Una categoría de grupoides adaptada al estudio de foliaciones

Marta Macho Stadler (UPV–EHU)*

En este póster definimos la *correspondencia de grupoides*, debilitando las condiciones de equivalencia de grupoides de [4], y probamos que una tal correspondencia induce otra (a la Connes, ver [1]) entre sus C*-álgebras reducidas. Nuestro interés es aplicarlo al estudio de grupoides de holonomía de espacios foliados.

1. Correspondencias de grupoides

Sean G_i grupoides localmente compactos T_2 y C_{II}, G_i^0 el espacio de unidades y $s_i, r_i : G_i \to G_i^0$ las aplicaciones origen y extremo. Sea Z localmente compacto, T_2 y C_{II}, $\rho : Z \to G_1^0$ una sobreyección continua y $G_1 * Z = \{(\gamma_1, z) \in G_1 \times Z : s_1(\gamma_1) = \rho(z)\}$.

Definición 1.1.- Una *acción a la izquierda* de G_1 sobre Z es una aplicación continua de $G_1 * Z$ sobre Z, tal que:

(1) $\rho(\gamma_1.z) = r_1(\gamma_1)$, si $(\gamma_1, z) \in G_1 * Z$,

(2) $\gamma_1'.(\gamma_1.z) = (\gamma_1'\gamma_1).z$, si ambos elementos están definidos,

(3) $\rho(z).z = z$, para cada $z \in Z$.

La acción se dice *propia*, si la aplicación $\Phi_1 : G_1 * Z \to Z \times Z$ definida por $\Phi_1(\gamma_1, z) = (\gamma_1.z, z)$ lo es. Análogamente, se define una G_2-acción a la derecha sobre Z, tomando $\sigma : Z \to G_2^0$ y $Z * G_2 = \{(z, \gamma_2) \in Z \times G_2 : r_2(\gamma_2) = \sigma(z)\}$.

Definición 1.2.- Z es una *correspondencia* de G_1 en G_2, si:

(1) existe una G_1-acción a la izquierda propia sobre Z y una G_2-acción a la derecha propia sobre Z, que conmutan,

(2) $\rho : Z \to G_1^0$ es abierta e induce una biyección $Z/G_2 \to G_1^0$.

Nota: La diferencia con la definición de [4], es que no suponemos que las acciones sean libres, ni que σ sea abierta, ni que induzca una biyección $G_1 \backslash Z \to G_2^0$.

Definición 1.3.- Si A y B son C*-álgebras, el par (E, ϕ) es una *correspondencia de A en B* cuando:

(1) E es un B-módulo de Hilbert a la derecha,

(2) ϕ es un $*$-homomorfismo de A en $\mathcal{L}_B(E)$.

Todo $*$-homomorfismo entre C*-álgebras induce una correspondencia entre ellas.

Si $\phi(A) \subset \mathcal{K}_B(E)$, entonces $(E, \phi, 0)$ es un módulo de Kasparov para C*-álgebras trivialmente graduadas (A, B) e induce un elemento $[E] \in KK(A, B)$.

Teorema 1.4.- *Si Z es una correspondencia de G_1 en G_2, existe una correspondencia de la C*-álgebra reducida $C_r^*(G_2)$ en la C*-álgebra reducida $C_r^*(G_1)$.*

2. Homomorfismos de grupoides y correspondencias

Sea $f : G_1 \to G_2$ un homomorfismo continuo y $f^0 : G_1^0 \to G_2^0$ la restricción obvia. El núcleo de f, H, es un subgrupoide cerrado de G_1 y $H^0 = G_1^0$. Existe una acción natural a derecha de H sobre G_1, que es propia al ser H cerrado. Se define la aplicación $(r,s)_H : H \to H^0 \times H^0$ por $(r,s)_H(\gamma) = (r_H(\gamma), s_H(\gamma))$, para $\gamma \in H$, donde r_H y s_H son las aplicaciones obvias. Entonces,

Teorema 2.1.- *Supongamos que se cumplen las propiedades:*

(C1) la aplicación cociente $q_H : G_1 \to G_1/H$ es abierta,

(C2) $r_1 : G_1 \to G_1^0$ es abierta,

(C3) $(r,s)_H : H \to H^0 \times H^0$ es propia,

(C4) para cada $x \in G_1^0$, es $f(s_1^{-1}(x)) = s_2^{-1}(f(x))$,

(C5) $f : G_1 \to G_2$ es abierta,

(C6) $f^0 : G_1^0 \to G_2^0$ es localmente 1:1.

Entonces G_1/H es una correspondencia de G_1 en G_2.

Un homomorfismo entre grupoides no induce, en general, un homomorfismo entre las C*-álgebras asociadas, pero se verifica el siguiente resultado:

Teorema 2.2.- *Si el homomorfismo $f : G_1 \to G_2$ verifica (C1) a (C6), y la propiedad adicional*

(C7) $f^0 : G_1^0 \to G_2^0$ es propia,

entonces existe una correspondencia (E, ϕ) de $C_r^*(G_2)$ en $C_r^*(G_1)$, tal que el rango de ϕ está contenido en $\mathcal{K}_{C_r^*(G_1)}(E)$. Por lo tanto, $(E, \phi, 0)$ es un módulo de Kasparov para $(C_r^*(G_2), C_r^*(G_1))$ y da lugar a un elemento de $KK(C_r^*(G_2), C_r^*(G_1)))$.

3. Un ejemplo de correspondencia en espacios foliados

Sea G un grupoide en las anteriores condiciones, con espacio de unidades M y tal que:

(i) r (y por lo tanto s) es abierta;

(ii) para cada $x, y \in M$, $G_x^y = s^{-1}(x) \cap r^{-1}(y)$ es compacto.

Sean M grupoide trivial y $f = s$. Entonces, $H = G$, G actúa a la derecha sobre G por multiplicación y el cociente bajo esta acción es homeomorfo a M (identificando la clase $[\gamma] \in G/G$ con $x = r(\gamma)$). Se cumplen las condiciones del Teorema 2.1:

(C1) la aplicación cociente $q : G \to G/G \simeq M$ es abierta y q puede identificarse con r;

(C2) r es abierta;

(C3) $(r,s) : G \to M \times M$ es propia al ser $(r,s)^{-1}\{(x,y)\} = G_x^y$;

(C4) $f(s^{-1}(x)) = r^{-1}(f(x))$;

(C5) s es abierta;

(C6) $f^0 = id_M$ es localmente 1:1.

Así, tenemos una correspondencia de G en el grupoide trivial.

Si G es el grupoide de holonomía de una foliación sobre una variedad compacta M, se cumple además la condición (C7) del Teorema 2.2, con lo que se obtiene un elemento de grupo de Kasparov $KK(C(M), C_r^*(G)))$: es precisamente la *correspondencia fundamental* introducida en [2] que induce la aplicación de Baum-Connes entre la K-teoría geométrica de una foliación y su K-teoría analítica.

Bibliografía

[1] A. Connes, *Géométrie non commutative*, InterEditions, 1990.

[2] G. Hector et M. Macho Stadler, *Isomorphisme de Thom pour les feuilletages presque sans holonomie*, C. Rend. Acad. Sci. 325 (9), 1015–1018, 1997.

[3] M. Macho Stadler and M. O'uchi, *Correspondence of groupoid C*-algebras*, J.Operator Th. 42, 103–119, 1999.

[4] P.S. Mulhy, J. Renault and D.P. Williams, *Equivalence and isomorphism for groupoid C*-algebras*, J. Operator Th. 17, 3-22, 1987.

*Trabajo realizado en colaboración con el Dr. M. O'uchi (Osaka Women's University). Parcialmente financiado por Proyecto UPV–EHU 00127.310-E-15916