ definidas por $\tilde{a}(p) = (a^p)$ y $\tilde{b}(q) = (b^q)$ son dos homomorfismos inyectivos.

Además, si G es un grupo y $\varphi, \psi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ son dos homomorfismos, existe un único homomorfismo $\theta: L(a, b) \rightarrow G$ tal que $\theta \circ \tilde{a} = \varphi$ y $\theta \circ \tilde{b} = \psi$, y dado por $\theta(a^p) = \varphi(p)$ y $\theta(b^q) = \psi(q)$.

1.3.2. Grupo libre sobre un conjunto

Es una generalización de la noción anterior: en vez de formar palabras con la ayuda de letras a y b , se utilizan todos los elementos del conjunto S . En particular, si S es un conjunto finito de n elementos, se obtiene el grupo libre de n generadores, que se denota $L(S)$.

1.3.3. Producto libre de dos grupos

Es otra generalización de la primera noción: sean G_1 y G_2 dos grupos; se considera el conjunto de las palabras finitas constituidas por elementos de G_1 y de G_2 . Se permite reemplazar dos letras consecutivas g_1 y g'_1 si están en el mismo grupo G_1 por la única letra $g_1 \cdot g'_1 \in G_1$, y lo mismo con G_2 . Además, se suprimen los elementos neutros. Como antes,

una palabra reducida es una sucesión finita de elementos provenientes alternativamente de G_1 y G_2 . El conjunto de las palabras reducidas, dotado de la ley de composición evidente, constituye el grupo $G_1 * G_2$, *producto libre* de ambos grupos.

Para $i \in \{1, 2\}$, las aplicaciones $\theta_i: G_i \rightarrow G_1 * G_2$ dadas por $\theta_i(g_i) = (g_i)$, son homomorfismos inyectivos. Además, si G es un grupo y se tienen los homomorfismos $\mu_i: G_i \rightarrow G$, existe un único homomorfismo $\mu: G_1 * G_2 \rightarrow G$ tal que $\mu \circ \theta_i = \mu_i$. Se habla de esta propiedad como de la *propiedad universal* del producto libre de dos grupos.

Observaciones 1.1. Para el producto libre de grupos, se verifica que

- (i) la anterior propiedad caracteriza el producto libre $G_1 * G_2$, salvo isomorfismos;
- (ii) si G_2 se reduce al elemento neutro, entonces θ_1 es un isomorfismo;
- (iii) si G_1 y G_2 son los grupos generados por los símbolos a y b respectivamente estamos en el caso del apartado 1.3.1.

1.3.4. Producto amalgamado de dos grupos

Recordemos que si H es un grupo y N un subgrupo, se dice que N es *normal* en H , si para cada $h \in H$ y $x \in N$, es $h^{-1}xh \in N$. Si K es un subgrupo de H , se denota por \overline{K} a la intersección de todos los subgrupos normales en H que contienen a K : este grupo está constituido por la familia de los elementos $h^{-1}kh$ con $h \in H$ y $k \in K$ y por todos sus productos, y es el menor subgrupo normal de H que contiene a K . Se dice que \overline{K} es la *clausura normal* de K en H .

Sean G_0, G_1 y G_2 grupos y para $i \in \{1, 2\}$ homomorfismos $\varphi_i: G_0 \rightarrow G_i$. Sea N el menor subgrupo normal en $G_1 * G_2$ que contiene todos los elementos de la forma

$$\{(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}), (\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1}) : g \in G_0\},$$

y sea $\mu: G_1 * G_2 \rightarrow G_1 * G_2 / N$ la sobreyección canónica. Se denota al grupo cociente por $G_1 * G_2 / N = G_1 *_{G_0} G_2$, y se dice que es el *producto de G_1 y G_2 amalgamado por G_0* .

Para $i \in \{1, 2\}$, los homomorfismos $\mu_i = \mu \circ \theta_i$ satisfacen la relación $\mu_1 \circ \varphi_1 = \mu_2 \circ \varphi_2$, ya que para $g \in G_0$ los elementos $\theta_1(\varphi_1(g))$ y $\theta_2(\varphi_2(g))$ difieren en un elemento que está en $N = \ker(\mu)$.

Además, si H es un grupo y para $i \in \{1, 2\}$ los homomorfismos $\psi_i: G_i \rightarrow H$ verifican la identidad $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, existe un único homomorfismo $\psi: G_1 *_{G_0} G_2 \rightarrow H$ tal que $\psi_i = \psi \circ \mu_i$. En efecto, por la propiedad universal del producto libre, existe un único homomorfismo $\psi': G_1 * G_2 \rightarrow H$ tal que $\psi_i = \psi' \circ \theta_i$; pero la identidad $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ prueba que $\{(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}), (\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1}) : g \in G_0\} \subset \ker(\psi')$, y por lo tanto, es también $N \subset \ker(\psi')$, con lo que ψ' pasa al cociente por N .

¿Cómo se caracterizan los elementos de N ? Para que una palabra (no necesariamente reducida) represente un elemento de $G_1 * G_2$ que está en N , es necesario y suficiente que se pueda reducir al neutro (la palabra vacía) por una sucesión de manipulaciones de los tipos siguientes

- (i) reemplazar una letra $\varphi_1(g)$ por $\varphi_2(g)$, para $g \in G_0$ y recíprocamente;
- (ii) reemplazar dos letras consecutivas g_i y g'_i (donde $g_i, g'_i \in G_i$, $i \in \{1, 2\}$), por la letra $g''_i = g_i \cdot g'_i \in G_i$, y recíprocamente, descomponer una letra g''_i en una sucesión $g_i g'_i$, si $g''_i = g_i \cdot g'_i$.

Estas manipulaciones no cambian el elemento correspondiente de $G_1 * G_2$ y permiten alcanzar la palabra reducida deseada.

Observaciones 1.2. Como casos particulares, tenemos

- (i) si G_0 se reduce al elemento neutro, N es el grupo trivial y el producto amalgamado $G_1 *_{G_0} G_2$ es isomorfo a $G_1 * G_2$;
- (ii) si G_2 se reduce al elemento neutro, entonces N es el subgrupo normal engendrado por el conjunto $\varphi_1(G_0) = \{\varphi_1(g) : g \in G_0\}$. Además, $G_1 * G_2$ es isomorfo a G_1 , por la observación 1.1 (i). El producto amalgamado es entonces el cociente de G_1 por el menor subgrupo normal $\overline{\varphi_1(G_0)}$, que contiene a $\varphi_1(G_0)$.

1.3.5. Presentaciones de grupos

A veces, es conveniente describir un grupo dando un conjunto de generadores y una lista de reglas que expliquen como se multiplican estos generadores. Por ejemplo, el grupo cíclico de orden n generado por g puede describirse como el grupo generado por g , con la única relación $g^n = 1$: cualquier otra relación del grupo, como $g^{2n} = 1$ o $g^{3-n} = g^3$ se deriva de la primera. Pero es preciso expresar con rigor estas nociones.

Definición 1.9. Una *presentación* de un grupo es un par ordenado, $\langle S|R \rangle$, donde S es un conjunto arbitrario y R es un conjunto de elementos del grupo libre $L(S)$. Los elementos de S y R se llaman *generadores* y *relaciones* de la presentación, respectivamente. Una presentación define un grupo, denotado también $\langle S|R \rangle$, como el cociente $\langle S|R \rangle = L(S)/\overline{R}$, donde \overline{R} es la clausura normal de R en $L(S)$.

Cada generador $s \in S$ determina un elemento en $\langle S|R \rangle$ y toda relación $r \in R$ representa un producto particular de generadores y sus inversos, que es igual a 1 en el cociente. En cierto sentido, $\langle S|R \rangle$ es el mayor grupo generado por S en el que todos los productos representados por los elementos de R son iguales a 1.

Si G es un grupo y existe un isomorfismo $G \simeq \langle S|R \rangle$, se dice que $\langle S|R \rangle$ es una presentación del grupo G . Todo grupo admite una presentación, pero lo importante es encontrar una *eficaz*, es decir, con los conjuntos S y R lo menores posible.

Si G admite una presentación $\langle S|R \rangle$, para $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ conjuntos finitos, se dice que G tiene una *presentación finita*. Y la presentación se escribe de la forma $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | r_1, \dots, r_m \rangle$ o también $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$. A veces, se escribe $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | r_1 = q_1, \dots, r_m = q_m \rangle$ para expresar la presentación $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | r_1 q_1^{-1}, \dots, r_m q_m^{-1} \rangle$.

Ejemplos 1.5. Algunos ejemplos de presentaciones de grupos son

- (i) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tiene como presentación $\langle g_1, g_2 | g_1 g_2 = g_2 g_1 \rangle$;
- (ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tiene como presentación $\langle g | g^n = 1 \rangle$;
- (iii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tiene como presentación $\langle g_1, g_2 | g_1^n = 1, g_2^m = 1, g_1 g_2 = g_2 g_1 \rangle$.

1.4. Clasificación de superficies compactas

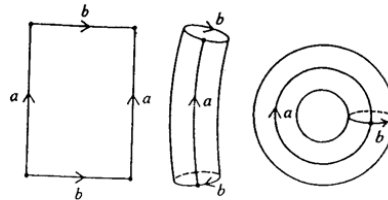
1.4.1. Definición de superficie y ejemplos

Definición 1.10. Una *variedad topológica de dimensión n* es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable, donde cada punto posee un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^n (equivalentemente, a una bola abierta euclídea de dimensión n). Es decir, se trata de un espacio *modelado* por el espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

Una *superficie topológica* es una variedad de dimensión dos. Los primeros ejemplos de superficies son el plano \mathbb{R}^2 , la esfera \mathbb{S}^2 , el toro \mathbb{T}^2 , y en general, cualquier abierto de una superficie sigue siendo una superficie.

La descripción de las superficies no compactas es muy complicada. Aquí, vamos a dar únicamente un breve repaso de las propiedades de las superficies compactas. Para su estudio, es conveniente tener una manera uniforme de representarlas.

El prototipo es el toro \mathbb{T}^2 , que se define como el cociente de un cuadrado en \mathbb{R}^2 , identificando aristas por pares de una determinada manera, como se muestra en la figura

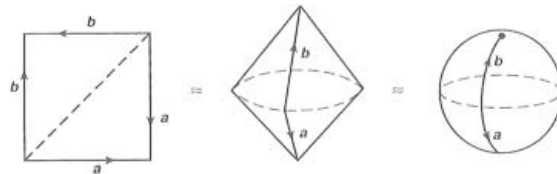


Definición 1.11. El toro \mathbb{T}^2 es el cociente de $[0, 1]^2$, por la relación de equivalencia $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (t, 1)$, si $0 \leq t \leq 1$.

Nuestro objetivo es probar que toda superficie compacta se puede representar como el cociente de una región poligonal en el plano por una relación de equivalencia que identifica los lados a pares. Como ejemplos básicos, tenemos

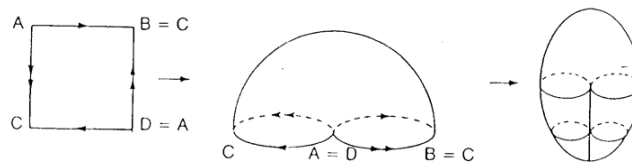
Lema 1.6. *La esfera \mathbb{S}^2 es homeomorfa a cualquiera de los cocientes siguientes*

- (i) *el cociente del disco unidad \mathbb{D}^2 , bajo la relación de equivalencia $(x, y) \simeq (-x, y)$, si $(x, y) \in fr(\mathbb{D}^2)$;*
- (ii) *el cociente de $[0, 1]^2$, por la relación de equivalencia $(0, t) \sim (t, 0)$ y $(1, t) \sim (t, 1)$, si $0 \leq t \leq 1$.*



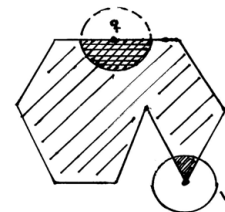
Lema 1.7. *El plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ es homeomorfo a cualquiera de los cocientes siguientes*

- (i) *el cociente de \mathbb{S}^2 , obtenido tras identificar puntos antipodales;*
- (ii) *el cociente de \mathbb{D}^2 , bajo la relación $(x, y) \simeq (-x, -y)$, si $(x, y) \in fr(\mathbb{D}^2)$;*
- (iii) *el cociente del cuadrado $[0, 1]^2$, por la relación de equivalencia $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ y $(t, 1) \sim (1 - t, 0)$, si $0 \leq t \leq 1$.*



1.4.2. Regiones poligonales

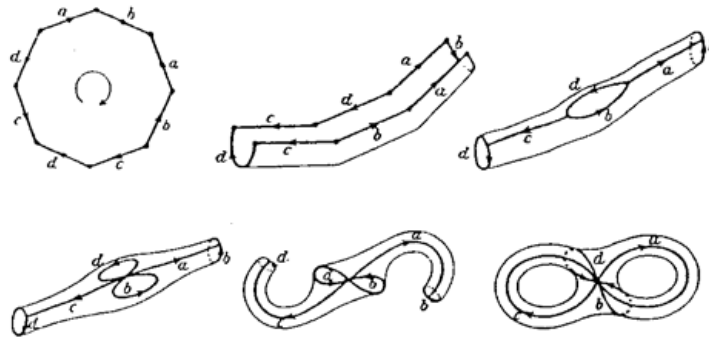
Definición 1.12. Una *región poligonal* P en el plano es un conjunto compacto, cuya frontera topológica es unión de una familia finita de segmentos cerrados llamados *aristas*, con puntos finales denominados *vértices*, tales que



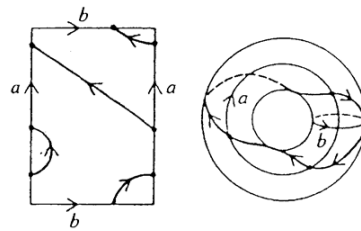
- (i) para cada punto q en una arista que no sea un vértice, existe un entorno U en \mathbb{R}^2 , tal que $P \cap U = U \cap H$, donde $H = \{(x, y) : ax + by + c \geq 0\}$ es un cierto semiplano cerrado;
- (ii) cada vértice v posee un entorno V en \mathbb{R}^2 , tal que $P \cap V = V \cap \hat{H}$, donde \hat{H} es la unión de dos semiplanos cerrados cuyas fronteras se cortan en v .

El siguiente resultado es clave en todo lo que sigue (ver [Lee]).

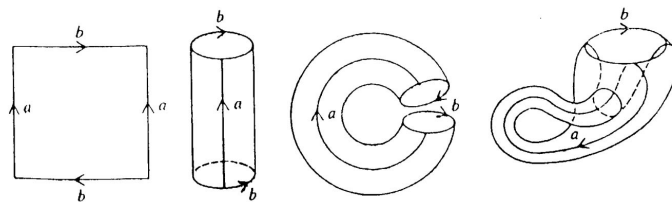
Proposición 1.8. *Sea P una región poligonal en el plano con un número par de aristas y sea \sim una relación de equivalencia que identifica cada arista con exactamente otra, por medio de un homeomorfismo lineal que envía los puntos finales de una arista en los puntos finales de la otra. El cociente resultante es una superficie compacta.*



La importancia de esta *representación plana* para una superficie es que, en muchas ocasiones, es más sencillo manipular objetos sobre la región poligonal que la representa. Por ejemplo, esto sucede al estudiar caminos sobre el toro \mathbb{T}^2 , como muestra la figura de la derecha.



Definición 1.13. La botella de Klein \mathbb{K}^2 se define como el cociente de $[0, 1]^2$ por la relación de equivalencia \simeq que identifica $(0, t) \simeq (1, t)$ y $(t, 1) \simeq (1 - t, 0)$, si $0 \leq t \leq 1$.



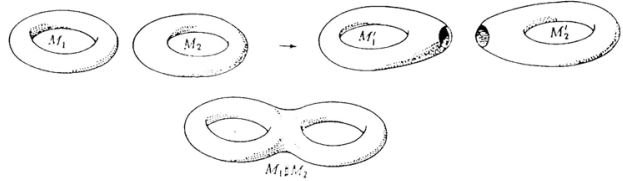
Para visualizarlo, pensar primero en pegar las aristas izquierda y derecha para formar un cilindro, y después pasar la tapa superior del cilindro a través de su pared, con el fin de pegar el círculo superior con el inferior *desde dentro*. Desde luego, esto no puede realizarse con un modelo físico; de hecho la superficie de Klein no es un subespacio de \mathbb{R}^3 . Sin embargo, la proposición 1.8 prueba que es una superficie.

1.4.3. Suma conexa de superficies

Para construir otros ejemplos de superficies, vamos a introducir una manera estándar de *fabricar* variedades, *pegando* otras más sencillas, procedimiento que será válido en cualquier dimensión.

Sean M_1 y M_2 dos variedades topológicas de dimensión n y conexas. Para $i \in \{1, 2\}$, sean $D_i \subset M_i$ subconjuntos homeomorfos a bolas cerradas euclídeas de radio 1 y B_i el interior de D_i . Elegimos un homeomorfismo $\sigma: fr(D_1) \rightarrow fr(D_2)$ (que existe porque ambas fronteras son homeomorfas a la esfera S^{n-1}). Si $M'_i = M_i - B_i$, sobre la suma disjunta $M'_1 \sqcup M'_2$, se identifica $q \in fr(D_1)$ con su imagen $\sigma(q) \in fr(D_2)$.

Definición 1.14. El cociente resultante se llama la *suma conexa* de M_1 y M_2 , y se denota por $M_1 \# M_2$. Geométricamente, la suma conexa se obtiene cortando una pequeña bola abierta de cada una de las variedades y pegando los espacios resultantes, a través de sus esferas frontera.

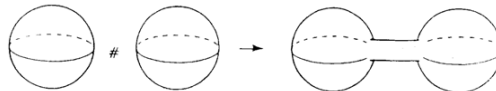


Proposición 1.9. Si M_1 y M_2 son variedades de dimensión n y conexas, cualquier suma conexa $M_1 \# M_2$ es una variedad de dimensión n y conexa.

La definición de $M_1 \# M_2$ depende, a priori, de varias elecciones: para $i \in \{1, 2\}$ los conjuntos D_i , el homeomorfismo σ , etc. A pesar de eso, se puede probar que diferentes *decisiones* dan lugar a sumas conexas homeomorfas.

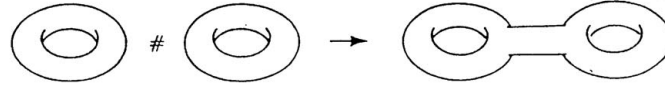
Ejemplos 1.6. Los siguientes son ejemplos sencillos de sumas conexas

- (i) si M es una variedad, $M \# S^n$ es homeomorfa a M ;



- (ii) la suma conexa $T^2 \# \dots \# T^2$ es la *superficie compacta de género n* (este nombre se aclarará en los problemas) o esfera de n asas. Esta última nomenclatura se debe a

que, de hecho, esta superficie es homeomorfa a la suma conexas $\mathbb{S}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$, y cada toro añadido parece un asa *pegada* a la *esfera base*.



Como hemos mencionado antes, para dar el teorema de clasificación de superficies compactas, precisamos una manera uniforme de describir tales objetos. Vamos a representar todas estas superficies como cocientes de regiones poligonales con $2n$ lados. De manera informal, podemos describir cada relación de equivalencia entre aristas, nombrando las aristas con letras a_1, \dots, a_n y dibujando sobre cada una de ellas una flecha *apuntando* hacia uno de sus vértices, de modo que los vértices con el mismo nombre se identifican, con las flechas indicando el modo en que las aristas se *pegan*. Una vez realizado este proceso, se asocia al polígono una sucesión de símbolos, obtenidos al leer las etiquetas de sus bordes en el sentido de las agujas del reloj: para cada símbolo a_i en la frontera, escribimos a_i en la sucesión si la flecha posee el sentido horario y ponemos a_i^{-1} si la flecha va en el sentido antihorario. Por ejemplo, la relación de equivalencia de $[0, 1]^2$ que da lugar al toro (ver definición 1.11) resulta en una sucesión de símbolos $aba^{-1}b^{-1}$.

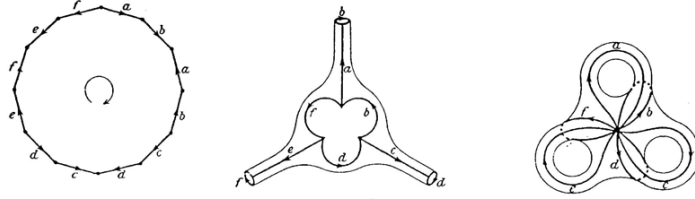
Formalmente, la *presentación de una superficie* es un par, $\langle a_1, \dots, a_n \mid W_1, \dots, W_k \rangle$, que consiste en una familia finita de símbolos $\{a_1, \dots, a_n\}$ y otro conjunto finito de *palabras* $\{W_1, \dots, W_k\}$ cada una de las cuales es una sucesión finita de elementos, que pueden ser a_i ó a_i^{-1} (donde $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$), para algún a_i en la lista, de tal manera que

- (1) cada símbolo a_i ocurre exactamente un número par de veces en W_1, \dots, W_k (contando ambos a_i ó a_i^{-1} como una aparición);
- (2) cada palabra W_j posee longitud (número de letras) 3 al menos, salvo en el caso en que la presentación completa tenga sólo una palabra, en cuyo caso a la palabra simple se le asigna la longitud 2.

Una presentación determina un espacio topológico con la siguiente *receta*

- (1) se asocia a cada palabra W_j un k_j -polígono convexo P_j en el plano, donde k_j es la longitud de W_j , y donde los polígonos elegidos son disjuntos (en el caso especial de $k_j = 2$, se usa en su lugar un disco cerrado, porque no existe un polígono de dos caras, y se consideran las *aristas* como los semicírculos izquierdo y derecho);
- (2) se define una correspondencia uno a uno entre las letras de W_j y las aristas del k_j -polígono, siguiendo el orden de las agujas del reloj, empezando por una arista arbitraria;

- (3) se identifica cada par de aristas que tienen el mismo símbolo, de acuerdo con el homeomorfismo afín que *pega* los primeros vértices en orden de las agujas del reloj, si dos aristas tienen la misma etiqueta a_i ó a_i^{-1} , y que identifica el primer vértice de una con el segundo vértice de la otra si las aristas están etiquetadas a_i y a_i^{-1} .



Por la proposición 1.8, el espacio topológico resultante es una superficie compacta. Los interiores, aristas y vértices de los polígonos P_j se llaman caras, aristas y vértices de la presentación. El número de caras es el mismo que el número de palabras, la cantidad de aristas de la presentación es el doble que el número de símbolos a_1, \dots, a_n . Para una arista etiquetada a_i , el *vértice inicial* es el primero siguiendo el orden de las agujas del reloj, y el *vértice final* es el otro; para una arista etiquetada a_i^{-1} , estas definiciones se invierten.

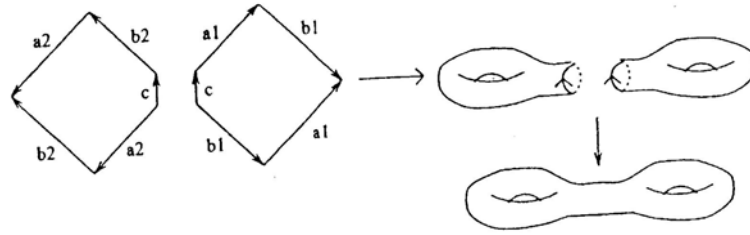
La superficie determinada por una presentación con una única cara es conexa, porque es un cociente de un polígono conexo; con más de una cara, no hay certeza de que es lo que sucede. Las únicas elecciones arbitrarias involucradas en esta construcción son formas, tamaños y ubicaciones de los polígonos y la decisión de cual es la primera arista (para seguir luego, a partir de ella, el orden de las agujas del reloj); es fácil ver que diferentes elecciones en este sentido, dan lugar a superficies homeomorfas.

Ejemplos 1.7. Las siguientes superficies están determinadas por las presentaciones:

- (1) la esfera \mathbb{S}^2 : $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ ó $\langle a, b \mid aa^{-1}bb^{-1} \rangle$;
- (2) el toro \mathbb{T}^2 : $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$;
- (3) el plano proyectivo \mathbb{RP}^2 : $\langle a \mid aa \rangle$ ó $\langle a, b \mid abab \rangle$;
- (4) la botella de Klein \mathbb{K}^2 : $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$.

Ahora vamos a describir las presentaciones estándar de superficies formadas por suma conexa. La clave es la siguiente proposición

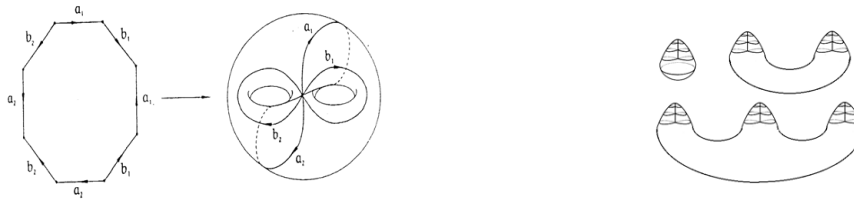
Proposición 1.10. Sean M_1 y M_2 superficies dadas por presentaciones $\langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 \rangle$ y $\langle b_1, \dots, b_m \mid W_2 \rangle$ respectivamente (W_1 y W_2 representan palabras simples, y parte de la hipótesis es que cada presentación tiene una cara simple). Entonces, la suma conexa $M_1 \sharp M_2$ tiene como presentación $\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid W_1 W_2 \rangle$, donde $W_1 W_2$ indica la palabra formada al concatenar W_1 y W_2 .



De la proposición 1.10 y de los ejemplos 1.7, se deduce

Ejemplos 1.8. Se tienen las siguientes presentaciones, llamadas estándar

- (1) $\langle a_1, b_1, \dots, a_n b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle$ para la superficie compacta de género n ;
- (2) $\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_1 \dots a_n a_n \rangle$ para la suma conexas de n copias de $\mathbb{R}P^2$.



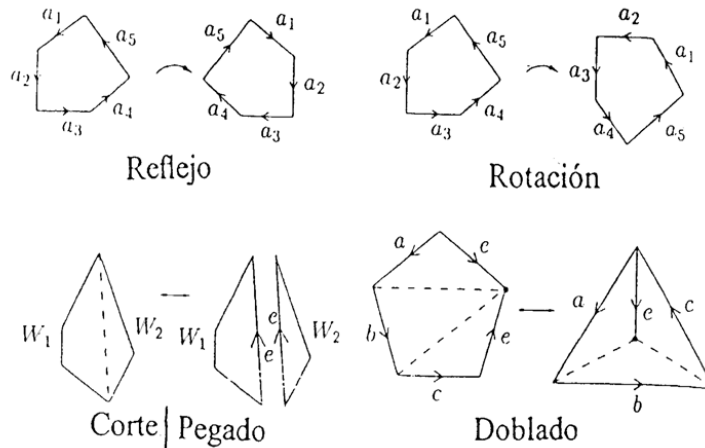
Hay ciertas reglas para transformar presentaciones de superficies en otras diferentes de la misma superficie (bajo homeomorfismo). Se dice que dos presentaciones son *equivalentes*, si determinan superficies homeomorfas. Y puede probarse

Proposición 1.11. Cada una de las siguientes operaciones sobre una presentación produce otra equivalente

- (1) Renombramiento: cambiar las ocurrencias de un símbolo a_i , por un nuevo símbolo, aún no existente en la presentación; intercambiar todas las ocurrencias de dos símbolos a_i y a_j o intercambiar todas las ocurrencias de a_i y a_i^{-1} , para algún i ;
- (2) Reflejo: $\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \mid a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle$;
- (3) Rotación: $\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_k \rangle$;
- (4) Corte: si W_1 y W_2 son palabras con al menos longitud 2, $\langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2 \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n, c \mid W_1 c, c^{-1} W_2 \rangle$;
- (5) Pegado: $\langle a_1, \dots, a_n, c \mid W_1 c, c^{-1} W_2 \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2 \rangle$;

(6) Doblado: si W_1 y W_2 tienen ambas longitud al menos 2, $\langle a_1, \dots, a_n, a \mid W_1 a a^{-1} W_2 \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2 \rangle$.

Se presentan debajo esquemáticamente estas operaciones



Utilizando las anteriores transformaciones, es fácil comprobar

Lema 1.12. *Se verifican las propiedades*

- (1) la botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$;
- (2) la suma conexa $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ es homeomorfa a $T^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Y finalmente, combinando los anteriores resultados, se deduce el teorema de **clasificación de superficies compactas**

Teorema 1.13. *Cualquier superficie conexa y compacta es homeomorfa a una de las siguientes*

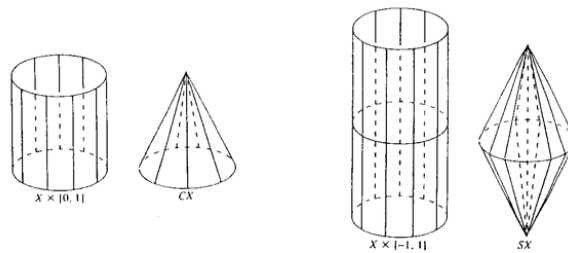
- (1) una esfera S^2 ;
- (2) una suma conexa de toros $T^2 \# \dots \# T^2$;
- (3) una suma conexa de planos proyectivos $\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$.

1.5. Problemas

1.- Probar los siguientes espacios son conexos por caminos

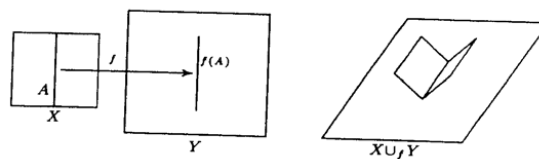
- (i) las n -variedades conexas;

- (ii) el *cono* de un espacio topológico X : sobre $X \times [0, 1]$, se considera la relación de equivalencia $(x, 1) \sim (y, 1)$, para $x, y \in X$. El cociente bajo esta relación, $C(X)$, es el *cono* de X . X se identifica con el subespacio $X \times \{0\}$ de $C(X)$;
- (iii) la *suspensión* de un espacio X : sobre $X \times [-1, 1]$, se considera la relación de equivalencia $(x, 1) \simeq (y, 1)$ y $(x, -1) \simeq (y, -1)$, para $x, y \in X$. El cociente $S(X)$ (que también puede verse como un cociente de $C(X)$) se llama *suspensión* de X .



2.- Si X es un espacio topológico, se denota por $\pi_0(X)$ el conjunto de las componentes conexas por caminos. Dada una función continua $f: X \rightarrow Y$, se define la aplicación $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ que lleva una componente conexas por caminos C en X en la única componente conexas por caminos en Y que contiene al conjunto $f(C)$. Demostrar que $\pi_0: \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Set}$ es un functor covariante.

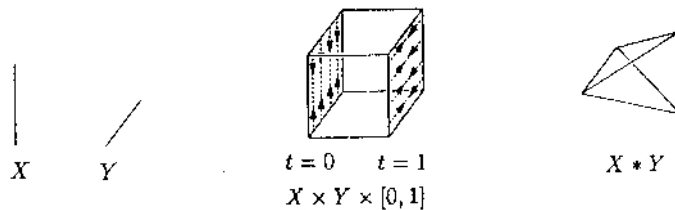
3.- Sean X e Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f: A \rightarrow Y$ continua. Se denota por $X \cup_f Y$ al cociente de la suma disjunta de $X \sqcup Y$ por la relación de equivalencia que identifica $x \in A$ con $f(x) \in Y$. Se dice que *se ha adjuntado X a Y a través de f* .



Se pide probar

- (i) Y se puede pensar como un subespacio de $X \cup_f Y$, con lo que hay una copia homeomorfa de Y en $X \cup_f Y$;
- (ii) si X e Y son espacios compactos y Hausdorff, A es cerrado en X y $f: A \rightarrow Y$ es continua, entonces $X \cup_f Y$ es compacto y Hausdorff;
- (iii) si A es cerrado y se adjunta X a $Y = \{y_0\}$ por la aplicación constante $f(A) = y_0$, entonces el espacio de adjunción asociado es homeomorfo al cociente X/A ;

- (iv) comprobar que el cono de X se obtiene adjuntando $X \times [0, 1]$ a $Y = \{y_0\}$, a través de la aplicación constante $f: X \times \{1\} \rightarrow Y$. Y la suspensión de X , se obtiene adjuntando $X \times [-1, 1]$ a $Y = \{a, b\}$, a través de la aplicación continua $g: X \times \{-1, 1\} \rightarrow Y$ que lleva $g(X \times \{1\}) = a$ y $g(X \times \{-1\}) = b$;
- (v) si se adjunta $X \times [0, 1] \times Y$ a la unión disjunta $X \sqcup Y$ a través de la aplicación continua $f: X \times \{0, 1\} \times Y \rightarrow X \sqcup Y$ definida por $f(x, 0, y) = x$ y $f(x, 1, y) = y$, se obtiene el *join*, $X * Y$ de X e Y .



Comprobar que $X * \{x_0\}$ es homeomorfo al cono de X y que $X * \mathbb{S}^0$ es homeomorfo a su suspensión;

- (vi) si (X, x) e (Y, y) son espacios con puntos base, se define su *wedge*, $X \vee Y$, como el cociente de su suma disjunta $X \sqcup Y$, tras identificar los puntos base. Expresarlo como un espacio de adjunción;
- (vii) supongamos que X, Y y W son espacios compactos Hausdorff y A es un subconjunto cerrado de X . Sea $f: A \rightarrow Y$ continua y $g: X \sqcup Y \rightarrow W$ continua y sobreyectiva. Si para cada $w \in W$, $g^{-1}(w)$ es o bien un punto de $X - A$ o bien la unión de un punto $y \in Y$ con $f^{-1}(y) \subset A$, probar que entonces W es homeomorfo a $X \cup_f Y$;
- (viii) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos cilindros $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ a través de la aplicación identidad que identifica sus círculos frontera, es decir, es homeomorfo al toro \mathbb{T}^2 ;
- (ix) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ a través de la aplicación identidad entre los toros frontera $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;
- (x) \mathbb{S}^3 es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ a través de la aplicación entre los toros frontera que intercambia los meridianos y paralelos $h: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, definida por $h(x, y) = (y, x)$.

4.- Para cada una de las siguientes presentaciones de superficies, aplicar el algoritmo de clasificación de la proposición 1.11 y determinar de que superficie se trata

- (i) $\langle a, b, c \mid abacb^{-1}c^{-1} \rangle$; (ii) $\langle a, b, c \mid abca^{-1}b^{-1}c^{-1} \rangle$;
 (iii) $\langle a, b, c \mid abca^{-1}b^{-1}c \rangle$; (iv) $\langle a, b, c \mid ab^{-1}c^{-1}a^{-1}cb \rangle$;
 (v) $\langle a, b, c \mid abc^{-1}bca \rangle$; (vi) $\langle a, b, c, d, e, f \mid abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa \rangle$;
 (vii) $\langle a, b, c, d, e, f, g \mid afg^{-1}e^{-1}b^{-1}bec^{-1}cgd^{-1}df^{-1}a^{-1} \rangle$;
 (viii) $\langle a, b, c, d, e, f \mid ab^{-1}cedef a^{-1}bc^{-1}d^{-1}f \rangle$;
 (ix) $\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o \mid abc, bde, dfg, fhi, haj, c^{-1}kl, e^{-1}mn, g^{-1}ok^{-1},$
 $i^{-1}l^{-1}m^{-1}, j^{-1}n^{-1}o^{-1} \rangle$.

5.- La banda de Möbius

En $[0, 1]^2$ se identifican $(0, y) \simeq (1, 1 - y)$, para cada $y \in [0, 1]$. La *banda de Möbius* es el cociente $\mathbb{M} = [0, 1]^2 / \simeq$, y es lo que se denomina una *superficie con borde*. Probar que si $p: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{M}$ es la aplicación cociente, el subespacio de \mathbb{M} definido por $p([0, 1] \times \{0, 1\})$ (llamado la *arista de la banda*) es homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Una superficie S es *orientable* si no contiene ningún subespacio homeomorfo a la banda de Möbius (de otro modo, si no existe ningún embebimiento $i: \mathbb{M} \rightarrow S$, de la banda \mathbb{M} en la superficie dada). En caso contrario se dice *no orientable*. Se pide probar

- (i) la esfera \mathbb{S}^2 es orientable;
 (ii) la orientabilidad es una propiedad topológica;
 (iii) al contrario que las superficies no orientables, toda superficie orientable puede embeberse en \mathbb{R}^3 .

6.- El toro

Sea la aplicación $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, definida por

$$f(s, t) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Se pide probar

- (i) f pasa al cociente dado por la definición 1.11, de donde se deduce que el toro \mathbb{T}^2 es homeomorfo al producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;
 (ii) el toro (y cualquier suma conexa de toros) es una superficie orientable.

7.- La botella de Klein

Se pide probar que

- (i) la botella de Klein \mathbb{K}^2 es homeomorfa al espacio de adjunción de dos bandas de Möbius por la aplicación identidad que identifica sus aristas;
- (ii) deducir que la botella de Klein es no orientable;
- (iii) \mathbb{K}^2 no puede embeberse en \mathbb{R}^3 , pero si en \mathbb{R}^4 : la función $f: [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y) = ((1 + |x|) \cos(\pi y), (1 + |x|) \sin(\pi y), \sin(\pi x) \cos(\frac{\pi y}{2}), \sin(\pi x) \sin(\frac{\pi y}{2}))$, es continua y pasa al cociente dado en la definición 1.13.

8.- El plano proyectivo real

Se pide probar que

- (i) el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ es homeomorfo al espacio de adjunción de una banda de Möbius y un disco por la aplicación identidad que identifica sus fronteras;
- (ii) deducir que $\mathbb{R}P^2$ (y cualquier suma conexa de planos proyectivos) es no orientable;
- (iii) el plano proyectivo real no puede embeberse en \mathbb{R}^3 , pero si en \mathbb{R}^4 : se considera la función continua $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$. La imagen por f de dos puntos antipodales de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es el mismo punto de \mathbb{R}^4 , por lo que esta función pasa al cociente dado por el lema 1.7, definiendo un embebimiento del $\mathbb{R}P^2$ en \mathbb{R}^4 .

9.- Característica de Euler y género de una superficie

Aunque hemos demostrado en el teorema 1.13 que toda superficie conexa y compacta es homeomorfa a una esfera o a una suma conexa de toros o de planos proyectivos, no sabemos si estos tipos de superficies son topológicamente distintos. En otras palabras ¿podría suceder, si m y n son enteros positivos distintos, que la suma conexa de n toros fuera homeomorfa a la suma conexa de m toros? Para demostrar que esto no es posible introducimos un invariante numérico, llamado *característica de Euler*, y que tiene sus raíces en la conocida *fórmula de Euler* que afirma que “si P es un poliedro convexo en el espacio, con f caras, e aristas y v vértices, entonces $v - e + f = 2$ ”.

Esta fórmula puede generalizarse a superficies compactas arbitrarias, del modo siguiente

Definición 1.15. Si M es una superficie con una presentación P dada, se define la *característica de Euler* de la presentación como $\chi(P) = v - e + f$, donde v es el número de vértices, e el de aristas y f el de caras de P , tras las identificaciones que definen la superficie.

Se pide probar

- (i) $\chi(P)$ depende sólo de M , es decir, es invariante por las transformaciones de la proposición 1.11, con lo que queda definida la *característica de Euler* de M , $\chi(M)$ como la de cualquier presentación de la superficie;
- (ii) *teorema de invariancia topológica* de la característica de Euler: sea M una superficie compacta sin borde y conexa, entonces
- 1) si M es homeomorfa a la esfera, es $\chi(M) = 2$,
 - 2) si M es homeomorfa a la suma conexa de n toros, es $\chi(M) = 2 - 2n$,
 - 3) si M es homeomorfa a la suma conexa de n planos proyectivos, entonces es $\chi(M) = 2 - n$;
- (iii) si M_1 y M_2 son superficies compactas, entonces $\chi(M_1 \sharp M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.

Observar que la característica de Euler de la suma conexa de n toros coincide con la de la suma conexa de $2n$ planos proyectivos: la orientación permite distinguir estos dos casos.

Es fácil comprobar que una superficie es no orientable cuando tiene alguna presentación P , donde aparecen dos símbolos consecutivos de la forma $\langle a, a_1, \dots, a_n / W_1, \dots, aa \rangle$.

$\mathbb{T}^2 \sharp^{(n)} \mathbb{T}^2$ se llama *superficie compacta de género n* y $\mathbb{RP}^2 \sharp^{(n)} \mathbb{RP}^2$ *superficie compacta no orientable de género n* . \mathbb{S}^2 es la única superficie orientable de género 0.

Se pide probar

- (i) la relación entre el género $g(M)$ de una superficie M y su característica de Euler es

$$g(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(M)) & \text{si } M \text{ es orientable;} \\ 2 - \chi(M) & \text{si } M \text{ es no orientable.} \end{cases}$$

- (ii) si M_1 y M_2 son superficies compactas, M_1 es homeomorfa a M_2 , si y sólo si son ambas orientables o no orientables y $\chi(M_1) = \chi(M_2)$: éste es un teorema topológico por excelencia, que reduce el problema de clasificación de superficies compactas a la determinación de la orientabilidad y la característica de Euler, problemas que son ambos fácilmente resolubles;
- (iii) si M_1 y M_2 son superficies compactas, M_1 es homeomorfa a M_2 , si y sólo si son ambas orientables o no orientables y $g(M_1) = g(M_2)$.

Homotopía de aplicaciones

El problema central de la *Topología* es el de decidir si dos espacios topológicos son o no homeomorfos. En *Topología Algebraica*, se usa el siguiente modelo de procedimiento para solucionar esta cuestión: dado un espacio topológico X , se le asocia un objeto algebraico $A(X)$, de modo que si Y es otro espacio homeomorfo a X , el objeto algebraico $A(Y)$ adjudicado a Y por el mismo procedimiento resulta ser isomorfo a $A(X)$. Es decir, $A(\cdot)$ es lo que se llama un *invariante topológico*. Así, estos objetos algebraicos permiten detectar cuando estos dos espacios topológicos no son homeomorfos, si los invariantes asociados a uno y al otro no son isomorfos. Se pasa de objetos topológicos a algebraicos, porque estos últimos son *más sencillos* de manejar, más *computables*.

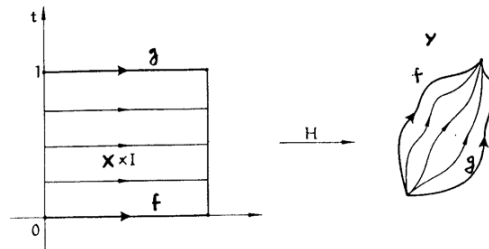
La homotopía, que introducimos a continuación, es el invariante topológico más conocido y utilizado.

2.1. Homotopía de aplicaciones

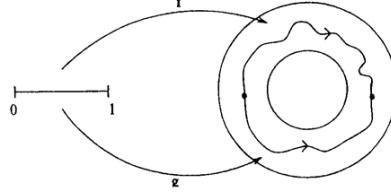
Definición 2.1. Sean X e Y espacios topológicos y $A \subset X$. Si $f, g: X \rightarrow Y$ son aplicaciones continuas, tales que $f|_A = g|_A$, se dice que f y g son *homótopas relativamente a A* , si existe una aplicación continua, $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, tal que

- (i) $H(x, 0) = f(x)$, para cada $x \in X$,
- (ii) $H(x, 1) = g(x)$, para cada $x \in X$,
- (iii) $H(x, t) = f(x) = g(x)$, para cada $x \in A$ y $t \in [0, 1]$.

Se expresa del modo $H : f \simeq g(\text{rel } A)$. Si $A = \emptyset$, se escribe $H : f \simeq g$, y se dice que f y g son *homótopas* (o *libremente homótopas*).



Observación 2.1. Si para $t \in [0, 1]$ se define la aplicación continua $h_t: X \rightarrow Y$ por la fórmula $h_t(x) = H(x, t)$, la homotopía H da lugar a una familia uniparamétrica $\{h_t\}_{t \in [0, 1]}$ de funciones continuas, transformando de manera continua $h_0 = f$ en $h_1 = g$. La función h_t puede pensarse como la deformación en el instante t .



Ejemplos 2.1. Para ilustrar esta definición se tienen los ejemplos siguientes

- (i) dadas las funciones continuas $1_{\mathbb{R}}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = x^2$, la aplicación continua $H: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x, t) = x^2(1-t) + tx$, es una homotopía entre ambas;
- (ii) dada la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, definida por $f(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$, la aplicación $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, dada por $H(s, t) = (\cos(2\pi st), \sin(2\pi st))$ es una homotopía entre la aplicación constante igual a $(1, 0)$ y f .

Observación 2.2. El ejemplo 2.1 (ii) prueba que el camino cerrado f alrededor del origen, es homótopo en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ a un camino constante, a pesar de que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ tiene un agujero rodeado por f . Luego para detectar agujeros en X no es suficiente con estudiar los caminos cerrados homótopos a constantes: la solución a este problema, que veremos más adelante, será considerar *homotopías de caminos*, que dejan los extremos de la deformación fijos.

Teorema 2.1. La homotopía (rel A) es una relación de equivalencia sobre el conjunto $C(X, Y)$ de las aplicaciones continuas de X en Y .

Demostración: La relación es reflexiva, pues $F: f \simeq f(\text{rel } A)$, tomando $F(x, t) = f(x)$. Si $F: f \simeq g(\text{rel } A)$, entonces $G: g \simeq f(\text{rel } A)$, donde $G(x, t) = F(x, 1-t)$, con lo que se obtiene la simetría. Finalmente, la relación es transitiva pues si $F: f \simeq g(\text{rel } A)$ y $G: g \simeq h(\text{rel } A)$, entonces $H: f \simeq h(\text{rel } A)$, donde

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Así, se puede hablar de *clases de homotopía (rel A)*, de aplicaciones continuas de X en Y . Se denota por $[f]_A$ (respectivamente, por $[f]$, si $A = \emptyset$) la clase de homotopía de $f(\text{rel } A)$. Y $[X, Y]_A$ (respectivamente, $[X, Y]$, si $A = \emptyset$) es la familia de dichas clases de homotopía.

2.2. La categoría de espacios topológicos y homotopías

Proposición 2.2. Sean X, Y, Z espacios topológicos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ y $g_0, g_1: Y \rightarrow Z$ aplicaciones continuas, tales que $F: f_0 \simeq f_1(\text{rel } A)$, $f_0(A) = f_1(A) \subset B$ y $G: g_0 \simeq g_1(\text{rel } B)$. Entonces, $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1(\text{rel } A)$.

Demostración: Se verifica

- (i) $g_0 \circ F: g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1(\text{rel } A)$, y
- (ii) $G \circ (f_1 \times 1_{[0,1]}): g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1(\text{rel } f_1^{-1}(B))$, y como $A \subset f_1^{-1}(B)$, es también $g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1(\text{rel } A)$.

Por transitividad, se obtiene el resultado. ■

Observación 2.3. Queda así definida una categoría, $\mathfrak{h}\mathfrak{Top}$, la *categoría de homotopía*, donde

- (i) los objetos son espacios topológicos,
- (ii) los morfismos son las clases de homotopía ($\text{rel } \emptyset$) de aplicaciones entre estos espacios topológicos, es decir, $\mathfrak{h}\mathfrak{Top}(X, Y) = [X, Y]$. La proposición 2.2 garantiza que la composición está bien definida, por $[g] \circ [f] = [g \circ f]$, para clases $[f] \in [X, Y]$ y $[g] \in [Y, Z]$.

Observación 2.4. En vez de trabajar con espacios topológicos, podríamos considerar pares de espacios topológicos (X, A) . Y llegaríamos, de modo similar al anterior, a la categoría de pares de espacios y clases de homotopía de aplicaciones continuas entre pares de espacios.

Definición 2.2. Una aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ es una *equivalencia de homotopía* si existe otra aplicación continua $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. En tal caso, se dice que X tiene el *mismo tipo de homotopía* que Y , y se escribe $X \simeq Y$. Intuitivamente, como se verá con mayor claridad en lo que sigue, es posible *deformar* X en Y .

Lema 2.3. La relación de ser homotópicamente equivalentes entre dos espacios topológicos es una relación de equivalencia.

Observación 2.5. Las equivalencias de homotopía son precisamente los isomorfismos en $\mathfrak{h}\mathfrak{Top}$.

Proposición 2.4. Si X e Y son homeomorfos, son homotópicamente equivalentes.

Observación 2.6. El recíproco no es cierto, y se verán ejemplos más adelante.

Observación 2.7. En muchas ocasiones, la manera más sencilla de distinguir topológicamente dos espacios, será demostrar que no son homotópicamente equivalentes y aplicar la proposición 2.4.

Se trata, a partir de ahora, de construir funtores $T: \mathfrak{Top} \rightarrow \mathfrak{C}$, donde \mathfrak{C} es una categoría algebraica como \mathfrak{Group} , \mathfrak{Ab} , etc., de modo que si $f \simeq g$, sea $T(f) = T(g)$. Esta propiedad transforma la teoría de homotopía en *valiosa*, porque garantiza que un problema algebraico en \mathfrak{C} , que proviene de uno topológico vía T , es más simple de resolver que la cuestión original.

Definición 2.3. Una aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ es *nulhomótopa*, si existe una aplicación constante $c: X \rightarrow Y$, tal que $f \simeq c$.

Definición 2.4. Un espacio topológico X se dice *contráctil*, si la aplicación identidad 1_X es nulhomótopa. La función $H: 1_X \simeq c$ que define la homotopía se llama una *contracción*.

Ejemplo 2.1. Los conjuntos convexos en \mathbb{R}^n son contráctiles.

Demostración: Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y $a \in A$, la aplicación $H: A \times [0, 1] \rightarrow A$ definida por $H(x, t) = tx + (1 - t)a$ es una homotopía $H: 1_A \simeq a$, donde a denota la aplicación constante igual a a . ■

Proposición 2.5. Si Y es contráctil, dos aplicaciones continuas cualesquiera $f, g: X \rightarrow Y$ son homótopas.

Demostración: Sea $H: 1_Y \simeq c$ la homotopía que existe por hipótesis. Entonces $f = 1_Y \circ f \simeq c \circ f \simeq c \simeq c \circ g \simeq 1_Y \circ g = g$. ■

Observación 2.8. En particular, si Y es contráctil, dos aplicaciones constantes de Y en sí mismo son homótopas, y a su vez homótopas a la identidad. Así, en un espacio contráctil, 1_Y es homótopa a cualquier aplicación constante sobre este espacio, a través de una homotopía libre; esta propiedad no se extiende a homotopías relativas a subespacios arbitrarios A , como puede verse en [Sp], pág. 26.

Proposición 2.6. Un espacio es contráctil si y sólo si posee el tipo de homotopía de un punto.

Demostración: Sea X contráctil, $H: 1_X \simeq c$, donde c denota a la función constante igual a c . Si $P = \{c\}$ e $i: P \rightarrow X$ es la inclusión, $c \circ i = 1_P$ y $1_X \simeq c = i \circ c$. Y recíprocamente, si $P = \{c\}$ y $X \simeq P$, existen $f: X \rightarrow P$ y $g: P \rightarrow X$, tales que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_P$. Pero $g \circ f$ es una aplicación constante. Luego X es contráctil. ■

Corolario 2.7. *Cualquier espacio homotópicamente equivalente a uno contráctil es también contráctil.*

Definición 2.5. Sea $A \subset X$ y la inclusión $i_A: A \rightarrow X$. Se dice que A es

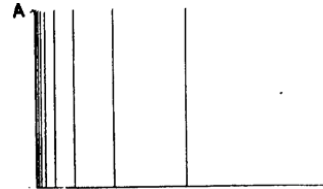
- (i) un *retracto* de X , si existe una aplicación continua $r: X \rightarrow A$, la *retracción*, tal que $r \circ i_A = 1_A$. Observar que r es siempre sobreyectiva;
- (ii) un *retracto por deformación* de X , si existe una retracción $r: X \rightarrow A$, verificando la condición $i_A \circ r \simeq 1_X$;
- (iii) un *retracto por deformación fuerte* de X , si existe una retracción $r: X \rightarrow A$, tal que $i_A \circ r \simeq 1_X(\text{rel } A)$.

Proposición 2.8. *Si $A \subset X$ es un retracto por deformación de X , entonces $A \simeq X$.*

Observación 2.9. En la definición 2.5 se verifican las implicaciones (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i), pero los recíprocos no son ciertos, como lo prueban los siguientes contraejemplos

- (i) $\not\Rightarrow$ (ii) dado un espacio X no contráctil –que existen– y $p \in X$, $\{p\}$ es un retracto de X , pero no por deformación;
- (ii) $\not\Rightarrow$ (iii) sean el *espacio peine* $X = ((\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$

y $A = \{(0, 1)\} \subset X$. Entonces, A es un retracto por deformación de X , pero que no es fuerte.



2.3. Problemas

1.- En el ejercicio 2 del apartado 1.5, se ha demostrado que $\pi_0: \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{S}et$ es un functor covariante. Probar que además, si $f \simeq g$, es $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

2.- Una propiedad relativa a espacios topológicos es una *propiedad de homotopía*, si se conserva por equivalencias de homotopía. Probar

- (i) toda propiedad de homotopía es una propiedad topológica;
- (ii) la conexión, el número de componentes conexas por caminos (luego, la conexión por caminos) y la contractibilidad son propiedades de homotopía;
- (iii) la convexidad (cuando tenga sentido), la compacidad y el axioma de Hausdorff, no son propiedades de homotopía.

3.- Probar las siguientes propiedades relativas a espacios contráctiles

- (i) todo conjunto convexo en \mathbb{R}^n es contráctil;
- (ii) todo espacio contráctil es conexo por caminos;
- (iii) la imagen continua de un espacio contráctil no es en general contráctil;
- (iv) un retracto de un espacio contráctil es también contráctil;
- (v) X es contráctil si y sólo si todo átomo $\{x\}$ es un retracto por deformación de X .

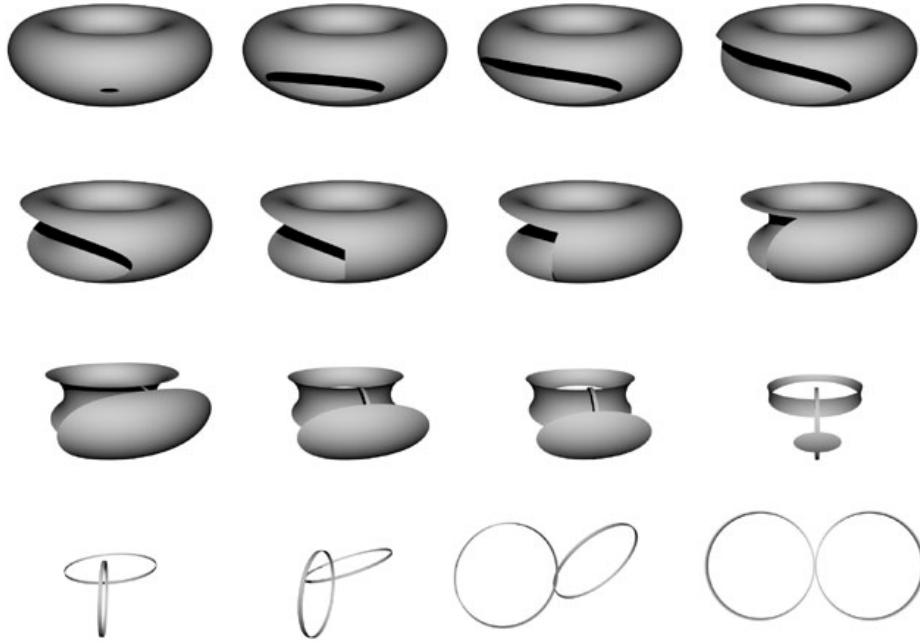
4.- Probar las siguientes propiedades relativas a retracts

- (i) S^n es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ ($\mathbf{0}$ es el origen de \mathbb{R}^{n+1});
- (ii) el ecuador de S^n es un retracto por deformación de $S^n - \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$ (\mathbf{N} es el polo norte y \mathbf{S} el polo sur);
- (iii) el disco cerrado unidad $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$, es un retracto por deformación de \mathbb{R}^n ;
- (iv) S^1 es un retracto por deformación de $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;
- (v) la figura de ocho $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1 \text{ ó } (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$ es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^2 - \{(-1, 0), (1, 0)\}$;
- (vi) dados los conjuntos $X, Y, Z \subset \mathbb{R}^2$, definidos por $X = \{(x, y) : (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ y $Z = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$, se cumple que X es un retracto por deformación de $X \cup Y$. No sucede lo mismo con $X \cup Z$, aunque de momento no sabemos demostrarlo.

5.- Probar las siguientes propiedades relativas a conos de espacios

- (i) el cono de cualquier espacio topológico es un espacio contráctil. Concluir que todo espacio topológico puede embeberse en un espacio contráctil;
- (ii) una aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ es nulhomótota si y sólo si posee una extensión continua al cono de X .

6.- Probar que el ecuador de la banda de Möbius es un retracto por deformación fuerte de M . Concluir que la banda de Möbius y el cilindro son homotópicamente equivalentes.**7.-** Sea X el complementario de un punto en el toro \mathbb{T}^2 . Probar que existe un subconjunto de X homeomorfo a la figura de ocho, y que es un retracto por deformación fuerte de X .



Torus into 8, © Josh Levenberg.

<http://www.technomagi.com/josh/images/index.html>

8.- Se pide probar

- (i) si $f, g: X \rightarrow \mathbb{S}^n$ son dos aplicaciones continuas tales que $f(x) \neq -g(x)$ para cada $x \in X$, entonces $f \simeq g$. Deducir que si $f: X \rightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y no sobreyectiva, entonces f es nulhomótopa;
- (ii) si $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y sin puntos fijos, es homótopa a la aplicación antipodal;
- (iii) si $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y $f(x) \neq -x$, para cada $x \in \mathbb{S}^n$, es homótopa a la identidad.

9.- Sea $p \in \mathbb{S}^n$ y $f: \mathbb{S}^n \rightarrow Y$ continua. Probar que son equivalentes

- (i) f es nulhomótopa;
- (ii) f puede extenderse a una aplicación continua $F: \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow Y$;
- (iii) f es homótopa (rel $\{p\}$) a la aplicación constante igual a $f(p)$.

Concluir que toda aplicación continua $f: \mathbb{S}^n \rightarrow Y$ con Y contráctil, tiene una extensión continua al disco \mathbb{D}^{n+1} .

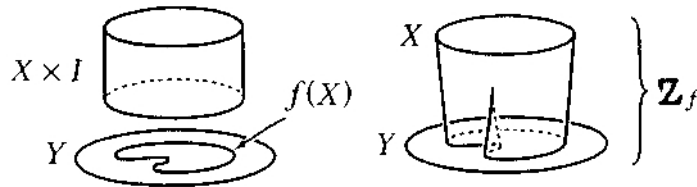
10.- Probar las siguientes propiedades relativas a productos

- (i) dos aplicaciones continuas $f, g: X \rightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_n$ son homótopas si y sólo si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, es $p_i \circ f \simeq p_i \circ g$, donde $p_i: Y_1 \times \cdots \times Y_n \rightarrow Y_i$ es la proyección canónica;
- (ii) $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ es contráctil si y sólo si Y_i es contráctil para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

11.- Sean X e Y espacios topológicos. Probar que $[X, Y]$ tiene un único elemento en los siguientes casos

- (i) Y es contráctil;
- (ii) X es contráctil e Y conexo por caminos.

12.- Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ continua. Se define el *mapping cylinder* Z_f de f como el espacio cociente de la suma disjunta $(X \times [0, 1]) \sqcup Y$ por la relación de equivalencia determinada por $(x, 0) \sim f(x)$, para $x \in X$. Sea $q: (X \times [0, 1]) \sqcup Y \rightarrow Z_f$ la aplicación cociente.



Se pide probar

- (i) si Y es un punto, entonces Z_f es el cono de X ;
- (ii) q lleva homeomórficamente Y sobre un subespacio cerrado $q(Y)$ de Z_f . Por medio de este embebimiento, Y puede considerarse como un subespacio cerrado de Z_f . Y $g: X \rightarrow Z_f$ definida por $g(x) = q(x, 1)$ lleva homeomórficamente X sobre el subespacio cerrado $q(X \times \{1\})$ de Z_f . Luego, X e Y pueden considerarse como subespacios disjuntos y cerrados de Z_f , y se llaman *dominio* y *rango* de Z_f , respectivamente;
- (iii) probar que $q(Y)$ es un retracto por deformación fuerte de Z_f ;

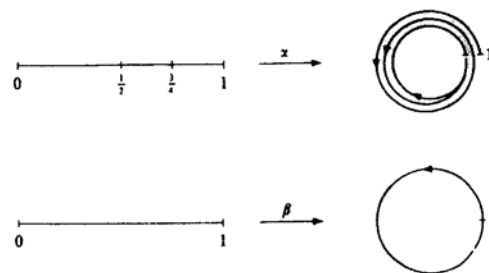
- (iv) si f es una equivalencia de homotopía, probar que $q(X \times \{1\})$ es un retracto por deformación de Z_f ;
- (v) dos espacios son homotópicamente equivalentes si y sólo si son ambos homeomorfos a retracts por deformación de algún espacio;
- (vi) toda aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ es homotópicamente equivalente a una aplicación inclusión $g: X \rightarrow Z_f$;
- (vii) las aplicaciones $g: X \rightarrow Z_f$ y $q \circ f: X \rightarrow Z_f$ son homótopas;
- (viii) dadas dos aplicaciones continuas $f: X \rightarrow Y$ y $g: X \rightarrow Z$, son equivalentes
 - a) existe $h: Z \rightarrow Y$ continua tal que $h \circ g \simeq f$;
 - b) existe una aplicación continua $F: Z_g \rightarrow Y$, tal que $F \circ i_X \simeq f$, donde la aplicación $i_X: X \rightarrow Z_g$ es la inclusión del apartado (ii).

13.- En este problema, se trata de dar un ejemplo no trivial de espacio contráctil

(i) sea $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Se consideran los caminos α y β en \mathbb{S}^1 , basados en el punto 1 y definidos por

$$\alpha(s) = \begin{cases} e^{4\pi i s} & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ e^{4\pi i(2s-1)} & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ e^{8\pi i(1-s)} & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

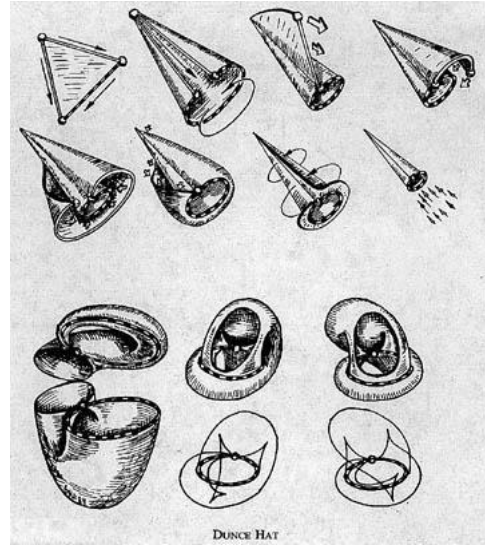
y $\beta(s) = e^{2\pi i s}$. Geométricamente, α enrolla cada uno de los segmentos $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$ en la circunferencia, los dos primeros en sentido antihorario, y el tercero en sentido de las agujas del reloj. El lazo β enrolla $[0, 1]$ una sola vez en la circunferencia y en sentido antihorario. Probar que estos dos lazos son homótopos;



(ii) un espacio contráctil puede tener una apariencia *poco contráctil*: identificamos los lados de un triángulo *lleno*, como muestra la figura. Se obtiene así un espacio, llamado el *capelo del tonto*. Se trata de probar que este espacio es contráctil, aunque no es obvia la manera de contraerlo.

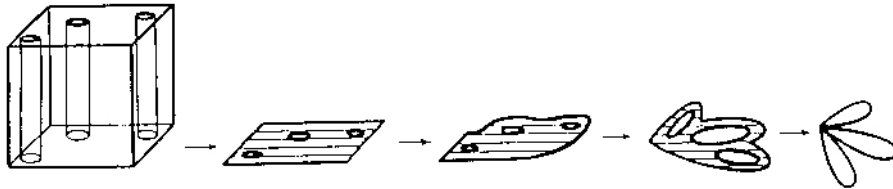
Se pide probar lo anterior, siguiendo los pasos

- (a) si $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ son aplicaciones continuas homótopas, los espacios obtenidos a partir de X uniéndole un disco utilizando f ó g ($X \cup_f \mathbb{D}^2$ y $X \cup_g \mathbb{D}^2$, respectivamente), son homotópicamente equivalentes;
- (b) usando (a) y la parte (i) de este problema, probar que el *capelo del tonto* tiene el mismo tipo de homotopía que un disco, y por consiguiente es contráctil.

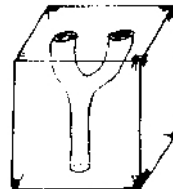
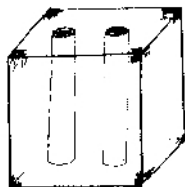


El anterior dibujo está extraído de [Fr], página 21.

14.- Probar que un cubo lleno $[0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ privado de tres cilindros tiene el tipo de homotopía de una rosa de tres pétalos, es decir, la unión por un punto de tres copias disjuntas de \mathbb{S}^1 .



15.- ¿Tienen las dos figuras siguientes el mismo tipo de homotopía? Los objetos son dos cubos macizos con *perforaciones* diferentes: en el primer caso la figura está agujereada por medio de dos cilindros disjuntos y el segundo cubo está atravesado por un objeto conexo.

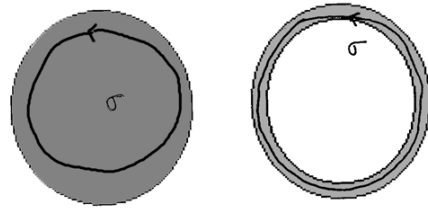


El grupo fundamental

En este capítulo, se trata de asociar un grupo topológicamente invariante a un espacio, es decir, de modo que grupos asociados a espacios topológicos homeomorfos sean isomorfos.

¿Qué propiedad topológica de un espacio permite distinguir un disco \mathbb{D}^2 de una corona circular? En otras palabras, ¿puede detectarse *el agujero* de la corona, sin utilizar para ello ideas que no sean puramente topológicas (como distancias, ángulos,...)? Una respuesta natural se obtiene al intentar contraer un camino cerrado en cada uno de los espacios.

Intuitivamente, en \mathbb{D}^2 , todo camino cerrado puede llevarse a un punto (el camino constante), mientras que esto es imposible en la corona circular, en donde el agujero actúa de *barrera* para caminos cerrados que rodean a este agujero, impidiendo dicha contracción.

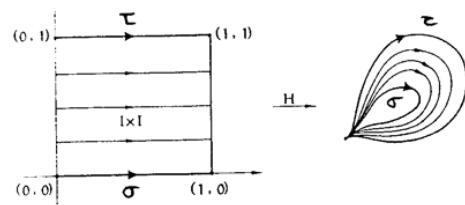


3.1. Homotopía de caminos

Definición 3.1. Dos caminos $\sigma, \tau: [0, 1] \rightarrow X$, tales que $\sigma(0) = \tau(0)$ y $\sigma(1) = \tau(1)$ se llaman *caminos homótopos* si $\sigma \simeq \tau(\text{rel}\{0, 1\})$. La homotopía de caminos, es decir, la homotopía con extremidades fijas, se denota por $\sigma \sim \tau$.

Explícitamente, existe una homotopía $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

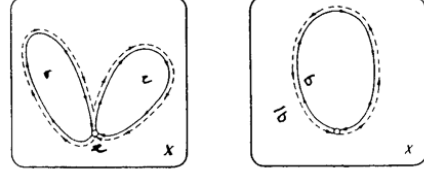
- (i) $H(t, 0) = \sigma(t)$ y $H(t, 1) = \tau(t)$, para $t \in [0, 1]$,
- (ii) $H(0, s) = \sigma(0)$ y $H(1, s) = \sigma(1)$, para $s \in [0, 1]$.



Por el teorema 2.1, sabemos que \sim es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los caminos en X , $C([0, 1], X)$. Denotamos por $[\sigma]$ la clase de homotopía del camino σ .

Definición 3.2. Dados dos caminos $\sigma, \tau: [0, 1] \rightarrow X$, tales que $\sigma(1) = \tau(0)$, su producto es el camino

$$(\tau * \sigma)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \tau(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



El camino opuesto de σ es $\bar{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$.

Lema 3.1. Sean $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1$ caminos en X tales que $\sigma_0(1) = \tau_0(0)$, $\sigma_1(1) = \tau_1(0)$ y $F: \sigma_0 \sim \sigma_1$, $G: \tau_0 \sim \tau_1$. Entonces, $\tau_0 * \sigma_0 \sim \tau_1 * \sigma_1$.

Demostración: La homotopía buscada es

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Así, es posible multiplicar clases de caminos: si σ, τ son caminos, tales que $\sigma(1) = \tau(0)$, tiene sentido definir el producto de sus clases $[\sigma] \cdot [\tau] \stackrel{\text{def}}{=} [\tau * \sigma]$, es decir, la equivalencia de caminos es compatible con su producto.

Aunque la multiplicación de caminos no es asociativa, lo es el producto de sus clases, es decir, en las condiciones anteriores, es $([\sigma] \cdot [\tau]) \cdot [\gamma] = [\sigma] \cdot ([\tau] \cdot [\gamma])$

Lema 3.2. Sean σ, τ, γ caminos en X , tales que $\sigma(1) = \tau(0)$ y $\gamma(0) = \tau(1)$. Entonces, se verifica que $\gamma * (\tau * \sigma) \sim (\gamma * \tau) * \sigma$.

Demostración: Obviamente los caminos son diferentes, ya que

$$\gamma * (\tau * \sigma)(t) = \begin{cases} \sigma(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \tau(4t - 1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$(\gamma * \tau) * \sigma(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(4t - 2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t - 3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La homotopía buscada $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ es

$$H(t, s) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \tau(4t - s - 1) & \text{si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Sea $\varepsilon_x: [0, 1] \rightarrow X$ el camino constante igual a x . Si $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ es un camino con origen el punto x y extremo el punto y , entonces

Lema 3.3. $\sigma * \varepsilon_x \sim \sigma \sim \varepsilon_y * \sigma$.

Demostración: Veamos que $\sigma * \varepsilon_x \sim \sigma$, el otro caso es similar.

$$\sigma * \varepsilon_x(t) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La homotopía buscada $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ es

$$H(t, s) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \sigma\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Con esto, hemos probado que $[\varepsilon_x] \cdot [\sigma] = [\sigma] = [\sigma] \cdot [\varepsilon_y]$, es decir, $[\varepsilon_x]$ es el neutro a izquierda de $[\sigma]$ y $[\varepsilon_y]$ es su neutro a derecha.

Lema 3.4. Si σ y τ son caminos tales que $\sigma(0) = \tau(0)$, $\sigma(1) = \tau(1)$ y $F: \sigma \sim \tau$, es $\bar{\sigma} \sim \bar{\tau}$.

Demostración: La homotopía buscada $G: \bar{\sigma} \sim \bar{\tau}$ es $G(t, s) = F(1 - t, s)$. ▀

La clase $[\bar{\sigma}]$ actúa como inversa a izquierda y a derecha de $[\sigma]$, es decir, $[\bar{\sigma}] \cdot [\sigma] = [\varepsilon_y]$ y $[\sigma] \cdot [\bar{\sigma}] = [\varepsilon_x]$

Lema 3.5. Si σ es un camino tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$, entonces $\bar{\sigma} * \sigma \sim \varepsilon_x$ y $\sigma * \bar{\sigma} \sim \varepsilon_y$.

Demostración: Veamos que $\bar{\sigma} * \sigma \sim \varepsilon_x$.

$$\bar{\sigma} * \sigma(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\sigma}(2t - 1) = \sigma(2 - 2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La homotopía buscada $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ es

$$H(t, s) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \sigma(1-s) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ \sigma(2-2t) & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

3.2. El grupo fundamental

Definición 3.3. Un camino $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ se llama *cerrado* o *lazo*, si $\sigma(0) = \sigma(1)$. Si además $\sigma(0) = \sigma(1) = x$, se dice también que σ es un *lazo* (o un camino) *basado en* x .

Si $\Omega(X, x)$ es la familia de los lazos basados en x , es claro que el producto y la inversión de caminos son operaciones internas en este conjunto. Sobre $\Omega(X, x)$ se puede considerar la relación de homotopía de caminos. Si $\pi_1(X, x) = \Omega(X, x) / \sim$ es el cociente bajo esta relación, los resultados del apartado 3.1 prueban que

Teorema 3.6. $\pi_1(X, x)$ es un grupo, llamado grupo fundamental de X en x o grupo de Poincaré de X en x .

Si se cambia el punto base, los grupos correspondientes no guardan relación

Ejemplo 3.1. Si consideramos el subespacio del plano euclídeo $X = \mathbb{S}^1 \cup \{(0, 0)\}$, veremos más adelante que $\pi_1(X, (1, 0)) \simeq \mathbb{Z}$ y claramente $\pi_1(X, (0, 0)) \simeq 0$.

Sin embargo, se verifica que

Teorema 3.7. Si $x, y \in X$ y σ es un camino que une x e y , entonces el homomorfismo de grupos $\varphi_\sigma: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, y)$, definido por $\varphi_\sigma([\tau]) = [\sigma * \tau * \bar{\sigma}]$, es un isomorfismo.

Demostración: φ_σ es un homomorfismo de grupos, de inverso $\varphi_{\bar{\sigma}}: \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(X, x)$. ■

Corolario 3.8. Si X es conexo por caminos, el grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ no depende del punto $x \in X$. En tal caso, se escribe $\pi_1(X)$, y se habla del grupo de Poincaré de X .

¿Qué efecto ejerce una aplicación continua entre espacios topológicos sobre los grupos fundamentales correspondientes? Sea $f: X \longrightarrow Y$ continua. Si σ, τ son dos caminos en X , son obvias las siguientes propiedades

- (i) $f \circ \sigma$ es un camino en Y ,
- (ii) si $\sigma \in \Omega(X, x)$, entonces $f \circ \sigma \in \Omega(Y, f(x))$,
- (iii) dada la homotopía $H: \sigma \sim \tau$, entonces $f \circ H: f \circ \sigma \sim f \circ \tau$.

Luego, si $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$, es $[f \circ \sigma] \in \pi_1(Y, f(x))$, y

Lema 3.9. La aplicación $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ dada por $\pi_1(f)([\sigma]) = [f \circ \sigma]$ es un homomorfismo de grupos, llamado homomorfismo inducido por f .

Teorema 3.10. Si $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ son aplicaciones continuas, se verifica que

- (i) $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$,
- (ii) $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X, x)}$.

Observación 3.1. Así, el grupo fundamental proporciona una manera de pasar de la topología al álgebra: acabamos de probar que π_1 es un functor covariante de la categoría \mathfrak{Top}_* en la categoría \mathfrak{Group} .

Corolario 3.11. Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces la aplicación inducida entre los grupos fundamentales, $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo para cada $x \in X$.

Observación 3.2. Esto no significa que dos espacios con grupos de Poincaré isomorfos sean homeomorfos

- (i) si X es un espacio discreto, una aplicación $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ es continua si y sólo si es constante. Luego, $\Omega(X, x) = \{\varepsilon_x\}$ y $\pi_1(X, x) = 0$ para cada $x \in X$;
- (ii) si X es un espacio indiscreto, toda aplicación $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ es continua. Así, en este caso, $\Omega(X, x) = \{\sigma: [0, 1] \rightarrow X : \sigma(0) = x = \sigma(1)\}$. Para cada $\sigma, \tau \in \Omega(X, x)$, es $\sigma \sim \tau$. Luego, $\pi_1(X, x) = 0$ para todo $x \in X$.

Dos aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo sobre grupos fundamentales, salvo un automorfismo interior, que se comprende por el hecho de que dos aplicaciones homótopas pueden enviar el punto base de X en distintos puntos base de Y

Teorema 3.12. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas, $H: f \simeq g$ una homotopía y $x \in X$. Sea $\sigma: [0, 1] \rightarrow Y$ el camino dado por $\sigma(t) = H(x, t)$. Entonces, se cumple que $\pi_1(g) = \varphi_\sigma \circ \pi_1(f)$, donde φ_σ es el isomorfismo inducido por σ , según el teorema 3.7.

Demostración: Si $\gamma \in \Omega(X, x)$, hay que probar que $\pi_1(g)([\gamma]) = \varphi_\sigma \circ \pi_1(f)([\gamma]) = [\sigma * f \circ \gamma * \bar{\sigma}]$.

$$\sigma * (f \circ \gamma * \bar{\sigma})(t) = \begin{cases} H(x, 1 - 4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ H(\gamma(4t - 1), 0) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además, $g(\gamma(t)) = H(\gamma(t), 1)$, y si $g(x) = z$, es $g(\gamma) \simeq \varepsilon_z * g(\gamma) * \varepsilon_z$, donde

$$\varepsilon_z * (g(\gamma) * \varepsilon_z)(t) = \begin{cases} H(x, 1) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ H(\gamma(4t - 1), 1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La homotopía buscada $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ es

$$F(t, s) = \begin{cases} H(x, 1 - 4t(1 - s)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ H(\gamma(4t - 1), s) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 1 + 2(t - 1)(1 - s)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \blacksquare$$

Corolario 3.13. Si dos espacios conexos por caminos X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.

Demostración: Tenemos dos aplicaciones $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ tales que

$$F: 1_X \simeq g \circ f \quad \text{y} \quad G: 1_Y \simeq f \circ g.$$

Sea $x = g(y) \in g(Y) \subset X$. Vamos a probar que $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo.

Sea $\gamma(t) = F(x, t)$, camino que une x con $g \circ f(x)$. El teorema 3.12 dice que $\pi_1(g \circ f) = \varphi_\sigma \circ \pi_1(1_X) = \varphi_\sigma: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x)))$ es un isomorfismo. Esto demuestra que $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es inyectiva.

Sea $\sigma(t) = G(y, t)$, camino que une y con $f \circ g(y) = f(x)$. El teorema 3.12 dice que $\pi_1(f \circ g) = \varphi_\sigma \circ \pi_1(1_Y) = \varphi_\sigma: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo. Esto prueba que $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es sobreyectiva. ■

Corolario 3.14. Se verifican las siguientes propiedades

(i) si A es un retracto por deformación de X y $a \in A$, entonces la inclusión $i_A: A \rightarrow X$ induce un isomorfismo entre $\pi_1(A, a)$ y $\pi_1(X, a)$;

(ii) todo espacio contráctil tiene grupo fundamental trivial.

Definición 3.4. Si X es conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es trivial, se dice que X es *simplemente conexo*.

Observación 3.3. El corolario 3.14 (ii), dice que un espacio contráctil es simplemente conexo. El recíproco no es cierto: si $n > 1$, \mathbb{S}^n no es contráctil.

Teorema 3.15. Sean X e Y espacios, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y las proyecciones coordenadas $p_X: X \times Y \rightarrow X$, $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$. El homomorfismo

$$\varphi: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$

definido por $\varphi = (\pi_1(p_X), \pi_1(p_Y))$, es un isomorfismo.

Observación 3.4. El producto de espacios simplemente conexos es simplemente conexo.

3.3. Grupo fundamental de la esfera de dimensión 1

Vamos a calcular el grupo fundamental de \mathbb{S}^1 utilizando las propiedades especiales de la esfera.

El producto de números complejos, define una estructura de grupo topológico sobre la esfera unidad $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} : \|x\| = 1\}$.

El punto de partida para calcular $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es la *aplicación exponencial*, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, definida por $\exp(t) = e^{2\pi it}$. La igualdad $e^{2\pi i(s+t)} = e^{2\pi is}e^{2\pi it}$, que expresa de manera resumida las fórmulas clásicas del coseno y el seno de una suma, afirma que la sobreyección continua \exp es además un homomorfismo del grupo aditivo de los números reales $(\mathbb{R}, +)$ sobre el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1, (\mathbb{S}^1, \cdot) . El núcleo de este homomorfismo es \mathbb{Z} .

Además, \exp verifica las siguientes propiedades topológicas.

Lema 3.16. *La aplicación $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es continua, sobreyectiva y abierta.*

Demostración: Veamos que es abierta. Para ello, sean $U \subset \mathbb{R}$ abierto y $F = \mathbb{S}^1 - \exp(U)$. Como $\exp^{-1}(\exp(U)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (U + \{n\})$ que es abierto, se deduce que $\exp^{-1}(F)$ es cerrado. Además, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $x' \in [0, 1]$ tal que $\exp(x) = \exp(x')$, luego $F = \exp(\exp^{-1}(F) \cap [0, 1])$, imagen continua de un compacto, luego cerrado. ■

Proposición 3.17. *La restricción de \exp a cualquier intervalo de amplitud 1 $(t, t + 1)$, es un homeomorfismo sobre $\mathbb{S}^1 - \{\exp(t)\}$.*

Demostración: Es una consecuencia del lema 3.16. ■

Sea $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ un camino: para $s \in [0, 1]$, existe $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(s) = \exp(\tilde{s})$. El problema es que \tilde{s} no está determinado de modo único a partir de s . El objetivo ahora es probar que para cada $s \in [0, 1]$, es posible elegir $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ de modo que $\sigma(s) = \exp(\tilde{s})$ y que la función $\tilde{\cdot}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que lleva s en \tilde{s} , sea continua.

Comencemos por el **lema de levantamiento de caminos**.

Lema 3.18. *Para todo camino $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, con $\sigma(0) = \exp(0) = 1$, existe un único camino $\tilde{\sigma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\tilde{\sigma}(0) = 0$ y $\exp \circ \tilde{\sigma} = \sigma$. El camino $\tilde{\sigma}$ se llama un levantamiento de σ .*

Demostración: Como $[0, 1]$ es un compacto métrico, $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ es uniformemente continua. En particular, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t'| < \delta$ es $\|\sigma(t) - \sigma(t')\| < 2$.

Esta condición garantiza en particular que $\sigma(t)$ y $\sigma(t')$ no son puntos antipodales. Por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$ para cada $t \in [0, 1]$.

Para todo $t \in [0, 1]$, subdividimos el intervalo $[0, t]$ en n intervalos de la misma amplitud, a través de los puntos

$$0 = t_0 < \frac{t}{n} = t_1 < \dots < \frac{(n-1)t}{n} = t_{n-1} < t_n = t.$$

Como $|t_j - t_{j-1}| = \frac{t}{n} < \delta$, $\sigma(t_j)$ y $\sigma(t_{j+1})$ no son puntos antipodales, o lo que es lo mismo $\sigma(t_j)^{-1}\sigma(t_{j+1}) \neq -1 \in \mathbb{S}^1$. Queda así definida para $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ la función continua $g_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 - \{-1\}$, por $g_j(t) = \sigma(t_j)^{-1}\sigma(t_{j+1})$. Además $g_j(0) = 1 \in \mathbb{S}^1$. Es inmediato comprobar que $\sigma(t) = g_0(t)g_1(t) \dots g_{n-1}(t)$.

Por la proposición 3.17, la restricción $\exp|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ es un homeomorfismo de $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sobre $\mathbb{S}^1 - \{-1\}$. Si λ es la inversa, se cumple que $\lambda(1) = 0$. Tiene sentido definir la composición $\lambda \circ g_j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, y además es una función continua. Definimos $\tilde{\sigma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{\sigma} = (\lambda \circ g_0) + \dots + (\lambda \circ g_{n-1})$: es continua, $\tilde{\sigma}(0) = 0$ y $\exp \circ \tilde{\sigma} = \sigma$, gracias a las propiedades algebraicas de \exp . Además $\tilde{\sigma}$ es la única verificando estas condiciones. En efecto, si $\tilde{\tilde{\sigma}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fuera continua, tal que $\tilde{\tilde{\sigma}}(0) = 0$ y $\exp \circ \tilde{\tilde{\sigma}} = \sigma$, entonces la función $h = \tilde{\sigma} - \tilde{\tilde{\sigma}}$ sería una función continua con valores enteros, luego necesariamente nula al ser $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\tilde{\sigma}}(0)$. ■

El siguiente se conoce como **lema de levantamiento de homotopías**.

Lema 3.19. Sean $\sigma, \tau: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ dos caminos, tales que $\sigma(0) = \tau(0) = 1 \in \mathbb{S}^1$ y $H: \sigma \sim \tau$. Existe una única aplicación \tilde{H} , tal que $H = \exp \circ \tilde{H}$ y $\tilde{H}: \tilde{\sigma} \sim \tilde{\tau}$, donde $\exp \circ \tilde{\tau} = \tau$ y $\exp \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.

Demostración: Siguiendo los mismos pasos que en el lema 3.18 –sustituyendo $[0, 1]$ por otro compacto convexo $[0, 1]^2$ – se construye $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $\exp \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0, 0) = 0$. Sólo falta ver que $\tilde{H}: \tilde{\sigma} \sim \tilde{\tau}$, y se hace en cuatro pasos:

1) $\varphi_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_0(t) = \tilde{H}(t, 0)$ es un camino que levanta a σ y tal que $\varphi_0(0) = \tilde{H}(0, 0) = 0$. La unicidad del levantamiento de caminos garantiza que $\varphi_0 = \tilde{\sigma}$.

2) $\theta_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\theta_0(s) = \tilde{H}(0, s)$ es un camino que levanta al camino constante 0 y tal que $\theta_0(0) = \tilde{H}(0, 0) = 0$. La unicidad del levantamiento de caminos garantiza que $\theta_0 = 0$. En particular, $\tilde{H}(0, 1) = 0$.

3) $\varphi_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_1(t) = \tilde{H}(t, 1)$ es un camino que levanta a τ y tal que $\varphi_1(0) = \tilde{H}(0, 1) = 0$ (por 2)). La unicidad del levantamiento de caminos garantiza que $\varphi_1 = \tilde{\tau}$.

4) $\theta_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\theta_1(s) = \tilde{H}(1, s)$ es un camino que levanta al camino constante $\sigma(1)$ y tal que $\theta_1(0) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{\sigma}(1)$ (por 1)). La unicidad del levantamiento de caminos garantiza que $\theta_1 = \tilde{\sigma}(1)$. En particular, $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\tau}(1)$. ■

Definición 3.5. Sea $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, un camino cerrado basado en 1. Se define el *grado* de σ , por $\deg(\sigma) = \tilde{\sigma}(1)$, donde $\tilde{\sigma}$ es el único levantamiento de σ con $\tilde{\sigma}(0) = 0$.

Observación 3.5. Es claro que $\exp \circ \tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = 1$ y por lo tanto el grado de un camino cerrado $\deg(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) \in \ker(\exp) = \mathbb{Z}$.

Observación 3.6. En general, se puede definir $\deg(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$, para $\tilde{\sigma}$ un levantamiento arbitrario de σ . Y en tal caso, es $\exp(\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)) = 1$, es decir, $\deg(\sigma) \in \mathbb{Z}$.

Observación 3.7. El grado de un camino cerrado denota el *número líquido* de vueltas que un punto móvil $\sigma(t)$ recorre a lo largo de \mathbb{S}^1 , cuando el tiempo t varía de 0 a 1. Donde *líquido* significa la diferencia entre el número de vueltas positivas (en el sentido antihorario) y el número de vueltas negativas (en el sentido de las agujas del reloj).

Teorema 3.20. La función índice, $ind: \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $ind([\sigma]) = \deg(\sigma)$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración: Por el lema 3.19, la función está bien definida. Es sobreyectiva, pues para cada $m \in \mathbb{Z}$ el camino $\sigma_m(t) = \exp(mt)$ tiene grado m . Si $\deg(\sigma) = 0$, entonces $\tilde{\sigma}(1) = 0$, con lo que $\tilde{\sigma}$ es un camino cerrado en \mathbb{R} basado en 0, luego homótopo al camino trivial (\mathbb{R} es contráctil), por lo que σ es homotópicamente nulo. Si probamos que la aplicación índice es un homomorfismo, el anterior argumento demuestra la inyectividad. Para ello, sean σ y τ dos caminos en \mathbb{S}^1 con punto base 1. Para calcular $\deg(\sigma * \tau)$ debemos encontrar un camino \tilde{h} en \mathbb{R} , tal que $\exp \circ \tilde{h} = \sigma * \tau$ y $\tilde{h}(0) = 0$. Y entonces, $\deg(\sigma * \tau) = \tilde{h}(1)$. Con las notaciones obvias, basta con tomar $\tilde{h} = \tilde{\gamma} * \tilde{\tau}$, donde $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\sigma}(t) + \deg(\tau)$. Y entonces, $\deg(\sigma * \tau) = \tilde{h}(1) = \deg(\sigma) + \deg(\tau)$. ■

De esta propiedad se deducen de manera inmediata varias propiedades.

Corolario 3.21. \mathbb{S}^1 no es simplemente conexo.

Corolario 3.22. Dos caminos cerrados en \mathbb{S}^1 basados en 1 son homótopos si y sólo si sus grados coinciden.

Corolario 3.23. \mathbb{S}^1 no es un retracto del disco \mathbb{D}^2 .

Demostración: Si existiera una retracción $r: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\pi_1(r): \pi_1(\mathbb{D}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ sería un epimorfismo, lo que es imposible. ■

Y se deduce también el **teorema del punto fijo de Brouwer**.

Corolario 3.24. Toda aplicación continua $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ admite un punto fijo.

Demostración: Supongamos que f no posee puntos fijos. Para cada $x \in \mathbb{D}^2$, la recta dirigida que une $f(x)$ con x corta a $fr(\mathbb{D}^2) = \mathbb{S}^1$ en un único punto, $r(x)$. Queda así definida una función $r: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que es claramente una retracción, en contra del corolario 3.23. ■

Este resultado se generaliza al caso de discos de dimensiones mayores que dos: para probarlo se utiliza como herramienta que \mathbb{S}^{n-1} no es un retracto de \mathbb{D}^n , pero se necesitan argumentos de teoría de homología para su demostración.

Lema 3.25. *Sea $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua, tal que $f(1) = 1$. El camino en \mathbb{S}^1 definido por $\sigma(t) = f(\exp(t))$ posee grado 0.*

Demostración: Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ el lazo $\alpha(t) = \exp(t)$. Entonces, $\sigma = f \circ \alpha$. Como \mathbb{D}^2 es contráctil, se deduce que σ es homótopo al camino trivial, luego tiene grado 0. ■

Veamos un *teorema de meteorología*: en cada instante, existen sobre la tierra puntos antipodales en los que la temperatura y la presión atmosférica son idénticos; es el **teorema de Borsuk–Ulam**.

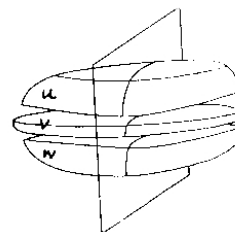
Teorema 3.26. *Sea $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua. Existen puntos antipodales en \mathbb{S}^2 , tales que $f(z) = f(-z)$.*

Demostración: Sea $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(z) = f(z) - f(-z)$. Lo que debemos probar es que g se anula en algún punto de \mathbb{S}^2 . Observar que para $z \in \mathbb{S}^2$, es $g(-z) = -g(z)$ (1). Sea ahora la función $h: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = g(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. h es continua y de (1), se deduce que si $w \in \mathbb{S}^1$, es $h(-w) = -h(w)$ (2). Para probar el resultado, basta con probar un enunciado más general: *Toda función continua $h: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaciendo (2) se anula en algún punto del disco*. Supongamos que una tal función no se anula en ningún punto de \mathbb{D}^2 . Se puede entonces definir otra función continua $\varphi: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ por $\varphi(w) = \frac{h(w)\|h(1)\|}{\|h(w)\|h(1)}$, que satisface $\varphi(-w) = -\varphi(w)$ para $w \in \mathbb{S}^1$ (3) y $\varphi(1) = 1$ (4). Por el lema 3.25, el camino $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ definido por $\sigma = \varphi \circ \exp$ posee grado 0. Sea $\tilde{\sigma}$ el levantamiento de σ con origen en 0, es decir, $\deg(\sigma) = \tilde{\sigma}(1)$. La condición (3) prueba que $\exp(\tilde{\sigma}(t + \frac{1}{2})) = \exp(\tilde{\sigma}(t) + \frac{1}{2})$ para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. De otro modo, $\tilde{\sigma}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{\sigma}(t) - \frac{1}{2}$ es un entero. La función $f: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(t) = \tilde{\sigma}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{\sigma}(t) - \frac{1}{2}$ es continua, y por lo tanto constante igual a $m \in \mathbb{Z}$. Un sencillo cálculo muestra que $\deg(\sigma) = 2m + 1$, que es un número impar, es decir, no puede ser 0. ■

Como consecuencia de lo anterior, se deduce que no es posible dibujar un mapa-mundi, de manera homeomorfa, sobre la página de un atlas.

Corolario 3.27. *La esfera \mathbb{S}^2 no es homeomorfa a ningún subconjunto del plano euclídeo.*

El siguiente resultado tiene que ver con la división de volúmenes por planos: es posible, con un único corte de cuchillo, dividir dos trozos de pan y uno de jamón, cada uno de ellos en dos mitades iguales, sin importar lo muy irregulares que puedan ser estas piezas, ni sus posiciones relativas; es el **teorema del bocadillo de jamón**



Teorema 3.28. Sean U, V y W tres abiertos no vacíos, conexos y acotados de \mathbb{R}^3 . Existe un plano que divide cada uno de estos subconjuntos en dos piezas del mismo volumen.

Demostración: Sea $z \in \mathbb{S}^2$ y L_z la recta por z y el origen de coordenadas. Como el volumen de U es finito, existe $p_U \in L_z$ de manera que el plano por p_U perpendicular a L_z divide a U en dos trozos del mismo volumen. El punto p_U es único por conexión. Sea la función continua $g_U: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_U(z)z = p_U$. Por construcción, es claro que si $z \in \mathbb{S}^2$, es $g_U(-z) = -g_U(z)$ **(1)**. Se definen funciones g_V y g_W de manera análoga. Lo que queremos probar es que existe $z \in \mathbb{S}^2$ tal que $g_U(z) = g_V(z) = g_W(z)$. Para ello se define la función continua $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(z) = (g_U(z) - g_V(z), g_U(z) - g_W(z))$. Por el teorema de Borsuk-Ulam, existe $z_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(z_0) = f(-z_0)$ **(2)**. La condición **(1)** implica además que $f(-z_0) = -f(z_0)$ **(3)**. De **(2)** y **(3)**, $f(z_0) = (0, 0)$. ■

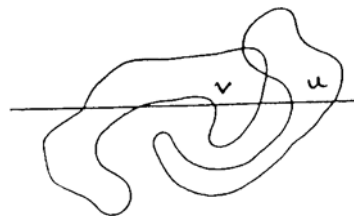
Los dos siguientes son los análogos en dimensión uno a los teoremas de Borsuk-Ulam y del bocadillo de jamón.

Proposición 3.29. Sea $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Existen puntos antipodales $x, -x \in \mathbb{S}^1$, tales que $f(x) = f(-x)$.

Demostración: Sea la función continua $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(-x)$. Basta con ver que g se anula en algún punto. Si $x \in \mathbb{S}^1$ es $g(x) = -g(-x)$ **(1)**. Si g no se anulase en ningún punto, por **(1)** tomaría valores positivos y negativos, luego $0 \in g(\mathbb{S}^1)$. ■

Y se deduce el **teorema del pastel**.

Teorema 3.30. Sean U y V dos abiertos no vacíos, conexos y acotados de \mathbb{R}^2 . Existe una recta que divide cada uno de estos subconjuntos en dos piezas de la misma área.



Demostración: Para cada $w \in \mathbb{S}^1$ sea L_w la recta por el origen de coordenadas y w . Existe una única recta orientada R_w (en la dirección del origen a w) paralela a L_w y que corta a U en dos trozos de la misma área. R_w depende continuamente de w . Sea $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación continua definida por: $f(w)$ es el área de la parte de V que se sitúa a la izquierda de R_w cuando se atraviesa R_w siguiendo su orientación. Por la proposición 3.29, existe

$w_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(w_0) = f(-w_0)$ **(2)**. Las rectas R_{w_0} y R_{-w_0} coinciden como rectas no orientadas, luego $f(w_0) = \text{área a la izquierda de } R_{w_0}$ y $f(-w_0) = \text{área a la izquierda de } R_{-w_0} = \text{área a la derecha de } R_{w_0}$. Por **(2)**, R_{w_0} corta a V en dos zonas de la misma área. ■

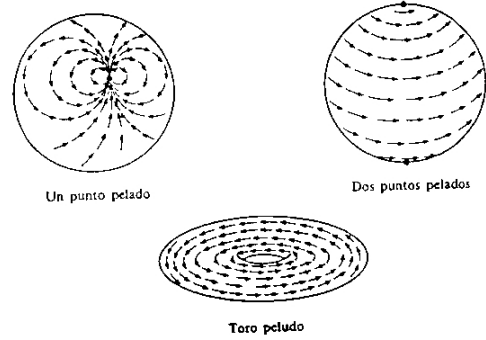
La aplicación índice dada en el teorema 3.20 posee también algunas utilidades en el estudio de campos de vectores.

Definición 3.6. Un campo de vectores $X : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es *tangente a \mathbb{S}^2* , si para cada $z \in \mathbb{S}^2$, $X(z)$ es ortogonal a z .

Existe siempre un punto sobre la superficie de la Tierra, en el cual el viento no sopla: es el **teorema de la bola peluda** (ver [Crs], página 114)

Teorema 3.31. *Todo campo de vectores tangente a \mathbb{S}^2 posee un punto singular.*

Este resultado es cierto para esferas de dimensión par arbitraria, como veremos más adelante. Sin embargo, es posible *peinar* esferas peludas de dimensión impar y toros peludos.



3.4. Teorema de Seifert–Van Kampen

El **teorema de Seifert–Van Kampen** es clave para el cálculo de muchos grupos fundamentales.

Teorema 3.32. *Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos conexos por caminos y $U \cap V$ es no vacío y conexo por caminos. Si $x_0 \in U \cap V$, entonces, $\pi_1(X, x_0)$ es el producto amalgamado de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$, por el subgrupo $\pi_1(U \cap V, x_0)$,*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

Demostración: Sea $\sigma \in \Omega(X, x_0)$. Sea ε el número de Lebesgue asociado al cubrimiento por abiertos $\{\sigma^{-1}(U), \sigma^{-1}(V)\}$ del compacto métrico $[0, 1]$. Sea una partición de $[0, 1]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$, con $|t_{i-1} - t_i| < \varepsilon$. Así, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, es $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ o $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset V$. Si dos intervalos consecutivos $[t_{i-1}, t_i]$ y $[t_i, t_{i+1}]$ tuvieran sus imágenes por σ contenidas en el mismo abierto, eliminamos el punto intermedio t_i . De este modo, para cada $i \in \{0, \dots, k\}$ es $\sigma(t_i) \in U \cap V$. Para $i \in \{1, \dots, k\}$, sea $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow X$ el camino $\sigma_i(t) = \sigma((1-t)t_{i-1} + tt_i)$; es fácil probar que $\sigma \sim \sigma_k * \dots * \sigma_1$.

Como $U \cap V$ es conexo por caminos, existen caminos $c_i: [0, 1] \rightarrow U \cap V$ uniendo x_0 con $\sigma(t_i)$, para $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Entonces,

$$\sigma \sim \sigma_k * \dots * \sigma_1 \sim (\sigma_k * c_{k-1}) * (\bar{c}_{k-1} * \sigma_{k-1} * c_{k-2}) * \dots * (\bar{c}_2 * \sigma_2 * c_1) * (\bar{c}_1 * \sigma_1) = \gamma_k * \dots * \gamma_2 * \gamma_1,$$

donde los caminos $\gamma_i \in \Omega(U, x_0)$ o $\gamma_i \in \Omega(V, x_0)$. Así, todo camino en X basado en x_0 se puede reescribir como un producto de lazos basados en x_0 , cada uno de los cuales vive en U o en V .

Las aplicaciones de inclusión

$$j_U: U \cap V \rightarrow U, j_V: U \cap V \rightarrow V, i_U: U \rightarrow X \text{ y } i_V: V \rightarrow X$$

dan lugar a homomorfismos

$$\pi_1(j_U): \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0), \pi_1(j_V): \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0),$$

$$\pi_1(i_U): \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \text{ y } \pi_1(i_V): \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Tenemos además las inyecciones canónicas

$$k_U: \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \text{ y } k_V: \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$$

y el homomorfismo natural inducido por $\pi_1(i_U)$ y $\pi_1(i_V)$,

$$\Phi: \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Se puede definir además la aplicación (que no es un homomorfismo de grupos)

$$F: \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$$

por $F([\gamma]) = \pi_1(j_U)([\bar{\gamma}]) * \pi_1(j_V)([\gamma])$. Si llamamos N_F a la clausura normal (ver el apartado 1.3.4) de $Im(F)$ en $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$, se prueba que Φ es un epimorfismo de núcleo N_F . ■

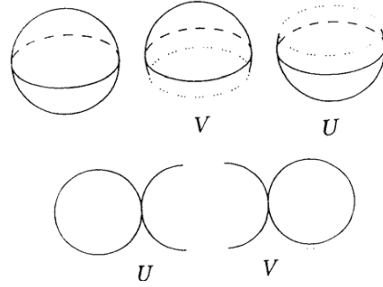
Corolario 3.33. *En las condiciones del teorema 3.32, si U y V son simplemente conexos y $U \cap V$ es conexo por caminos, entonces X es simplemente conexo.*

Corolario 3.34. *En las condiciones del teorema 3.32, si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el producto libre $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.*

Teorema 3.35. *En las condiciones del teorema 3.32, si V es simplemente conexo, $\pi_1(X, x_0)$ es el cociente de $\pi_1(U, x_0)$ por el menor subgrupo normal que contiene a $\pi_1(U \cap V, x_0)$.*

Ejemplos 3.1. Como aplicación del teorema de Seifert–Van Kampen, se obtiene

(i) \mathbb{S}^n es simplemente conexa, para $n > 1$: si \mathbf{N} y \mathbf{S} son el polo norte y el polo sur, respectivamente, basta con aplicar el teorema 3.32 a los dos abiertos $U = \mathbb{S}^n - \{\mathbf{N}\}$ y $V = \mathbb{S}^n - \{\mathbf{S}\}$.



(ii) $\pi_1(\mathbf{8})$ es el grupo libre con dos generadores, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(iii) Usando el ejercicio 7 del apartado 2.3, se concluye que $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ es el grupo abeliano libre con dos generadores, resultado deducido también usando el teorema 3.15.

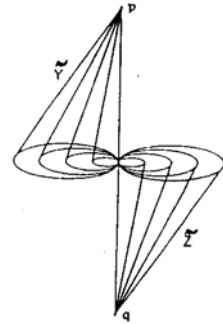
Observación 3.8. El argumento dado en el ejemplo 3.1(i) no es válido para la esfera \mathbb{S}^1 , pues la intersección obtenida no sería conexa por caminos. Por ello, hemos calculado en el apartado anterior su grupo fundamental directamente.

Observación 3.9. A pesar del resultado dado en el corolario 3.33, la unión de dos conjuntos simplemente conexos con un punto en común no es simplemente conexo en general, como lo prueba el siguiente ejemplo: para cada $n \in \mathbb{N}$, sean las circunferencias

$$Y_n = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

$$Z_n = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Sean $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$, \tilde{Y} el cono de base Y y vértice $(0, 0, 1)$ y \tilde{Z} el cono de base Z y vértice $(0, 0, -1)$. \tilde{Y} y \tilde{Z} son contráctiles, luego simplemente conexos, $\tilde{Y} \cap \tilde{Z} = \{(0, 0, 0)\}$ y $X = \tilde{Y} \cup \tilde{Z}$ no es simplemente conexo.



3.5. Grupos de homotopía superiores

Existen análogos n -dimensionales del grupo fundamental: son los grupos de homotopía de orden superior, $\pi_n(X, x_0)$, para $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in X$. En cierto sentido, $\pi_n(X, x_0)$ mide los agujeros de dimensión n de X .

Los elementos de $\pi_1(X, x_0)$ son clases de homotopía de caminos en X basados en x_0 . Como primer paso en la construcción de $\pi_n(X, x_0)$, hay que generalizar la noción de camino cerrado a la de lazo n -dimensional.

Definición 3.7. un n -lazo en X basado en x_0 es una aplicación continua $\sigma: [0, 1]^n \rightarrow X$, que lleva la frontera de $[0, 1]^n$ en x_0 .

Se define el producto de dos n -lazos, $\beta * \alpha = \gamma$, como el n -lazo

$$\gamma(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Definición 3.8. Dos n -lazos α y β basados en x_0 son *homótopos*, $\alpha \sim \beta$, si existe una aplicación continua $H: [0, 1] \times [0, 1]^n \rightarrow X$, tal que

- (i) $H(0; t_1, \dots, t_n) = \alpha(t_1, \dots, t_n)$, para $(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$,
- (ii) $H(1; t_1, \dots, t_n) = \beta(t_1, \dots, t_n)$, para $(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$,
- (iii) $H(s; t_1, \dots, t_n) = x_0$, para cada $s \in [0, 1]$ y cada $(t_1, \dots, t_n) \in fr([0, 1]^n)$.

Esta homotopía es una relación de equivalencia, y si se denota por $[\sigma]$ la clase de los n -lazos homótopos al n -lazo σ , se verifica

Lema 3.36. Cuando tengan sentido los siguientes productos, se cumple

- (i) si $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$, entonces $\beta * \alpha \sim \beta' * \alpha'$;
- (ii) $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$;
- (iii) si $\varepsilon: [0, 1]^n \rightarrow X$ se define por $\varepsilon(t_1, \dots, t_n) = x_0$, entonces $\varepsilon * \alpha \sim \alpha * \varepsilon \sim \alpha$;
- (iv) si se define $\bar{\alpha}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \alpha(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ y es $\alpha \sim \beta$, entonces $\bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$;
- (v) $\alpha * \bar{\alpha} \sim \bar{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon$.

Observación 3.10. Queda así demostrado que las clases de homotopía de n -lazos basados en x_0 forman un grupo para el producto $[\beta] \cdot [\alpha] = [\alpha * \beta]$, el grupo de homotopía de dimensión n , $\pi_n(X, x_0)$.

Lema 3.37. $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo abeliano, para $n \geq 2$. Se trata además de un invariante topológico.

Proposición 3.38. Si X es conexo por caminos y $x_0, x_1 \in X$, entonces $\pi_n(X, x_0)$ y $\pi_n(X, x_1)$ son isomorfos.

Teorema 3.39. Si X es contráctil, entonces $\pi_n(X, x_0) = 0$ para cada $n > 1$.

Teorema 3.40. Si X e Y son espacios, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, entonces

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0).$$

Observación 3.11. En general, es extremadamente difícil calcular los grupos de homotopía de orden superior. De hecho, incluso para esferas, su cálculo no está aún completamente realizado. A pesar de todo, pueden probarse resultados del tipo

- (i) $\pi_n(\mathbb{S}^k) \simeq \pi_{n+1}(\mathbb{S}^{k+1})$, si $n, k > 1$;
- (ii) $\pi_n(\mathbb{S}^k) = 0$, si $n < k$;
- (iii) $\pi_1(\mathbb{S}^k) = 0$, si $k > 1$;
- (iv) $\pi_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$, si $n \geq 1$.

Algunos de los resultados conocidos son realmente sorprendentes, como muestra esta tabla de grupos de homotopía de esferas extraída de [Ha]

		$\pi_i(\mathbb{S}^n)$											
		$i \rightarrow$											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n \downarrow$	1	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2
	5	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{30}
	6	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2
	7	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0

3.6. Problemas

1.- Sean X un espacio topológico, $A \subset X$, $i_A: A \rightarrow X$ la inclusión natural y $r: X \rightarrow A$ una retracción. Dado $a \in A$, demostrar

- (i) $\pi_1(r): \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$ es un epimorfismo;
- (ii) $\pi_1(i_A): \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ es un monomorfismo;
- (iii) si r es una retracción por deformación, entonces $\pi_1(i_A): \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ es un isomorfismo.

2.- Sea X un espacio conexo por caminos, $a, b \in X$ y σ un camino uniendo estos puntos. Demostrar que $\pi_1(X, a)$ es abeliano si y sólo si el isomorfismo $\varphi_\sigma: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$ definido por σ según el teorema 3.7, no depende de hecho de σ .

3.- Probar que si X es un espacio conexo por caminos, son equivalentes

- (i) X es simplemente conexo,
- (ii) dos aplicaciones cualesquiera $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ son homótopas,
- (iii) toda aplicación continua $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ se extiende a la bola unidad cerrada \mathbb{D}^2 .

4.- Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y $c(x)$ la componente conexa por caminos que contiene a x . Probar que los grupos fundamentales $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(c(x), x)$ son isomorfos. Por esta razón, basta con enunciar la mayoría de las propiedades de homotopía para espacios conexos por caminos.

5.- Probar que el conjunto de los puntos $z \in \mathbb{D}^2$ para los que $\mathbb{D}^2 - \{z\}$ es simplemente conexo es precisamente $\mathbb{S}^1 = fr(\mathbb{D}^2)$. Deducir que si $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ es un homeomorfismo, entonces $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

6.- Calcular los grupos fundamentales de

- (i) un espacio discreto, un espacio indiscreto, la recta racional, el toro \mathbb{T}^2 , la figura de ocho, una corona circular, $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;
- (ii) la rosa de n pétalos, G_n , unión por un punto de n copias de \mathbb{S}^1 ;
- (iii) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1 \text{ y } x \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$ (observar que X tiene el mismo tipo de homotopía que una rosa de 4 pétalos);
- (iv) $Y = \mathbb{R}^2 - A$, donde $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}\}$ (comprobar que $\pi_1(Y, (1, 1))$ es un grupo libre con una cantidad numerable de generadores);
- (v) $\pi_1(X, x_0)$, donde X es el espacio de Hausdorff $X = A \cup B$, A y B son homeomorfos a un toro y $A \cap B = \{x_0\}$;
- (vi) X , el espacio obtenido de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, eliminando k subconjuntos disjuntos y homeomorfos cada uno de ellos al disco abierto \mathbb{D}^n ;
- (vii) para $n \leq m$, $\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^m - \mathbb{S}^n$;
- (viii) para $n < m$, $\mathbb{R}^m - \mathbb{S}^n$;
- (ix) X , donde $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, d\}, \{a\}, \{d\}\}$;
- (x) $X \vee Y$, donde (X, x) e (Y, y) son espacios con puntos base (ver la definición de $X \vee Y$ en el ejercicio 3 del apartado 1.5);
- (xi) $X = \mathbb{R}^3 - (A \cup B)$, donde A es el eje $0Z$ y $B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

7.- Sean σ y τ dos lazos en \mathbb{R}^2 con punto base $(0, 0)$. Construir una homotopía de caminos entre ellos.

8.- Sean σ y τ los lazos en \mathbb{S}^1 , $\sigma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ y $\tau(t) = (\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t)$. Demostrar que no son caminos homótopos.

9.- Demostrar las siguientes propiedades

- (i) $\mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_n\}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{q_1, \dots, q_m\}$, si $n \neq m$;
- (ii) $\mathbb{R}^n - \{p\}$ es simplemente conexo, si $n > 2$;
- (iii) si $n > 2$, \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^2 no son homeomorfos;
- (iv) si $n > 2$, \mathbb{S}^n y \mathbb{S}^2 no son homeomorfos.

10.- El espacio proyectivo real

El *espacio proyectivo real de dimensión n* se define como el cociente $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia sobre la esfera que identifica puntos antipodales. Con la topología cociente inducida $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es un espacio de Hausdorff y compacto. Sea $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ la aplicación cociente, que es abierta y localmente inyectiva. Se pide demostrar

- (i) cada punto $p(x) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ posee un entorno abierto V , tal que $p^{-1}(V) = \tilde{V} \cup -\tilde{V}$ es unión de dos abiertos, cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente por p sobre V . V se llama *un entorno distinguido* de $p(x) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$;
- (ii) la aplicación cociente posee la *propiedad de levantamiento de caminos*, es decir, si tenemos un camino $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ y $x_0 \in \mathbb{S}^n$ es tal que $p(x_0) = \sigma(0)$, entonces existe un único camino $\tilde{\sigma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$, tal que $\tilde{\sigma}(0) = x_0$ y $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$. El camino $\tilde{\sigma}$ se llama un *levantamiento* de σ . Dado $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, existen precisamente dos levantamientos $\hat{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}$ y verifican $\tilde{\sigma} = -\hat{\sigma}$;
- (iii) dados $p(x), p(y) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, se define $d(p(x), p(y)) = \min\{\|x - y\|, \|x + y\|\}$, es decir, geoméricamente, $d(p(x), p(y))$ es la longitud del menor lado del rectángulo cuyos vértices son $x, -x, y$ y $-y$. Probar que d es una métrica sobre $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, compatible con su topología. Con esta métrica, $\text{diám}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \sqrt{2}$;
- (iv) $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ es homeomorfo a \mathbb{S}^1 ;
- (v) sean $n \geq 2$ y $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Dados dos caminos cerrados σ_1 y σ_2 basados en $p(x_0) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, sean $\tilde{\sigma}_1$ y $\tilde{\sigma}_2$ sus levantamientos con origen en x_0 . Entonces, $\tilde{\sigma}_1(1) = \tilde{\sigma}_2(1)$ si y sólo si $\tilde{\sigma}_1 \sim \tilde{\sigma}_2$. Concluir que $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$ es un grupo con dos elementos.

11.- Utilizar las propiedades de la aplicación índice definida en el teorema 3.20, para dar una prueba topológica del **teorema fundamental del álgebra**:

Un polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$, de grado $n \geq 1$ y de coeficientes $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tiene una raíz en el plano complejo.

12.- Utilizar el teorema de Borsuk–Ulam, para demostrar el **teorema de Lusternik–Schnirelmann**: si \mathbb{S}^2 se escribe como unión de tres subconjuntos cerrados, $\mathbb{S}^2 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$, entonces existe $i \in \{1, 2, 3\}$, tal que F_i contiene un par de puntos antipodales.

13.- Sea X el toro \mathbb{T}^2 privado de un disco abierto, es decir, un *asa*. Se pide

- (i) probar que X tiene el tipo de homotopía de la figura de ocho (ver el problema 7 en 2.3);
- (ii) probar que la inclusión de la frontera de X en X , $i: fr(X) \simeq \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ induce el homomorfismo $\pi_1(i): \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(X)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento $a^{-1}b^{-1}ab$, donde $\pi_1(X)$ es el grupo libre generado por a y b ;
- (iii) utilizar el teorema de Seifert Van–Kampen para comprobar que el grupo fundamental del toro es $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \langle a, b \mid a^{-1}b^{-1}ab = 1 \rangle$.

14.- Sea Y la botella de Klein \mathbb{K}^2 privada de un disco abierto. Se pide

- (i) probar que Y tiene el tipo de homotopía de la figura de ocho;
- (ii) probar que la inclusión de la frontera de Y en Y , $j: fr(Y) \simeq \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$ induce el homomorfismo $\pi_1(j): \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(Y)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento $a^{-1}b^{-1}ab^{-1}$, donde $\pi_1(Y)$ es el grupo libre generado por a y b ;
- (iii) utilizar el teorema de Seifert Van–Kampen para comprobar que el grupo fundamental de la botella de Klein es $\pi_1(\mathbb{K}^2) \simeq \langle a, b \mid a^{-1}b^{-1}ab^{-1} = 1 \rangle$;
- (iv) observar que el asa (ver el problema 4) e Y tienen el mismo tipo de homotopía, sin embargo, no son espacios homeomorfos. ¿Por qué?

15.- Sea Z el plano proyectivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ privado de un disco abierto. Se pide

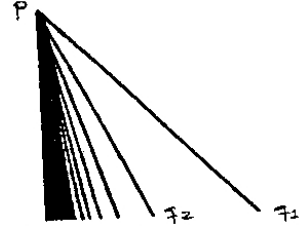
- (i) probar que Z tiene el tipo de homotopía de una circunferencia;
- (ii) probar que la inclusión de la frontera de Z en Z , $k: fr(Z) \simeq \mathbb{S}^1 \rightarrow Z$, induce el homomorfismo $\pi_1(k): \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(Z)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento a^2 , donde $\pi_1(Z)$ es el grupo generado por a ;
- (iii) aplicar el teorema de Seifert Van–Kampen para probar que $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \simeq \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$;

(iv) probar que \mathbb{S}^1 no es un retracto de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

16.- Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto compacto que consiste en todos los segmentos que unen $p = (0, 1)$ con $q_n = (\frac{1}{n}, 0)$, para $n \in \mathbb{N}$, junto con el segmento de p al punto $(0, 0)$.

Si $A = \{(0, 0)\} \subset X$, se pide probar

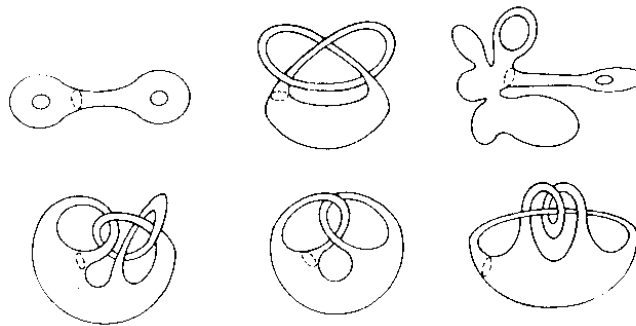
- (i) la inclusión $i_A: A \rightarrow X$ es una equivalencia de homotopía;
- (ii) A no es un retracto por deformación fuerte de X .



17.- Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Decidir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, demostrándolas o dando un contraejemplo

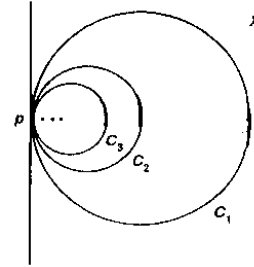
- (i) si $f: X \rightarrow Y$ es sobreyectiva, entonces $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es sobreyectiva;
- (ii) si $f: X \rightarrow Y$ es inyectiva, entonces $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es inyectiva;
- (i) si $f: X \rightarrow Y$ es biyectiva, entonces $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es biyectiva.

18.- Probar que todos los espacios que siguen son homeomorfos, salvo uno de ellos y explicar la razón.



19.- Sea C_n el círculo de radio $\frac{1}{n}$ en \mathbb{R}^2 , con centro en el punto $(\frac{1}{n}, 0)$. Sea X el subespacio de \mathbb{R}^2 formado por la unión de todos estos círculos, es decir X es una unión infinita numerable de círculos, que tienen el origen $p = (0, 0)$ como punto común.

Observar que X no es la unión por un punto de los círculos C_n . A X se le llama *pendiente infinito*. Probar que $\pi_1(X, p)$ no es un grupo libre.



20.- Sean $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y $r: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$, es decir, la aplicación $r(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(\theta + \frac{2\pi}{n}), \sin(\theta + \frac{2\pi}{n}))$. Sea X_n el cociente del disco unidad \mathbb{D}^2 obtenido al identificar cada punto $x \in \mathbb{S}^1$ con los puntos $r(x), r^2(x), \dots, r^{n-1}(x)$. Se pide probar

- (i) X_n es un espacio compacto Hausdorff, llamado *sombrero de asno de n picos*;
- (ii) el sombrero de asno de 2 picos es homeomorfo a plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$;
- (iii) el grupo fundamental de X_n es un grupo cíclico de orden n .

21.- El propósito de este ejercicio es demostrar que si G es un grupo con una presentación finita, entonces existe un espacio compacto Hausdorff cuyo grupo fundamental es isomorfo a G . Se pide probar

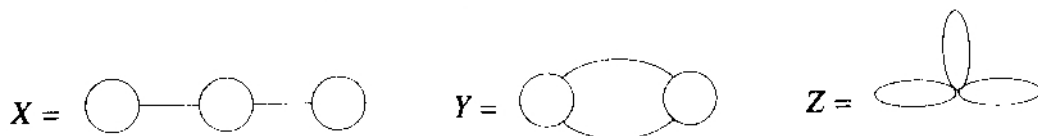
- (i) supongamos que G tiene una presentación finita formada por n generadores y m relaciones, $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | r_1, \dots, r_m \rangle$. Sean A la unión por un punto de n círculos, m copias $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_m$ de discos unidad y una aplicación continua $f: \bigcup_{i=1}^m f r(\mathbb{D}_i) \rightarrow A$. Sea X el espacio de adjunción obtenido a partir de f (ver el problema 3 en 1.5). Probar que X es un espacio compacto Hausdorff;

- (ii) probar la propiedad enunciada para $m = 1$;
- (iii) probar el siguiente lema algebraico: Sean $f: G \rightarrow H$ y $g: H \rightarrow K$ homomorfismos y f sobreyectivo. Si $a_0 \in G$ y $\ker(g)$ es el menor subgrupo normal de H conteniendo a $f(a_0)$, entonces $\ker(g \circ f)$ es el menor subgrupo normal N de G que contiene a $\ker(f)$ y a_0 ;
- (iv) proceder por inducción sobre m , utilizando (iii) para probar el enunciado.

22.- Encontrar espacios cuyos grupos fundamentales sean isomorfos a los siguientes grupos, donde \mathbb{Z}_n denota el grupo aditivo de los enteros módulo n

- (i) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ y más en general $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$;
 (ii) $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ y más en general $\mathbb{Z}_{n_1} * \mathbb{Z}_{n_2} * \cdots * \mathbb{Z}_{n_k}$.

23.- Se consideran los tres subespacios del plano



Calcular el grupo fundamental de cada uno de ellos. ¿Son homeomorfos? ¿Tienen el mismo tipo de homotopía?

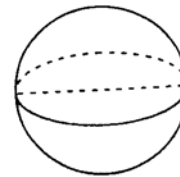
24.- Se consideran los tres subespacios del \mathbb{R}^3



Calcular el grupo fundamental de cada uno de ellos. ¿Son homeomorfos? ¿Tienen el mismo tipo de homotopía?

25.- Sea $X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x, 0, 0) : -1 \leq x \leq 1\}$. Se pide

- (i) calcular su grupo fundamental y dibujar en él los generadores de este grupo;
 (ii) ¿es homeomorfo a la circunferencia \mathbb{S}^1 ? ¿Y a la esfera \mathbb{S}^2 ?
 (iii) ¿tiene el tipo de homotopía de la circunferencia \mathbb{S}^1 ? ¿Y de la esfera \mathbb{S}^2 ?



Estudio de los espacios recubridores

Los espacios recubridores se introducen a veces como simples herramientas, por ser normalmente más sencillos que los espacios que *cubren*: por ejemplo, \mathbb{S}^n frente a $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, como veremos más adelante.

Luego, el principio de generalidad va a ser el siguiente: el objeto primario de interés será el espacio topológico X , pero cuando X es demasiado *complicado*, se recurre a un *espacio recubridor* Y , más *sencillo*, y se usa la teoría de los espacios recubridores, para obtener información de X a partir de la de Y .

En los temas anteriores, hemos desarrollado dos técnicas para calcular grupos fundamentales

- (i) la *equivalencia de homotopía*: un espacio topológico se reemplaza por otro cuyo grupo fundamental coincide con el primero, pero que como espacio es más *simple*;
- (ii) el *teorema de Seifert–Van Kampen*, para el cálculo del grupo fundamental de esferas y otras superficies.

Otro grupo fundamental que hemos calculado es el de \mathbb{S}^1 , y la estrategia para obtenerlo ha sido usar propiedades de la aplicación exponencial, para probar que todo camino basado en 1, se puede levantar sobre \mathbb{R} en un camino que empieza en 0 y que termina en un entero.

Los ingredientes básicos en la prueba han sido tres *propiedades de levantamiento*

- (i) la propiedad de levantamiento único,
- (ii) el lema de levantamiento de caminos,
- (iii) la propiedad de levantamiento de homotopías.

Otra cualidad que se usa es que cada punto de \mathbb{S}^1 posee un entorno *distinguido* (lo definiremos más adelante con rigor), es decir, un entorno abierto U , tal que $\exp^{-1}(U)$ está formado por *copias* disjuntas de U en \mathbb{R} .

En este tema se generalizan estas ideas, y se ve que se pueden aplicar técnicas similares a una gama bastante importante de espacios topológicos, que engloban a las variedades conexas: son los *espacios y las aplicaciones recubridoras*.

Una aplicación recubridora es una aplicación cociente y tiene muchas de las propiedades de la aplicación exponencial. El estudio cuidadoso de las aplicaciones recubridoras permitirá analizar y calcular muchos más grupos fundamentales.

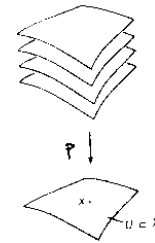
Además, damos la clasificación de los espacios recubridores de un espacio dado X y se ve que depende de su grupo fundamental, en el sentido de que hay tantos espacios recubridores como subgrupos de $\pi_1(X, x)$. Esto prueba de nuevo el poder del functor grupo fundamental, como método para distinguir cualidades topológicas de espacios a través de las propiedades algebraicas de sus grupos de Poincaré.

4.1. Espacios recubridores

Definición 4.1. Sean X e Y espacios topológicos y $p: Y \rightarrow X$ una aplicación continua. Un abierto $U \subset X$ se llama *distinguido*, si $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, unión disjunta de abiertos conexos $\{U_i : i \in I\}$, cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente sobre U por p , es decir, $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Se puede visualizar esta familia de abiertos disjuntos, como una *pila de hojas*, que se proyectan sobre U por la aplicación p .

Los conjuntos U_i son conexos, abiertos y cerrados en $p^{-1}(U)$, es decir, son precisamente las componentes conexas de $p^{-1}(U)$.

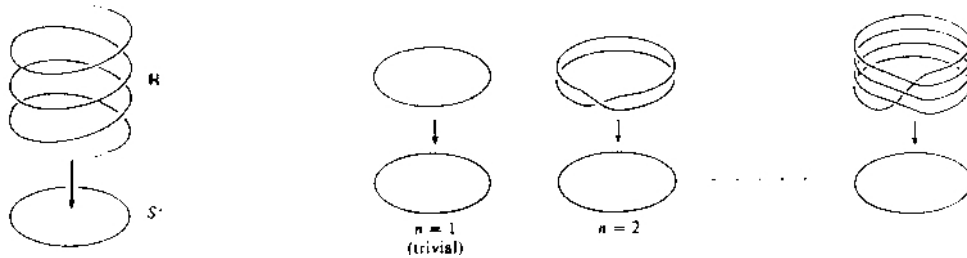


Definición 4.2. Si Y es conexo, $p: Y \rightarrow X$ es sobreyectiva y cada $x \in X$ posee un entorno abierto distinguido, se dice que p es una *aplicación recubridora* y que Y es un *espacio recubridor* o una *cubierta* de X . A veces, se habla de X como de la *base* y de Y como el *espacio total* de la aplicación recubridora.

Observación 4.1. Si $p: Y \rightarrow X$ es un espacio recubridor, los espacios X e Y son localmente idénticos, y las imágenes recíprocas en Y de entornos distinguidos en X , *convenientemente* combinados, *realizan* el espacio Y . Sin embargo, el espacio total y la base pueden ser completamente distintos en un sentido global.

Ejemplos 4.1. Las siguientes aplicaciones son recubridoras

- (i) la aplicación exponencial $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$;



(i) La aplicación exponencial

(ii) Las cubiertas p_n sobre la esfera

(ii) $p_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, dada por $p_n(z) = z^n$;

(iii) $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, donde $p(x_1, \dots, x_n) = (\exp(x_1), \dots, \exp(x_n))$;

(iv) la aplicación cociente $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ definida al identificar puntos antipodales de la esfera.

Definición 4.3. Una aplicación continua $f : Y \rightarrow X$ es un *homeomorfismo local*, si para cada $y \in Y$, existe un entorno abierto U que se aplica por f homeomórficamente sobre un subconjunto abierto $V \subset X$.

Lema 4.1. Un homeomorfismo local $f : Y \rightarrow X$ verifica

(i) f es una aplicación continua y abierta;

(ii) para cada $x \in X$, la fibra sobre ese punto, $f^{-1}(x)$, es un espacio discreto.

Observación 4.2. La existencia del homeomorfismo local $f : Y \rightarrow X$, hace que Y herede todas las propiedades topológicas locales de X (la conexión local, la compacidad local, etc.). Si además f es sobreyectiva, X también hereda las propiedades topológicas locales de Y .

Lema 4.2. Si $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, entonces es un homeomorfismo local y una aplicación cociente. Si p es inyectiva, entonces es un homeomorfismo.

Es importante observar que no todo homeomorfismo local sobreyectivo es una aplicación recubridora.

Ejemplo 4.1. Sea $Y = (0, 2) \subset \mathbb{R}$ y la aplicación $f : Y \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(x) = \exp(x)$. f es un homeomorfismo local por ser la restricción de la aplicación exponencial, que es una aplicación recubridora, y es claramente sobreyectiva. Pero, no se trata de una aplicación recubridora, pues el punto $1 \in \mathbb{S}^1$ no posee un entorno abierto distinguido.

Lema 4.3. Si $p : Y \rightarrow X$ es una aplicación recubridora, entonces el cardinal de las fibras es constante.

Observación 4.3. Usando el lema anterior, podría deducirse que la aplicación del ejemplo 4.1 no es recubridora, al tener todas las fibras dos elementos, excepto la del punto 1 que tiene cardinal uno.

Definición 4.4. Si $p: Y \rightarrow X$ es una aplicación recubridora, el cardinal de cada fibra se llama *número de hojas* del espacio recubridor.

Ejemplos 4.2. A continuación, se dan ejemplos espacios recubridores con distintos números de hojas

- (i) $p_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $p_n(z) = z^n$, es un espacio recubridor de n hojas;
- (ii) $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ es un espacio recubridor de dos hojas;
- (iii) la aplicación exponencial da lugar a un espacio recubridor con una cantidad numerable de hojas.

4.2. Propiedades de levantamiento

Definición 4.5. Sean $p: Y \rightarrow X$ y $f: Z \rightarrow X$ aplicaciones continuas. Un *levantamiento* de f relativamente a p , es una aplicación continua $\tilde{f}: Z \rightarrow Y$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

Observación 4.4. No toda aplicación continua posee un levantamiento, aunque p sea un homeomorfismo local, como se verá más adelante.

Las herramientas técnicas clave para trabajar con espacios de recubridores son los siguientes lemas de levantamiento, que son generalizaciones de las propiedades similares verificadas para la aplicación exponencial en el apartado 3.3. Empecemos por la **propiedad de levantamiento único**.

Lema 4.4. Sea $p: Y \rightarrow X$ un espacio recubridor. Si Z es conexo, $f: Z \rightarrow X$ es una aplicación continua y $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Z \rightarrow Y$ son dos levantamientos de f que coinciden en algún punto de Z , entonces, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Se continúa con la **propiedad de levantamiento de caminos**.

Lema 4.5. Sean $p: Y \rightarrow X$ un espacio recubridor, $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ un camino y un punto $y_0 \in p^{-1}(\sigma(0))$. Existe un levantamiento $\tilde{\sigma}: [0, 1] \rightarrow Y$ de σ , tal que $\tilde{\sigma}(0) = y_0$.

Y finalmente, se da la **propiedad de levantamiento de homotopías**.

Lema 4.6. Sean $p: Y \rightarrow X$ un espacio recubridor, $\sigma_0, \sigma_1: [0, 1] \rightarrow X$ dos caminos homótopos, $H: \sigma_0 \sim \sigma_1$ y $p(\tilde{x}_0) = \sigma_0(0)$. Entonces

- (i) existe una única aplicación \tilde{H} , tal que $p \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$;
- (ii) teorema de monodromía: si $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1: [0, 1] \rightarrow Y$ son levantamientos de los caminos σ_0 y σ_1 respectivamente y $\tilde{\sigma}_0(0) = \tilde{\sigma}_1(0)$, entonces $\tilde{\sigma}_0 \sim \tilde{\sigma}_1$.

Como primera aplicación de la teoría, podemos dar una solución general al *problema de levantamiento* para aplicaciones recubridoras: se trata de decidir, dada una cubierta $p: Y \rightarrow X$ y una aplicación continua $\varphi: Z \rightarrow X$, cuando esta última admite un levantamiento $\tilde{\varphi}: Z \rightarrow Y$. El siguiente resultado reduce este problema topológico a uno algebraico: es el **criterio de levantamiento**.

Teorema 4.7. Sean $p: Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, Z un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos y $\varphi: Z \rightarrow X$ una aplicación continua. Dados $z_0 \in Z$ e $y_0 \in Y$ tales que $p(y_0) = \varphi(z_0)$, φ posee un levantamiento $\tilde{\varphi}: Z \rightarrow Y$, verificando que $\tilde{\varphi}(z_0) = y_0$, si y sólo si $\pi_1(\varphi)(\pi_1(Z, z_0))$ (subgrupo de $\pi_1(X, \varphi(z_0))$) está contenido en $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_0))$.

Ejemplos 4.3. Algunos ejemplos de aplicación de este criterio son

- (i) dada la cubierta $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, la aplicación identidad $1_{\mathbb{S}^1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ no se levanta respecto a \exp , porque $\pi_1(1_{\mathbb{S}^1})(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) \simeq \mathbb{Z} \not\subset \pi_1(\mathbb{R}) = 0$;
- (ii) sean $p_3: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ y $p_5: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ los espacios recubridores de tres y cinco hojas respectivamente. p_3 no se levanta respecto a p_5 , porque

$$\pi_1(p_3)(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) \simeq 3\mathbb{Z} \not\subset \pi_1(p_5)(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) \simeq 5\mathbb{Z};$$

- (iii) si $p: Y \rightarrow X$ es un espacio recubridor y $\varphi: Z \rightarrow X$ es continua con grupo fundamental $\pi_1(Z, z_0)$ trivial, siempre existe un levantamiento $\tilde{\varphi}: Z \rightarrow Y$ de φ .

4.3. Aplicaciones recubridoras y grupo fundamental

El siguiente **teorema de inyectividad** caracteriza el homomorfismo inducido sobre los grupos fundamentales por una aplicación recubridora.

Teorema 4.8. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora. Para cada $y \in Y$, el homomorfismo $\pi_1(p): \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, p(y))$ inducido por p es inyectivo.

Observación 4.5. Este enunciado prueba que el grupo fundamental de un espacio recubridor puede verse, en un cierto sentido, como un subgrupo del grupo fundamental de la base. Pero, es necesario entender de que manera este hecho depende de la elección del punto base $y \in Y$.

Definición 4.6. Dos subgrupos H_1 y H_2 de un grupo G se llaman *conjugados*, si existe un elemento $g \in G$, tal que $H_2 = g^{-1}H_1g$. Es fácil probar que la *conjugación* es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los subgrupos de G . Además, H es normal en G si y sólo si H es el único subgrupo conjugado a H .

Como prueba el siguiente **teorema de conjugación**, el subgrupo $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$ puede cambiar cuando varía el punto base, pero puede transformarse sólo de un modo muy *limitado*.

Teorema 4.9. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, donde Y es conexo por caminos. Para cada $x \in X$, la familia $\{\pi_1(p)(\pi_1(Y, y)) : y \in p^{-1}(x)\}$ de subgrupos de $\pi_1(X, x)$, es exactamente una clase de conjugación.

Definición 4.7. Se dice que un espacio recubridor $p: Y \rightarrow X$ es *regular*, si Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos y para cada $y \in Y$, $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, p(y))$.

Observación 4.6. Esto significa en particular que el subgrupo $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$ es independiente de la elección del punto base y en la fibra de x , ya que el único subgrupo conjugado es él mismo.

Lema 4.10. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, donde Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Si existe $y \in Y$ tal que $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, p(y))$, entonces p es regular.

4.4. El grupo de las transformaciones recubridoras

Vamos a introducir el concepto de *grupo de las transformaciones recubridoras* y a estudiar su relación con los grupos fundamentales del espacio total Y y de la base X .

Definición 4.8. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora. Un homeomorfismo $\varphi: Y \rightarrow Y$ se llama una *transformación recubridora*, si $p \circ \varphi = p$. Se denota por $G_p(Y)$ el conjunto de las transformaciones de recubridoras de Y respecto a p .

Lema 4.11. Dada una aplicación recubridora $p: Y \rightarrow X$, se verifican las propiedades siguientes

- (i) si $\varphi_1, \varphi_2 \in G_p(Y)$, entonces $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in G_p(Y)$;
- (ii) si $\varphi \in G_p(Y)$, entonces $\varphi^{-1} \in G_p(Y)$;
- (iii) $1_Y \in G_p(Y)$.

Luego, $G_p(Y)$ es un grupo, llamado *grupo de las transformaciones recubridoras*.

Proposición 4.12. Sean $p: Y \rightarrow X$ una aplicación de recubridora y $\varphi \in G_p(Y)$, entonces

- (i) si $\varphi_1, \varphi_2 \in G_p(Y)$ y existe y_0 tal que $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(y_0)$, entonces $\varphi_1 = \varphi_2$;
- (ii) excepto para $\varphi = 1_Y$, φ actúa sin puntos fijos, es decir, si $\varphi(y) = y$ para algún $y \in Y$, entonces $\varphi = 1_Y$;
- (iii) para cada $x \in X$, φ permuta los puntos de la fibra $p^{-1}(x)$;
- (iv) para cada U abierto distinguido en X , φ permuta las componentes conexas de $p^{-1}(U)$.

Ejemplos 4.4. Algunos ejemplos de tales transformaciones son

- (i) para $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $G_p(\mathbb{R}) = \{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}$, donde $\varphi_n(x) = x + n$.
- (ii) si $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ es la cubierta de dos hojas de $\mathbb{R}P^n$ y $\alpha: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ la aplicación antipodal, entonces $G_p(\mathbb{S}) = \{1_{\mathbb{S}^n}, \alpha\}$.

Observación 4.7. Según la proposición 4.12, $G_p(Y)$ puede pensarse como un grupo de permutaciones sobre cada fibra, ya que cada transformación recubridora está completamente determinada por lo que hace sobre una fibra.

Definición 4.9. Si G es un grupo de permutaciones sobre un conjunto Z y $z \in Z$, la *órbita de z* es el conjunto de las imágenes por G , es decir, $G(z) = \{\varphi(z) : \varphi \in G\}$. Se dice que G actúa *transitivamente* sobre Z , si para cada $z \in Z$, es $G(z) = Z$, o equivalentemente, si para cada $z_1, z_2 \in Z$, existe $\varphi \in G$ tal que $\varphi(z_1) = z_2$.

Es a menudo útil disponer de un criterio para decidir cuando dos puntos están en la misma órbita, y por ello damos el **criterio de órbitas**.

Proposición 4.13. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación de recubridora, donde Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Entonces

- (i) si $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$, existe una transformación recubridora que lleva y_1 en y_2 si y sólo si $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_1)) = \pi_1(p)(\pi_1(Y, y_2))$;
- (ii) $G_p(Y)$ actúa transitivamente sobre cada fibra si y sólo si p es una cubierta regular. En este caso, para cada $y \in p^{-1}(x)$, la aplicación $f_x: G_p(Y) \rightarrow p^{-1}(x)$ definida por $f_x(\varphi) = \varphi(y)$, es una biyección.

El siguiente teorema da una fórmula explícita para el grupo de las transformaciones recubridoras en términos de los grupos fundamentales del espacio total y el espacio base, y lo podremos utilizar para calcular grupos fundamentales de ciertos espacios, a partir de propiedades de sus cubiertas. El enunciado de este resultado envuelve la siguiente condición algebraica

Definición 4.10. Si G es un grupo y $H \subset G$ un subgrupo, el *normalizador* de H en G , $N(H)$, es el conjunto de los elementos $g \in G$, tales que $g^{-1}Hg = H$. $N(H)$ es un subgrupo de G y de hecho es el mayor subgrupo de G en el que H es normal.

Podemos dar el **teorema de estructura del grupo de las transformaciones recubridoras**.

Teorema 4.14. Sea $p: Y \rightarrow X$ una aplicación de recubridora, donde Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos y sea $y \in Y$. Si $H = \pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$, los grupos $G_p(Y)$ y $N(H)/H$ son isomorfos.

Para espacios recubridores regulares, el teorema dice simplemente que el grupo de las transformaciones recubridoras es isomorfo al cociente del grupo fundamental de la base por la imagen del grupo fundamental del espacio recubridor.

Corolario 4.15. En las condiciones del teorema 4.14, si p es regular y $p(y) = x$, entonces los grupos $\pi_1(X, x)/\pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$ y $G_p(Y)$ son isomorfos.

Corolario 4.16. En las condiciones del teorema 4.14, si además Y es simplemente conexo y $p(y) = x$, entonces los grupos $G_p(Y)$ y $\pi_1(X, x)$ son isomorfos.

Combinando el corolario 4.16 con la proposición 4.13, se obtiene el siguiente resultado, que proporciona una manera de identificar cada fibra de un espacio recubridor simplemente conexo con el grupo fundamental de la base.

Corolario 4.17. En las condiciones del corolario 4.16, para cada $x \in X$ e $y \in p^{-1}(x)$, la aplicación $\Phi: \pi_1(X, x) \rightarrow p^{-1}(x)$ definida por $\Phi([\sigma]) = \tilde{\sigma}(1)$, donde $\tilde{\sigma}$ es el único levantamiento de σ que empieza en y , es una biyección.

Ejemplos 4.5. Como ejemplos de aplicación de estos corolarios, tenemos

- (i) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un espacio recubridor cíclico infinito y \mathbb{R} es simplemente conexo. El corolario 4.16 proporciona una prueba de que el grupo fundamental de \mathbb{S}^1 es cíclico infinito;
- (ii) sea $n > 1$ y $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ el espacio recubridor de dos hojas dado por la identificación de puntos antipodales en la esfera. Utilizando el corolario 4.17, se deduce que el grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$ es un grupo con dos elementos, que por lo tanto es isomorfo a \mathbb{Z}_2 . También puede aplicarse el corolario 4.16 para obtener el mismo resultado, ya que por el ejemplo 4.4 (ii) sabemos que $G_p(\mathbb{S}^n)$ es el grupo cíclico de orden 2.

4.5. Homomorfismos recubridores

De momento hemos obtenido información acerca de grupos fundamentales, estudiando las aplicaciones recubridoras. Ahora, se trata de invertir el proceso y ver lo que se puede aprender, partiendo del grupo fundamental, sobre la existencia y unicidad de espacios recubridores. La idea clave viene dada por el teorema 4.9: cada espacio recubridor de X determina una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X)$.

Vamos a decidir cuando pueden pensarse dos espacios recubridores como *idénticos*.

Definición 4.11. Sean X un espacio y $p_1: Y_1 \rightarrow X$ y $p_2: Y_2 \rightarrow X$ dos aplicaciones recubridoras. Un *homomorfismo recubridor* de p_1 en p_2 es una aplicación $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$ continua, tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$. Un homomorfismo recubridor es un *isomorfismo recubridor* si posee un homomorfismo recubridor inverso.

Lema 4.18. En las condiciones de la definición 4.11, $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$ es un isomorfismo recubridor si y sólo si es un homeomorfismo.

Definición 4.12. Dos espacios recubridores $p_1: Y_1 \rightarrow X$ y $p_2: Y_2 \rightarrow X$ se dicen *isomorfos* cuando existe un isomorfismo recubridor entre ellos. Claramente, queda definida una relación de equivalencia sobre la familia de los espacios recubridores de X .

Observación 4.8. Si $Y_1 = Y_2$ y $p_1 = p_2: Y_1 \rightarrow X$, un isomorfismo recubridor es precisamente una transformación recubridora.

Los homomorfismos recubridores son a su vez aplicaciones recubridoras, como lo prueba el siguiente lema.

Lema 4.19. Sean $p_1: Y_1 \rightarrow X$ y $p_2: Y_2 \rightarrow X$ dos cubiertas localmente conexas por caminos de X . Sea φ un homomorfismo recubridor de p_1 en p_2 . Entonces φ es una aplicación recubridora.

La clave para determinar cuando dos espacios recubridores son isomorfos, es establecer cuando existen homomorfismos recubridores entre ellos, y lo haremos a través del siguiente **criterio del homomorfismo recubridor**.

Teorema 4.20. Consideremos dos espacios recubridores localmente conexas por caminos de X , $p_1: Y_1 \rightarrow X$ y $p_2: Y_2 \rightarrow X$. Sean $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$, tales que $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x$. Existe un homomorfismo recubridor entre p_1 y p_2 que lleva y_1 en y_2 , si y sólo si se da la inclusión $\pi_1(p_1)(\pi_1(Y_1, y_1)) \subset \pi_1(p_2)(\pi_1(Y_2, y_2))$.

Ejemplos 4.6. Como aplicación del anterior criterio, tenemos

- (i) sea $p_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $p_n(z) = z^n$. Si α es el generador estándar de $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$, y recordando que p_n tiene grado n , se prueba fácilmente que

$$\pi_1(p_n)(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) = \{\alpha^{nk} : k \in \mathbb{Z}\} \simeq n\mathbb{Z} \subset \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Por el criterio del homomorfismo recubridor, existe un homomorfismo recubridor entre p_m y p_n si y sólo si n divide a m . Y en tal caso, el homomorfismo es $p_{\frac{m}{n}}$;

- (ii) se consideran las cubiertas del toro, $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ y $p_1: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$, definidas por $p(x_1, x_2) = (\exp(x_1), \exp(x_2))$ y $p_1(z, x) = (z, \exp(x))$, respectivamente. Como se verifican las inclusiones

$$\pi_1(p)(\pi_1(\mathbb{R}^2)) = \{0\} \subset \pi_1(p_1)(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z},$$

existe un homomorfismo recubridor de p en p_1 , $\varphi(x_1, x_2) = (\exp(x_1), x_2)$.

El siguiente **teorema del isomorfismo recubridor** resuelve la cuestión de la unicidad para espacios recubridores localmente conexos por caminos, salvo isomorfismo.

Teorema 4.21. $p_1: Y_1 \rightarrow X$ y $p_2: Y_2 \rightarrow X$, espacios recubridores localmente conexos por caminos, son isomorfos si y sólo si para cada $x \in X$ y para cada elección de puntos base $y_1 \in p_1^{-1}(x)$ e $y_2 \in p_2^{-1}(x)$, los subgrupos $\pi_1(p_1)(\pi_1(Y_1, y_1))$ y $\pi_1(p_2)(\pi_1(Y_2, y_2))$ son conjugados en $\pi_1(X, x)$.

4.6. El espacio recubridor universal

Cuando los resultados anteriores se aplican a espacios recubridores simplemente conexos, se obtienen resultados interesantes.

Proposición 4.22. Sea $p: Y \rightarrow X$ un espacio recubridor simplemente conexo y localmente conexo por caminos, entonces

- (i) si $p_1: Y_1 \rightarrow X$ es un espacio recubridor localmente conexo por caminos, existe una aplicación recubridora $\tilde{p}: Y \rightarrow Y_1$, tal que $p_1 \circ \tilde{p} = p$;
- (ii) si además X es simplemente conexo y localmente conexo por caminos, entonces p es un homeomorfismo;
- (iii) dos espacios recubridores simplemente conexos y localmente conexos por caminos de X son isomorfos.

La parte (i) de esta proposición dice que los espacios recubridores simplemente conexos *cubren* a cualquier otro espacio recubridor de X . Por esta razón, se define

Definición 4.13. Al único (proposición 4.22 (iii)) recubridor simplemente conexo y localmente conexo por caminos $p: \tilde{X} \rightarrow X$, se le llama *espacio recubridor universal* o *cubierta universal* de X .

Ejemplos 4.7. Algunos ejemplos de cubiertas universales son

- (i) el espacio recubridor universal del toro \mathbb{T}^n es \mathbb{R}^n , ya que $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ dada por $p(x_1, \dots, x_n) = (\exp(x_1), \dots, \exp(x_n))$ es un espacio recubridor y \mathbb{R}^n es simplemente conexo y localmente conexo por caminos;
- (ii) del mismo modo, el espacio recubridor universal de \mathbb{RP}^n es \mathbb{S}^n .

Definición 4.14. X es *semilocalmente simplemente conexo*, si admite una base de conjuntos abiertos U , con la propiedad de que, todo lazo en U es homótopo en X a una constante.

Como prueba el siguiente teorema, todo espacio *razonable*, incluyendo las variedades conexas, posee un espacio recubridor universal. La prueba es complicada y puede encontrarse en [Mas2].

Teorema 4.23. *Sea X conexo por caminos y localmente conexo por caminos. X admite un espacio recubridor universal si y sólo si X es semilocalmente simplemente conexo.*

4.7. Acciones propiamente discontinuas y espacios recubridores

El siguiente paso a la hora de clasificar espacios recubridores es comenzar por un espacio Y y desarrollar una técnica para construir espacios *cubiertos* por Y .

Para tener una idea de como construir espacios *cubiertos* por Y , recordemos que una aplicación de recubridora es una aplicación cociente y que el criterio de la órbita prueba que el grupo $G_p(Y)$ actúa transitivamente sobre cada fibra cuando el espacio recubridor es regular, con lo que las identificaciones inducidas por p son exactamente:

$$y_1 \sim y_2 \text{ si y sólo si existe } \varphi \in G_p(Y) \text{ tal que } y_2 = \varphi(y_1).$$

Sea ahora Y un espacio y supongamos que Γ es un grupo de homeomorfismos de Y , es decir, un conjunto de homeomorfismos de Y en Y , que contiene a 1_Y y que es cerrada bajo la composición y la inversión de funciones. Se puede entonces definir la relación de equivalencia

$$y_1 \sim y_2 \text{ si y sólo si existe } \varphi \in \Gamma \text{ tal que } y_2 = \varphi(y_1).$$

El *espacio de órbitas* de Γ , denotado por Y/Γ , es el cociente de Y bajo esta relación de equivalencia. En particular, si $p: Y \rightarrow X$ es un espacio recubridor, la discusión del párrafo anterior, junto con la unicidad de los espacios cociente prueba que

Teorema 4.24. *Si $p: Y \rightarrow X$ es un espacio recubridor regular, X es homeomorfo al espacio cociente $Y/G_p(Y)$.*

Nuestro objetivo ahora es dar la vuelta a este proceso: empezar con un espacio Y y un grupo de homeomorfismos Γ de Y y construir un espacio recubridor $p: Y \rightarrow Y/\Gamma$, cuyo grupo de transformaciones recubridoras, $G_p(Y)$, sea exactamente Γ . Debe observarse que esta construcción sólo puede reproducirse para espacios recubridores regulares, porque Γ actúa transitivamente sobre las fibras de cada espacio de órbitas, por definición.

Por supuesto, cualquier grupo de homeomorfismos no produce una aplicación recubridora de este modo. Por ejemplo, si $p: Y \rightarrow X$ es un espacio recubridor, $G_p(Y)$ actúa sin puntos fijos, por lo que Γ deberá tener esta propiedad. De hecho, $G_p(Y)$ satisface una propiedad mucho más fuerte: si $y \in Y$, U es un entorno distinguido de $p(y)$ y \tilde{U} es la componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contiene a y , entonces las imágenes de \tilde{U} bajo distintas transformaciones de recubridoras $\varphi \in G_p(Y)$, son disjuntas. Esta propiedad tiene un nombre.

Definición 4.15. Un grupo de homeomorfismos Γ de Y es *propriadamente discontinuo*, si para cada $y \in Y$, existe U un entorno de ese punto, tal que $\varphi(U) \cap \varphi'(U) = \emptyset$, si $\varphi, \varphi' \in \Gamma$ y $\varphi \neq \varphi'$.

Teorema 4.25. *Sea Y conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Si Γ es un grupo propriadamente discontinuo de homeomorfismos de Y , la proyección $p: Y \rightarrow Y/\Gamma$, es un espacio recubridor regular y $\Gamma = G_p(Y)$.*

4.8. El teorema de clasificación de los espacios recubridores

Vamos a agrupar todos los resultados anteriores, para dar una clasificación completa de los espacios recubridores de un espacio dado. La idea es que cada espacio recubridor de X está cubierto por el espacio recubridor universal \tilde{X} , y que los espacios recubridores intermedios pueden construirse a través del universal, como cocientes por acciones de grupos adecuadas.

Así, tenemos el **teorema de clasificación de los espacios recubridores**.

Teorema 4.26. *Sean X conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo y x_0 un punto base en X . Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfismo de espacios recubridores localmente conexos por caminos de X y las clases*

de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. Esta correspondencia relaciona cada espacio recubridor $p: Y \rightarrow X$, con la clase de conjugación de $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_0))$, para cada $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.

4.9. Problemas

1.- Sea $p: Y \rightarrow X$ un espacio recubridor, $A \subset X$ y $B = p^{-1}(A)$. Probar que la aplicación $p_A: B \rightarrow A$ dada por $p_A(x) = p(x)$, es aún una aplicación recubridora.

2.- Sean $p_1: Y_1 \rightarrow X_1$ y $p_2: Y_2 \rightarrow X_2$ dos espacios recubridores. Probar

- (i) $p_1 \times p_2: Y_1 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ es un espacio recubridor;
- (ii) si $X_1 = X_2$ y $Z = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 : p_1(y_1) = p_2(y_2)\}$, entonces $p: Z \rightarrow X_1$ definida por $p(y_1, y_2) = p_1(y_1)$ es recubridora;
- (iii) identificar Z y p , cuando $p_1 = p_2 = \exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

3.- Probar las siguientes propiedades

- (i) si G es un grupo de homeomorfismos propiamente discontinuo de X , la órbita de cada punto $G(x) = \{g(x) : g \in G\}$, es discreta;
- (ii) si $\alpha: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es la aplicación antipodal, entonces $G = \{1_{\mathbb{S}^n}, \alpha\}$ es un grupo de homeomorfismos de \mathbb{S}^n propiamente discontinuo;
- (iii) si G es un grupo finito de homeomorfismos de un espacio Hausdorff X sin puntos fijos (salvo la identidad), entonces G es propiamente discontinuo;
- (iv) si $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ y $f: X \rightarrow X$ es la aplicación definida por $f(x, y) = \left(ax, \frac{y}{a}\right)$ ($a > 1$), entonces $G = \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo propiamente discontinuo.

4.- Sea $p: Y \rightarrow X$ un espacio recubridor, $x_0 \in X$ e $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Se pide probar

- (i) p es un homeomorfismo si y sólo si $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_0)) = \pi_1(X, x_0)$;
- (ii) si $X = Y$ y $\pi_1(X, x_0)$ es finito, entonces p es un homeomorfismo. Si $\pi_1(X, x_0)$ no es finito, ¿es p necesariamente un homeomorfismo?
- (iii) si el espacio recubridor es regular y σ es un camino cerrado en X , entonces o todo levantamiento de σ es cerrado o ninguno lo es;
- (iv) si p es no trivial y $\pi_1(Y, y_0)$ es nulo, entonces existe $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ continua que no se levanta a $\tilde{f}: \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$.

5.- Responder a las siguientes cuestiones.

(i) ¿Existe algún espacio Y , tal que $\mathbb{S}^1 \times Y$ sea homeomorfo a un espacio recubridor de \mathbb{S}^2 ó $\mathbb{R}P^2$?

(ii) Probar que no existe ninguna aplicación recubridora $p: \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

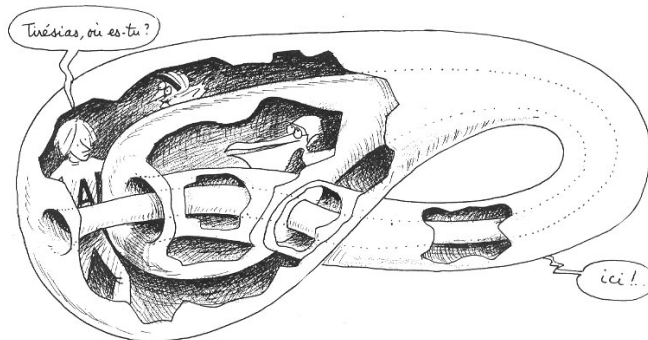
6.- Si $p: Y \longrightarrow X$ es un espacio recubridor donde X e Y son espacios de Hausdorff, probar que X es una n -variedad si y sólo si Y lo es.

7.- Sean $X = \mathbb{R} \times [0, 1]$ y el homeomorfismo $f: X \longrightarrow X$, $f(x, y) = (x + 1, 1 - y)$. Se pide

(i) demostrar que si $G = \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es el grupo de homeomorfismos generado por f , entonces X/G es la banda de Möbius \mathbb{M} ;

(ii) deducir que el grupo fundamental de \mathbb{M} es \mathbb{Z} .

8.- Encontrar un espacio recubridor de dos hojas $p: \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$, donde \mathbb{K}^2 es la botella de Klein. Debajo se muestra es el aspecto que tiene este espacio según [Pe].



9.- Determinar todos los espacios de recubridores de la esfera \mathbb{S}^1 , el toro \mathbb{T}^2 y un espacio X simplemente conexo y localmente conexo por caminos.

10.- Probar que cualquier aplicación continua $f: \mathbb{R}P^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$ es nulhomótota.

11.- Sea M una variedad conexa cuyo espacio recubridor universal es la esfera \mathbb{S}^2 . Probar que $\pi_1(M)$ es trivial o \mathbb{Z}_2 .

12.- Se trata de calcular el grupo fundamental de la botella de Klein \mathbb{K}^2 , usando como herramienta los espacios recubridores.

(i) Sean los homeomorfismos $f, g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dados por $f(z) = z + i$ y $g(z) = \bar{z} + \frac{1}{2} + i$. Demostrar que $g \circ f = f^{-1} \circ g$ y deducir que $G = \{f^m \circ g^{2n+i} : m, n \in \mathbb{Z}, i = 0 \text{ ó } 1\}$ es un grupo de homeomorfismos de \mathbb{C} . La acción de G es propiamente discontinua y \mathbb{C}/G es Hausdorff;

(ii) encontrar un *rectángulo semiabierto* que contenga exactamente un punto de cada órbita de G y deducir que \mathbb{C}/G es una botella de Klein;

(iii) un embebimiento de la botella de Klein en \mathbb{R}^4 : sea $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^5$ definida por

$$\varphi(x+iy) = (\cos(2\pi y), \cos(4x\pi), \sin(4x\pi), \sin(2\pi y) \cos(2\pi x), \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)).$$

Demostrar que φ identifica cada una de las órbitas del grupo G a un punto, y deducir que \mathbb{C}/G es homeomorfo a $Im(\varphi)$. Demostrar que la restricción de $\psi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, donde $\psi(p, q, r, s, t) = ((p+2)q, (p+2)r, s, t)$, a $Im(\varphi)$ es un homeomorfismo;

(iv) probar que el grupo fundamental de la botella de Klein es el grupo de dos generadores, con la relación siguiente: $G = \{a^m b^{2n+\varepsilon} : m, n \in \mathbb{Z}, \varepsilon = 0 \text{ ó } 1, ba = a^{-1}b\}$.

13.- Explicar porque los siguientes no son espacios recubridores.

(i) $p: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, donde $p(x) = |x|$;

(ii) $p: L \rightarrow \mathbb{S}^1$, donde $p(x, y) = \exp(x + y)$ y $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$;

(iii) $p: \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{T}^2$, restricción de la aplicación exponencial.

14.- Un subconjunto α de un espacio es una *curva cerrada simple*, si es homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Sea $p: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ la proyección canónica. Probar que si α es una curva cerrada simple en $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, entonces $p^{-1}(\alpha)$ es o bien una curva cerrada simple en \mathbb{S}^2 o bien la unión de dos curvas cerradas simples en \mathbb{S}^2 .

15.- Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f_k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $f_k(z) = z^k$. Se pide:

(i) si σ es un lazo en \mathbb{S}^1 basado en 1 y de grado n , probar que $f_k \circ \sigma$ es un lazo en \mathbb{S}^1 basado en 1;

(ii) ¿cuál es el grado del camino $f_k \circ \sigma$?

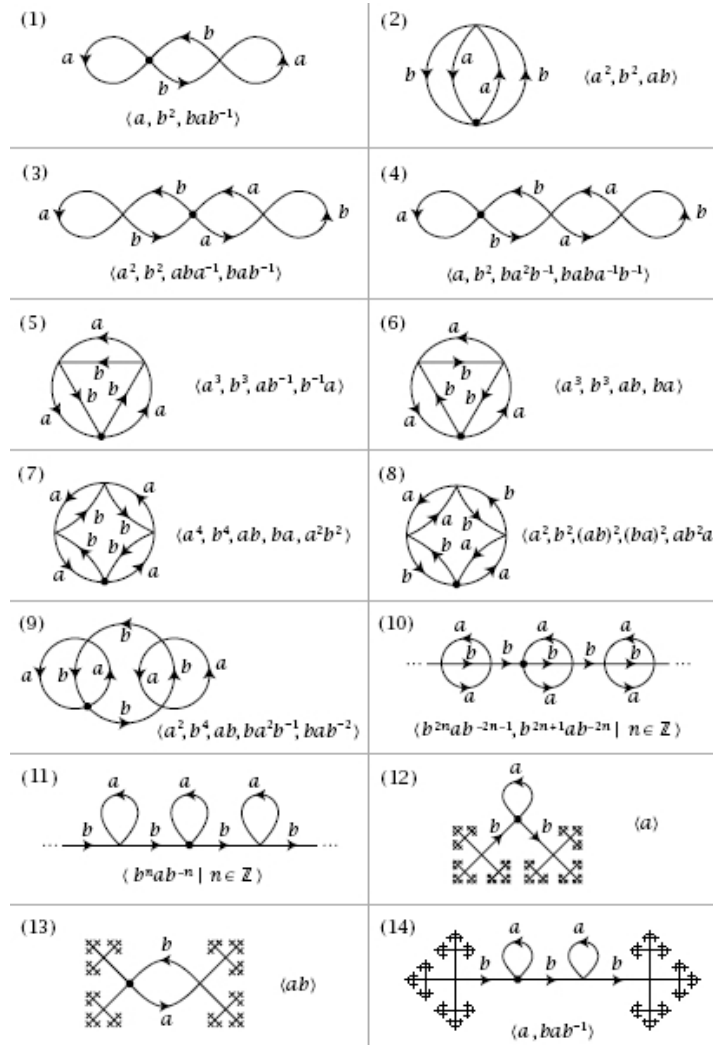
(iii) describir el homomorfismo $\pi_1(f_k): \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

16.- Sean $C_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = \frac{1}{n}\}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Sea X el espacio cociente obtenido a partir de Y , al identificar los puntos $\{(1, 0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ a un punto b . Probar que si $p: (E, e_0) \rightarrow (X, b)$ es un espacio recubridor, entonces E no es simplemente conexo, es decir, X no posee espacio recubridor universal.

17.- Sean la esfera $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, p y q dos enteros positivos coprimos y la aplicación $h: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ definida por $h(z_1, z_2) = (z_1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 \cdot e^{\frac{2\pi i q}{p}})$. Probar que h es un homeomorfismo y $h^p = 1_{\mathbb{S}^3}$. El grupo cíclico \mathbb{Z}_p opera sobre \mathbb{S}^3 por $n \cdot (z_1, z_2) = h^n(z_1, z_2)$, para $n \in \mathbb{Z}_p$. Se pide probar

- (i) la aplicación cociente $p: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ es recubridora. El cociente por esta acción $L(p, q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$, se llama *espacio lenticular*, y es una variedad de dimensión tres y compacta;
- (ii) el grupo fundamental de $L(p, q)$ es cíclico de orden p ;
- (iii) $L(2, 1)$ es el espacio proyectivo real de dimensión 3, \mathbb{RP}^3 ;
- (iv) si $L(p, q)$ y $L(p', q')$ son homeomorfos, probar que $p = p'$. De hecho, $L(p, q)$ y $L(p', q')$ son homeomorfos si y sólo si $p = p'$ y $(q \equiv q' \pmod n)$ ó $qq' \equiv 1 \pmod n$.

18.- Los siguientes ejemplos extraídos de [Ha] son algunos espacios recubridores de la figura de ocho. Estudiar su regularidad, el número de hojas, etc.



Bibliografía

- [AF] C. Adams and R. Franzosa, *Introduction to Topology Pure and Applied*, Prentice Hall, 2008.
- [Ag] M.K. Agoston, *Algebraic Topology*, Marcel Dekker, 1976.
- [AGP] M. Aguilar, S. Gitler y C. Prieto, *Topología Algebraica: un enfoque homotópico*, McGraw Hill, 1998.
- [Al1] P.S. Alexandroff, *Elementary concepts of topology*, Dover, 1961.
- [Al2] P.S. Alexandroff, *Combinatorial topology*, Dover, 1998.
- [Arm] * M.A. Armstrong, *Topología básica*, Reverté, 1987.
- [Arn] B.H. Arnold, *Intuitive concepts in elementary topology*, Prentice Hall, 1962.
- [AB] E. Artin and H. Braun, *Introduction to Algebraic Topology*, Merry Publ. Co., 1969.
- [ADQ] R. Ayala, A. Dominguez y A. Quintero, *Elementos de teoría de homología clásica*, Pub. Universidad de Sevilla, 2002.
- [Bas] S. Barr, *Expériences de Topologie*, Lysimaque, 1987.
- [Bar] W.S. Basener, *Topology and its applications*, Wiley Interscience, 2006.
- [BBIF] Y. Borisovich, N. Blinznyakov, Y. Izrailevich and T. Fomenko, *Introduction to Topology*, Mir, 1985.
- [Bo] B. Botvinnik, *Algebraic Topology course*, University of Oregon, 1999.

- [Bre] * G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, 1993.
- [Bro] R. Brown, *Topology and Groupoids*, BookSurge, 2006.
- [BRS] S. Buoncrisiano, C.P. Rourke and B.J. Sanderson, *A geometric approach to homology theory*, Cambridge, 1976.
- [Ca] S.S. Cairns, *Introductory topology*, Ronald Press Co., 1968.
- [CV] C.O. Christenson and W.L. Voxman, *Aspects of Topology*, BCS Associates, 1998.
- [CC] J.M. Cohen y F. Colonna, *Introduzione alla Topologia Algebrica*, Meditarreanean Press, 1990.
- [CC²] * L. Contreras Caballero e I. Contreras Caballero, *250 problemas resueltos de topología algebraica y geométrica: homotopía, espacios recubridores, nudos*, Cuadernos de apoyo. Universidad Autónoma de Madrid, 1989.
- [Cro] F.H. Croom, *Basic concepts of Algebraic Topology*, Springer, 1978.
- [Crs] M.D. Crossley, *Essential Topology*, Springer, 2005.
- [Cru] A. Crumeyrolle, *Bases géométriques de la topologie algébrique*, Cours et Séminaires du Dépt. de Maths de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1970.
- [DK] J.F. Davis and P. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics 35, AMS, 2001.
- [De] S. Deo, *Algebraic topology: a primer*, Hindustain Book Agency, 2003.
- [Di] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*, Birkhäuser, 1989.
- [DP] C.J.J. Dodson and P.E. Parker, *A user's guide to Algebraic Topology*, Kluwer, 1997.
- [Do] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1980.
- [ES] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952.
- [ET] L. Evens and R. Thomson, *Algebraic Topology*, New York University Press, 2001.

- [Fla] E. Flapan, *When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality*, Cambridge University Press, 2000.
- [Fle] H.G. Flegg, *From geometry to topology*, English Univ. Press, 1974.
- [FFG] A.T. Fomenko, D.B. Fuchs and V.L. Gutenmacher, *Homotopic topology*, Akadémiai Kiadó, 1986.
- [Fr] G.K. Francis, *A topological picture book*, Springer, 1987.
- [FF] M. Fréchet y K. Fan, *Invitation to combinatorial topology*, Dover, 2003.
- [Fu] W. Fulton, *Algebraic Topology: a first course*, Springer, 1995.
- [GG] T.W. Gamelin and R.E. Greene, *Introduction to topology*, Dover, 1999.
- [Godb] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1998.
- [Gode] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.
- [Goo] S.E. Goodman, *Beginning topology*, The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics, Thomson, 2005.
- [Gr] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, 1971.
- [GH] * M.J. Greenberg y J. Harper, *Algebraic topology: a first course*, Addison Wesley, 1981.
- [Ha] * A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [He] M. Henle, *A combinatorial introduction to topology*, Dover, 1979.
- [HW] P.L. Hilton and S. Wylie, *Homotopy theory: an introduction to algebraic topology*, Cambridge University Press, 1967.
- [Hi] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic topology*, Springer, 1966.
- [HY] J.G. Hocking and G.S. Young, *Topology*, Dover, 1961.
- [Hu] S.T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, 1959.
- [HJ] S. Huggett and D. Jordan, *A topological aperitif*, Springer, 2001.
- [Jam] I.M. James (editor), *History of Topology*, North-Holland, 1999.
- [Jan] K. Jänich, *Topology*, Springer, 1984.

- [Ka] D.W. Kahn, *Topology: an introduction to the point-set and algebraic areas*, Dover, 1995.
- [Ko] * C. Kosniowski, *Topología algebraica*, Reverté, 1985.
- [Lah] B.K. Lahiri, *A first course in algebraic topology*, Alpha Science, 2000.
- [Law] T. Lawson, *Topology: a geometric approach*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 9, Oxford University Press, 2003.
- [Lee] * J.M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Graduate Texts in Maths 202, Springer, 2000.
- [Lef] S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, AMS Colloquium Publications 27, 1991.
- [LS] D. Lehmann et C. Sacré, *Géométrie et Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, 1982.
- [Lev] R. Levi, *Geometric Topology*, University of Aberdeen, 2000.
- [Lie] W. Lietzmann, *Visual topology*, Chatto and Windus, 1965.
- [Lim] E.L. Lima, *Grupo fundamental e espaços do recobrimento*, Projeto Euclides IMPA, 1993.
- [Mas] * W.S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Reverté, 1982.
- [Mato] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem*, Springer, 2003.
- [Matv] S.V. Matveev, *Lectures on Algebraic Topology*, EMS, 2006.
- [Mau] C.R.F. Maunder, *Algebraic topology*, Dover, 1996.
- [May] J.P. May, *A concise course in Algebraic Topology*, Chicago Lecture Mathematical Series, 1999.
- [McC] G. McCarty, *Topology: an introduction with applications to topological groups*, Dover, 1967.
- [McCl] J. McCleary, *A first course in topology, continuity and dimension*, AMS, 1967.
- [MS] R. Messer y P. Straffin, *Topology. Now!*, The Mathematical Association of America, 2006.
- [Mu1] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

- [Mu2] * J.R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2002.
- [Nab] G.L. Naber, *Topological methods in euclidean spaces*, Cambridge Univ. Press, 1980.
- [Nak] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, IOP Publ., 1990.
- [NS] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicists*, Academic Press, 1983.
- [NP] V. Navarro y P. Pascual, *Topologia Algebraica*, Col·lecció UB 34, 1999.
- [O] P.V. O'Neil, *Fundamental concepts in topology*, Gordon and Breach, 1972.
- [Pa] C.W. Patty, *Foundations of topology*, PWS-Kent Publ. Co., 1993.
- [Pe] J.P. Petit, *Las aventuras de Anselmo Lanturlu. El Topologicón*,
http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/ESPANOL/El_Topologicon_es.pdf
- [Po] J.C. Pont, *Topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses Universitaires de France, 1974.
- [Pr1] V.V. Prasolov, *Intuitive topology*, AMS, 1994.
- [Pr2] V.V. Prasolov, *Elements of combinatorial and differential topology*, AMS, 2006.
- [RF] V. Rohlin et D. Fuchs, *Premier cours de topologie: chapitres géométriques*, Mir, 1981.
- [Ros] D. Roseman, *Elementary Topology*, Prentice-Hall, 1999.
- [Rot] * J.J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Springer, 1988.
- [Sal] G. Salicrup, *Introducción a la topología*, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.
- [Sat] H. Sato, *Algebraic Topology: an intuitive approach*, AMS, 1999.
- [Schi] P.L. Schik, *Topology. Point set and geometric*, Wiley, 2007.
<http://www.jcu.edu/math/Faculty/Shick/topology.htm>
- [Sc] A.S. Schwarz, *Topology for physicists*, Springer, 1993.
- [Se] P. Selick, *Introduction to homotopy theory*, AMS, 1997.

- [Si] A.J. Sieradski, *An introduction to Topology and Homotopy*, PWS-Kent, 1992.
- [ST] I.M. Singer and J.A. Thorpe, *Lecture Notes on elementary topology and geometry*, Springer, 1976.
- [Sp] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw Hill, 1966.
- [Ste] I. Steward, *Concepts in modern mathematics*, Dover, 1975.
- [Sti] J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer, 1993.
- [Sw] R.M. Switzer, *Algebraic topology: homotopy and homology*, Springer, 1975.
- [T] B. Totaro, *Notes on Algebraic Topology*, University of Cambridge, 1999.
- [Va] V.A. Vassiliev, *Introduction to topology*, AMS Student Mathematical Library 14, 2001.
- [VINK] * O.Ya. Viro, O.A. Ivanov, N.Yu. Netsvetaev, V.M. Kharlamov; *Elementary Topology: Problem Textbook*, AMS, 2008.
- [W] C.T.C. Wall, *A geometric introduction to topology*, Dover, 1993.
- [Wa1] * A.H. Wallace, *An introduction to algebraic topology*, Pergamon Press, 1957.
- [Wa2] A.H. Wallace, *Algebraic Topology*, W.A. Benjamin Inc., 1970.
- [War] G. Warner, *Topics in Topology and Homotopy theory*, Preprints Univ. Washington, 2001.
- [Wh] G.W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer, 1978.
- [Wi] K. Wirthmüller, *A topology primer*, 2002.
- [Z] M. Zisman, *Topologie algébrique Élémentaire*, Armand Collin, 1972.