Rev. Semin. Iberoam. Mat. **3** fasc. V-VI (2008) 79–93

Espacios foliados: el punto de vista no conmutativo

Marta Macho Stadler

1. Introducción

En *matemática no conmutativa*, se procede del siguiente modo:

1. dado un objeto singular $\mathcal{G}$, se comienza encontrando una buena *desingularización* $\widetilde{\mathcal{G}}$, que describa $\mathcal{G}$ en el sentido a estudiar (medible, topológico, diferenciable, etc.). En muchos casos, $\widetilde{\mathcal{G}}$ será un grupoide y el cociente del espacio de unidades de $\widetilde{\mathcal{G}}$ por la acción del grupoide será $\mathcal{G}$ (ver el apartado 2);

2. $\widetilde{\mathcal{G}}$ debe tener *buenas* propiedades para poder definir un álgebra de funciones $C^*(\widetilde{\mathcal{G}})$ cuya naturaleza refleje la de $\mathcal{G}$: éste es el objeto a estudiar.

Como primer ejemplo de espacio singular, y para ilustrar el anterior procedimiento, consideremos el caso de un grupo topológico Γ que actúa a derecha sobre un espacio topológico X por $\Phi : X \times \Gamma \to X$; entonces:

1. el cociente $\mathcal{G} = X/\Gamma$ es a menudo un espacio singular (no es de Hausdorff, su topología es la trivial, etc.). Su desingularización natural es el *grupoide producto* $\widetilde{\mathcal{G}} = X \times \Gamma$, de espacio de unidades X, aplicaciones $s(x,\gamma) = \Phi(x,\gamma)$, $r(x,\gamma) = x$ y multiplicación $(x,\gamma')(\Phi(x,\gamma'),\gamma) = (x,\gamma'\gamma)$. El cociente de X por la acción del grupoide es $\mathcal{G} = X/\Gamma$;

2. la *C^*-álgebra producto cruzado* $C^*(\widetilde{\mathcal{G}}) = C_0(X) \rtimes_{red} \Gamma$ es un espacio fácil de manipular y lleva *información topológica* sobre el cociente X/Γ, a través de su grupo de K-teoría.

En este trabajo se da un ejemplo de cómo se utiliza la topología no conmutativa en el estudio de los espacios de hojas de foliaciones. En los apartados 2 a 5 se explican sucintamente los actores de este proceso (grupoides de Lie, grupoides asociados a espacios foliados, C*-álgebras de grupoides y K-teoría de C*-álgebras), para terminar en el apartado 6 con la somera descripción de un ejemplo en el que estamos trabajando.

2. Desingularizando espacios de órbitas

2.1. Grupoides

Definición 2.1.1. Un *grupoide (algebraico)*, $G \overset{s}{\underset{r}{\rightrightarrows}} G^0$, está definido por:

1. un par de conjuntos (G^0, G), donde $G^0 \subset G$ es el *espacio de unidades* y G es el *espacio total*,
2. dos aplicaciones sobreyectivas, $s, r : G \to G^0$, las *proyecciones origen* y *extremo* respectivamente, donde si $x \in G^0$, es $s(x) = r(x) = x$,
3. una biyección $i : G \to G$, la *inversión*, tal que $i = i^{-1}$ (se denota $i(\gamma) = \gamma^{-1}$),
4. una ley de composición parcial, $. : G^2 \to G$, la *multiplicación*, donde $G^2 = \{(\gamma_2, \gamma_1) \in G \times G : s(\gamma_2) = r(\gamma_1)\}$ es el conjunto de los *pares componibles*, denotada del modo $\gamma_2.\gamma_1$ y verificando:
   - *Asociatividad:* si $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 \in G$ son tales que $((\gamma_2,\gamma_1) \in G^2$ y $(\gamma_3,\gamma_2.\gamma_1) \in G^2)$ ó $((\gamma_3, \gamma_2) \in G^2$ y $(\gamma_3.\gamma_2, \gamma_1) \in G^2)$, entonces son ciertas las identidades $\gamma_3.(\gamma_2.\gamma_1) = (\gamma_3.\gamma_2).\gamma_1$,
   - *Unidades:* para cada $\gamma \in G$, es $(\gamma, s(\gamma)) \in G^2$ y $(r(\gamma), \gamma) \in G^2$, y entonces $\gamma.s(\gamma) = \gamma = r(\gamma).\gamma$,
   - *Inversión:* para cada $\gamma \in G$, es (γ, γ^{-1}), $(\gamma^{-1}, \gamma) \in G^2$, y son válidas las identidades $\gamma.\gamma^{-1} = r(\gamma)$ y $\gamma^{-1}.\gamma = s(\gamma)$.

Ejemplos 2.1.2. Los primeros ejemplos de grupoides son:

(i) si G^0 es un punto, el grupoide se reduce a un *grupo*;

(ii) dado un conjunto X y $G = X \times X$, el espacio de unidades es la diagonal de G (identificada con X), y se definen las operaciones $s(y, x) = x$, $r(y, x) = y$ y $(x, y)^{-1} = (y, x)$. El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((y, x), (x, z)) : x, y, z \in X\}$ y la multiplicación está dada por $(y, x).(x, z) = (y, z)$: es el *grupoide grosero*;

(iii) el *grafo de una relación de equivalencia* R sobre un conjunto X es un grupoide, donde el espacio de unidades es la diagonal y las operaciones se definen por $s(x, y) = x$, $r(x, y) = y$ y $(x, y)^{-1} = (y, x)$. El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((x, y)(y, z)) \in G \times G : x, y, z \in X\}$ y la multiplicación $(x, y).(y, z) = (x, z)$.

Definición 2.1.3. Si $G \overset{s}{\underset{r}{\rightrightarrows}} M$ es un grupoide y $x \in M$, la *s-fibra* sobre x es $G_x = \{\gamma \in G : s(\gamma) = x\}$ y la *r-fibra* sobre x es $G^x = \{\gamma \in G : r(\gamma) = x\}$.
El conjunto $G_x^y = G_x \cap G^y$ puede ser vacío, para $x, y \in M$. Sin embargo, para cada $x \in M$, G_x^x es un grupo, el *grupo de isotropía* de G sobre x, cuyo elemento neutro es el punto x.

Definición 2.1.4. Un *subgrupoide* $G' \underset{r'}{\overset{s'}{\rightrightarrows}} M'$ del grupoide $G \underset{r}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$ es un subconjunto $G' \subset G$, cerrado para la multiplicación y la inversión.

Definición 2.1.5. Un *morfismo de grupoides* de $G_1 \underset{r_1}{\overset{s_1}{\rightrightarrows}} M_1$ en $G_2 \underset{r_2}{\overset{s_2}{\rightrightarrows}} M_2$ es una función $f : G_1 \to G_2$, tal que si $(\gamma_2, \gamma_1) \in G_1^2$, entonces $(f(\gamma_2), f(\gamma_1)) \in G_2^2$, y en tal caso, se verifica la igualdad $f(\gamma_2.\gamma_1) = f(\gamma_2).f(\gamma_1)$.

A partir de ahora, el adjetivo *diferenciable* significará de clase C^∞.

Definición 2.1.6. $G \underset{r}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$ es un *grupoide topológico* (resp., *de Lie*), si:

1. G y M son espacios topológicos (resp., variedades diferenciables), donde M es de Hausdorff,
2. las funciones s, r, i y . son continuas (resp., diferenciables); s, r son abiertas (resp., submersiones) e i es un homeomorfismo (resp., difeomorfismo).

El grupoide $G \underset{r}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$ es *étale* si además r y s son homeomorfismos locales.

Ejemplos 2.1.7. Los ejemplos básicos de grupoides de Lie son:

(i) *Acción de un grupo de Lie sobre una variedad:* Dada una acción diferenciable de un grupo de Lie conexo H sobre la variedad M, $\Phi : H \times M \to M$, queda definido un grupoide de Lie, de espacio total $G = H \times M$, espacio de unidades M y con las operaciones, $s(g, x) = x$, $r(g, x) = \Phi(g, x)$, $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, \Phi(g, x))$ y si $x_2 = \Phi(g_1, x_1)$, la multiplicación está dada por $(g_2, x_2).(g_1, x_1) = (g_2 g_1, x_1)$.

(ii) *Grupoide de homotopía de una variedad:* Dada M una variedad diferenciable, se considera el conjunto de los caminos sobre M, $\mathcal{P}(M)$, provisto de la topología compacto-abierta y sobre él se define la relación de equivalencia abierta: $\gamma \sim \gamma'$ *si* γ *es homótopa a* γ' *con extremidades fijas.* El cociente por esta relación, $\Pi_1(M) = \mathcal{P}(M)/\sim$, es un grupoide topológico localmente compacto, cuyo espacio de unidades es la variedad M (identificada con el conjunto de las clases de los caminos constantes) y donde la estructura de grupoide queda definida a través de las aplicaciones $s(\gamma) = \gamma(0)$, $r(\gamma) = \gamma(1)$ y la multiplicación y la inversión del grupoide se obtienen a partir de la composición y la inversión usual de caminos, respectivamente. La aplicación $(s, r) : \Pi_1(M) \to M \times M$ es un revestimiento, compatible con la topología cociente y hace de $\Pi_1(M)$ un grupoide de Lie. Si $x \in M$, $s : \Pi_1(M)^x \to M$ y $r : \Pi_1(M)_x \to M$ son los revestimientos universales de M y $\Pi_1(M)_x^x = \pi_1(M, x)$. El grupoide de Lie $\Pi_1(M) \underset{r}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$, se llama *grupoide de homotopía* de M.

Definición 2.1.8. Dados $G_1 \underset{r_1}{\overset{s_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{r_2}{\overset{s_2}{\rightrightarrows}} M_2$ dos grupoides topológicos (resp., de Lie), un *homomorfismo* $f : G_1 \to G_2$ es una aplicación continua (resp., diferenciable) que es además un morfismo de grupoides.

2.2. Acciones de grupoides y equivalencias de Morita

Sea $G \underset{r}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$ un grupoide de Lie y Z una variedad localmente compacta, eventualmente no Hausdorff, diferenciable y provista de una aplicación diferenciable, $\rho : Z \to M$. Sea $Z *_M G = \{(z,\gamma) \in Z \times G : \rho(z) = r(\gamma)\}$.

Definición 2.2.9. Una *G-acción (a la derecha) sobre Z* es una aplicación diferenciable $\Phi : Z *_M G \to Z$, $\Phi(z,\gamma) = z.\gamma$, tal que:

1. $\rho(z.\gamma) = s(\gamma)$, para cada $(z,\gamma) \in Z *_M G$,
2. si una de las expresiones $(z.\gamma).\gamma'$ ó $z.(\gamma.\gamma')$ está definida, la otra también lo está y coinciden,
3. para cada $z \in Z$, se tiene $z.\rho(z) = z$.

La órbita de $z \in Z$, bajo esta acción, $\{z.\gamma : \gamma \in G\}$, se denota por $G(z)$. Un *G-espacio (a la derecha)* es una variedad diferenciable Z, eventualmente no Hausdorff, con una G-acción diferenciable (a la derecha) dada.

Definición 2.2.10. Dados dos G-espacios (a la derecha) Z_1 y Z_2, una *G-aplicación* es una función diferenciable $f : Z_1 \to Z_2$ y G-equivariante, es decir, si $(z_1,\gamma) \in Z_1 *_M G$, entonces $(f(z_1),\gamma) \in Z_2 *_M G$ y $f(z_1.\gamma) = f(z_1).\gamma$.

Definición 2.2.11. Si Z es un G-espacio (a la derecha), un *G-fibrado vectorial* sobre Z está definido por un G-espacio E y una G-aplicación, la *proyección*, $p : E \to Z$, tales que:

1. $p : E \to Z$ es un fibrado vectorial complejo,
2. para cada par $(z,\gamma) \in Z *_M G$, la aplicación $\phi : E_z \to E_{z.\gamma}$ dada por $\phi(u) = u.\gamma$ es lineal.

Definición 2.2.12. Un G-espacio (a la derecha) Z se dice *principal* si:

1. la aplicación $\Psi : Z *_M G \to Z \times Z$, dada por $\Psi(z,\gamma) = (z, z.\gamma)$ es propia, y
2. la acción es libre (dado $(z,\gamma) \in Z *_M G$, es $\gamma.z = z$ si y sólo si $\gamma \in M$).

En este caso, la proyección canónica $\pi : Z \to {}^{Z}/_{G}$ es una submersión y el cociente ${}^{Z}/_{G}$ es un espacio localmente compacto y Hausdorff.

Ejemplo 2.2.13. Si $G \underset{r}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$ es un grupoide de Lie y se eligen $Z = G$ y $\rho = s$, entonces $Z *_M G = G^2$. La multiplicación del grupoide es una G-acción natural (a la derecha) de G sobre sí mismo, que es libre y G es un G-espacio principal. Si $x \in M$, su órbita es $G(x) = G^x$.

Existen muy pocos isomorfismos (en el sentido obvio, ver la definición 2.1.8) entre grupoides; la siguiente noción de equivalencia entre grupoides es la más adecuada para estudiar las C*-álgebras asociadas y la K-teoría inducida:

Definición 2.2.14. Una *equivalencia de Morita* entre dos grupoides de Lie $G_1 \overset{s_1}{\underset{r_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \overset{s_2}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M_2$ está dada por:

1. una variedad Z_f, eventualmente no Hausdorff, localmente compacta y diferenciable, provista de submersiones $r_f : Z_f \to M_1$ y $s_f : Z_f \to M_2$;

2. Z_f es un G_1-espacio principal (a izquierda) y un G_2-espacio principal (a derecha) respecto a r_f y s_f, y las dos acciones conmutan;

3. r_f induce un difeomorfismo entre Z_f/G_2 y M_1 y s_f induce un difeomorfismo entre $G_1 \backslash Z_f$ y M_2.

Para más detalles sobre grupoides, puede consultarse [H84], [H85] y [MRW].

3. De foliaciones a grupoides

3.1. El grupoide de holonomía de una foliación

En todo lo que sigue, $(M, \mathcal{F})$ es una foliación de dimensión p y codimensión q sobre una variedad M de dimensión $n = p + q$. Sea $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ el conjunto de los caminos tangentes a $\mathcal{F}$ (caminos cuya imagen está contenida en una hoja) provisto de la topología compacto-abierta, sobre el que se define la relación de equivalencia abierta:

$$\gamma \sim_h \gamma' \textit{ si el gérmen de holonomía del lazo } (\gamma')^{-1}.\gamma \textit{ es trivial.}$$

El cociente por esta acción $Hol(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathcal{F})/\sim_h \overset{s}{\underset{r}{\rightrightarrows}} M$ es un grupoide topológico localmente compacto: el espacio de unidades es M (identificado con la clase de los caminos constantes) y la estructura de grupoide está definida por las aplicaciones abiertas $s(\gamma) = \gamma(0)$, $r(\gamma) = \gamma(1)$ y la multiplicación y la inversión están inducidas por la composición y la inversión usual de caminos, respectivamente.

Se trata además de un grupoide de Lie; la estructura diferenciable se da con todo detalle en [Win], pero se puede describir de manera concisa: si $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$, se consideran dos cubos distinguidos $U_i = P_i \times T_i$ ($i \in \{0, 1\}$), donde U_i es entorno de $\gamma(i)$, P_i es una placa y T_i es una transversal de $\mathcal{F}$. Salvo posibles restricciones de T_0 y T_1, la trivialidad local de la foliación permite definir un difeomorfismo de holonomía $h_\gamma : T_0 \to T_1$, representado por un *tubo de caminos tangentes a* $\mathcal{F}$, $\widehat{h_\gamma} : T_0 \times [0, 1] \to M$. Este tubo está parametrizado por T_0 y la aplicación h_γ consiste en pasar del origen al extremo de cada uno de estos caminos. Por otro lado, $\widehat{h_\gamma}$ se extiende a una familia diferenciable de caminos tangentes a $\mathcal{F}$, familia parametrizada por $P_0 \times T_0 \times P_1$, y que induce un difeomorfismo de U_0

sobre U_1. Tras el paso a las clases de equivalencia, se obtiene una carta local sobre $Hol(\mathcal{F})$. El atlas así construido induce sobre $Hol(\mathcal{F})$ una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2p+q$. Como todos los objetos que definen la estructura de grupoide sobre $Hol(\mathcal{F}) \overset{s}{\underset{r}{\rightrightarrows}} M$ son diferenciables, se trata de un grupoide de Lie: es el *grupoide de holonomía de la foliación*.

Si $x \in M$, $Hol(\mathcal{F})_x^x = h(\pi_1(L_x, x))$, donde $h : \pi_1(L_x, x) \to \mathrm{Diff}(T_0, x)$ es la representación de holonomía de la hoja L_x pasando por x (es precisamente $h([\gamma]) = h_\gamma$). Las fibras de este grupoide son los revestimientos de holonomía de las hojas de la foliación $\mathcal{F}$. El cociente $Hol(\mathcal{F})^x/Hol(\mathcal{F})_x^x$ es difeomorfo a L_x, con lo que $Hol(\mathcal{F})$ (que en general no es Hausdorff) es el desingularizado natural del *espacio de hojas* de la foliación $M/\mathcal{F}$.

Si se restringe la foliación a un cubo distinguido, $U = P \times T$, donde P es una placa y T una transversal, entonces es $Hol(\mathcal{F}_U) = P \times P \times T$. De hecho, se obtiene una familia parametrizada por T de grupoides groseros (ejemplo 2.1.2 (ii)): ésta es la *propiedad de trivialidad local* del grupoide de holonomía.

El libro [CC] es un excelente texto donde se explica con detalle diversos aspectos de la teoría de espacios foliados.

3.2. Espacio de hojas y propiedades transversas

El estudio del espacio de hojas $M/\mathcal{F}$ es un estudio de propiedades transversas de la foliación, por ello es útil introducir el siguiente concepto:

Definición 3.2.1. Una *subvariedad transversa* T es una subvariedad inmersa de M, de dimensión q, tal que T es transversa a cada hoja, es decir, en cada punto de T el espacio tangente de T es suplementario al espacio tangente a la hoja que pasa por este punto.

Definición 3.2.2. Sean $Hol(\mathcal{F}) \overset{s}{\underset{r}{\rightrightarrows}} M$ el grupoide de holonomía de $\mathcal{F}$ y T una *transversal total* (subvariedad transversa que corta cada hoja). Dado el conjunto $Hol(\mathcal{F})_T^T = \{\gamma \in Hol(\mathcal{F}) : s(\gamma), r(\gamma) \in T\}$, si se denotan por s_T y r_T la restricciones de s y r a $Hol(\mathcal{F})_T^T$, entonces $Hol(\mathcal{F})_T^T \overset{s_T}{\underset{r_T}{\rightrightarrows}} T$ es un grupoide diferenciable, el *grupoide transverso* asociado a T. Como las aplicaciones s_T y r_T son difeomorfismos locales, $Hol(\mathcal{F})_T^T$ es además un *grupoide étale* (definición 2.1.6) .

Existe una estrecha relación entre estos dos grupoides (ver [H58] y [H84]):

Proposición 3.2.3. *La inmersión natural $i_T : T \to M$ induce una equivalencia de Morita entre los grupoides $Hol(\mathcal{F})$ y $Hol(\mathcal{F})_T^T$.*

4. Topología no conmutativa

4.1. C*-álgebras

Definición 4.1.1. Una *C*-álgebra* A es un álgebra de Banach compleja, dotada de una involución $*: A \to A$, verificando con respecto a la norma de espacio de Banach, la relación $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Un *$*$-homomorfismo* entre dos C*-álgebras es un homomorfismo de álgebras que conmuta con la involución.

Ejemplos 4.1.2. Los ejemplos básicos de C*-álgebras son:

(i) Si M es localmente compacto y Hausdorff, el álgebra de las funciones continuas sobre M, con valores complejos y nulas en el infinito,

$$C_0(M) = \{f : M \to \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon \text{ compacto: } |f(x)| < \epsilon, \text{ si } x \notin K_\epsilon\},$$

con la involución $f^*(x) = \overline{f(x)}$ es una C*-álgebra (conmutativa).

(ii) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ el álgebra de los operadores lineales acotados, con la involución dada por la operación de adjunción usual, entonces $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es una C*-álgebra. Toda subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, es también una C*-álgebra, como por ejemplo, la subálgebra de los operadores compactos $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$.

Toda C*-álgebra puede pensarse como una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert:

Teorema de Gelfand-Naimark 4.1.3. *Para cada C*-álgebra A existe un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ y una isometría de A en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.*

La categoría de las C*-álgebras conmutativas y $*$-homomorfismos es dual de la de los espacios localmente compactos y aplicaciones continuas propias:

Teorema de Gelfand 4.1.4. *Toda C*-álgebra conmutativa A es de la forma $C_0(M)$, para un cierto espacio localmente compacto y Hausdorff M.*

4.2. Equivalencias de Morita

Dadas dos C*-álgebras, en general hay muy pocos $*$-homomorfismos entre ellas (y aún menos *-isomorfismos); de hecho, en muchos casos, el único $*$-homomorfismo que existe es la aplicación idénticamente nula. Por ello, se hace preciso introducir otra noción de equivalencia (ver [Weg]).

Definición 4.2.5. Sean A una C*-álgebra y $\mathcal{E}$ un A-módulo a derecha. Se dice que $\mathcal{E}$ es un *A-módulo de Hilbert*, si está provisto de un producto interior con valores en A, $\langle,\rangle_A : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$, lineal con respecto a la segunda variable y antilineal con respecto a la primera, tal que, si $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ y $a \in A$, entonces:

1. $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \eta, \xi \rangle_A^*$;
2. $\langle \xi, \eta a \rangle_A = \langle \xi, \eta \rangle_A a$ y $\langle \xi a, \eta \rangle_A = a^* \langle \xi, \eta \rangle_A$;

3. $\langle \xi, \xi \rangle_A \geq 0$ y $\langle \xi, \xi \rangle_A = 0$ si y sólo si $\xi = 0$;
4. la aplicación $n : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ dada por $n(\xi) = \|\langle \xi, \xi \rangle_A\|^{1/2}$ es una norma de espacio vectorial completo sobre $\mathcal{E}$.

El A-módulo de Hilbert $\mathcal{E}$ es *lleno* si $\langle , \rangle_A$ genera A como ideal bilátero cerrado.

Definición 4.2.6. Una *equivalencia de Morita* entre A y B está definida por dos pares $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}})$ y $(\mathcal{F}, \pi_{\mathcal{F}})$, tales que:

1. $\mathcal{E}$ es un B-módulo de Hilbert a derecha y $\mathcal{F}$ es un A-módulo de Hilbert a derecha,
2. $\pi_{\mathcal{E}} : A \to \mathcal{L}_B(\mathcal{E})$ y $\pi_{\mathcal{F}} : B \to \mathcal{L}_A(\mathcal{F})$ son $*$-homomorfismos,
3. $\mathcal{E} \otimes_B \mathcal{F}$ es un A-módulo isomorfo a A y $\mathcal{F} \otimes_A \mathcal{E}$ es un B-módulo isomorfo a B.

4.3. La C*-álgebra de un grupoide

Comenzamos dando una generalización de la noción de medida de Haar para grupos:

Definición 4.3.7. Sean G un grupoide localmente compacto y $C_c(G)$ el espacio vectorial de las funciones complejas de soporte compacto en G. Un *sistema de Haar a izquierda* es un conjunto de medidas $\{\lambda^u \mid u \in G^0\}$ verificando las siguientes propiedades:

1. el soporte de la medida λ^u es $s^{-1}(u)$;
2. *continuidad*: para $f \in C_c(G)$, la función $\lambda(f) : G^0 \to \mathbb{C}$ dada por $\lambda(f)(u) = \int f d\lambda^u$ es continua;
3. *invariancia a izquierda*: $\int f(x.y) d\lambda^{s(x)}(y) = \int f(y) d\lambda^{r(x)}(y)$, para cada $x \in G$ y $f \in C_c(G)$.

Sobre $C_c(G)$ se define la convolución $f * g(x) = \int f(x.y) g\big(y^{-1}\big) d\lambda^{s(x)}(y)$ y la involución $f^*(x) = \overline{f\big(x^{-1}\big)}$, que le dotan de estructura de *-álgebra. Además, si K es compacto en G, queda definida una *seminorma* sobre $C_c(G)$ por $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$ y se obtiene la *topología límite inductivo* sobre $C_c(G)$ ($f_n \to f \iff \|f - f_n\|_K \to 0$ para cada compacto $K \subset G$).

Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, para cada $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene la *seminorma* $\|u\|_{x,y} = |\langle u(x), y \rangle|$. La *topología débil de operadores* sobre $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es la generada por estas seminormas ($\{A_n\} \to A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \iff \big\{\langle A_n(x), y \rangle\big\} \to \langle A(x), y \rangle$ para $x, y \in \mathcal{H}$).

Utilizando las topologías recién descritas, se define:

Definición 4.3.8. Dado un grupoide localmente compacto y Hausdorff G con un sistema de Haar a izquierda $\{\lambda^u\}_{u \in G^0}$, una *representación* de $C_c(G)$ en $\mathcal{H}$ es un $*$-homomorfismo $\pi : C_c(G) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que el espacio generado por $\{\pi(f)(x) : f \in C_c(G), x \in \mathcal{H}\}$ es denso en $\mathcal{H}$.

Para cada $u \in G^0$, sean $\mathcal{H}_u = L^2\big(s^{-1}(u), \lambda^u\big)$ y la *representación reducida* $\pi_u : C_c(G) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_u)$, dada por $\big(\pi_u(f)(\phi)\big)(x) = \int_{r^{-1}(u)} f\big(x.y\big)\phi\big(y^{-1}\big)d\lambda^u(y)$, donde $f \in C_c(G)$, $\phi \in L^2\big(s^{-1}(u), \lambda^u\big)$ y $x \in s^{-1}(u)$. Se define entonces:

Definición 4.3.9. La *norma reducida* sobre $C_c(G)$ se define por $\|f\|_{\mathrm{red}} = \sup\{\|\pi_u(f)\|_{\mathrm{op}} : u \in G^0\}$, y la compleción de $C_c(G)$ respecto a ella, $C^*_{\mathrm{red}}(G)$, es la *C^*-álgebra reducida* de G.

La equivalencia de Morita pasa de grupoides a C*-álgebras:

Proposición 4.3.10. *Si* $G_1 \overset{s_1}{\underset{r_1}{\rightrightarrows}} M_1$ *y* $G_2 \overset{s_2}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M_2$ *son grupoides Morita-equivalentes, entonces* $C^*_{red}(G_1)$ *y* $C^*_{red}(G_2)$ *son C*-álgebras Morita-equivalentes.*

Para más detalles, ver [Con], [R80], [R82] y[Rie].

4.4. La C*-álgebra de una foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación de dimensión p y codimensión q sobre una variedad M de dimensión $n = p + q$. La C*-álgebra de la foliación, $C^*(M, \mathcal{F})$, se define precisamente como la C*-álgebra reducida de su grupoide de holonomía, $C^*_{red}(Hol(\mathcal{F}))$. A continuación, se da un listado de las propiedades más importantes, que pueden consultarse en [Con].

La construcción de $C^*(M, \mathcal{F})$ es local en el siguiente sentido:

Proposición 4.4.11. *Si $U \subset M$ es abierto, $Hol(\mathcal{F}_U)$ es un subgrupoide abierto de $Hol(\mathcal{F})$. La inclusión $C_c(Hol(\mathcal{F}_U)) \subset C_c(Hol(\mathcal{F}))$ se extiende a un $*$-isomorfismo isométrico de $C^*(U, \mathcal{F}_U)$ en $C^*(M, \mathcal{F})$.*

La C*-álgebra de $(M, \mathcal{F})$ es estable:

Proposición 4.4.12. $C^*(M, \mathcal{F}) \otimes \mathfrak{K} \cong C^*(M, \mathcal{F})$.

$C^*(M, \mathcal{F})$ sólo depende de la estructura transversa de la foliación:

Teorema 4.4.13. *Si T es una transversal total, las C*-álgebras $C^*(M, \mathcal{F})$ y $C^*_{red}(Hol_T^T)$ son Morita-equivalentes.*

Teorema 4.4.14. *Si $(M_1, \mathcal{F}_1)$ y $(M_2, \mathcal{F}_2)$ son foliaciones topológicamente equivalentes, entonces $C^*(M_1, \mathcal{F}_1) \otimes \mathfrak{K} \cong C^*(M_2, \mathcal{F}_2) \otimes \mathfrak{K}$.*

Muchas propiedades de $(M, \mathcal{F})$ se pueden leer a través de $C^*(M, \mathcal{F})$:

Proposición 4.4.15. *Si $Hol(\mathcal{F})$ es de Hausdorff, se verifica:*

1. *$C^*(M, \mathcal{F})$ es simple (es decir, no posee ideales no triviales) si y sólo si toda hoja de $\mathcal{F}$ es densa;*

2. *la foliación $\mathcal{F}$ es cerrada si y sólo si $C^*(M, \mathcal{F})$ posee a $\mathfrak{K}$ como cociente.*

Ejemplos 4.4.16. Algunos ejemplos de C*-álgebras de foliaciones son:

(i) si M es localmente compacto y está foliado por puntos, entonces $Hol(\mathcal{F}) = M$ y $C^*(M, \mathcal{F}) = C_0(M)$;

(ii) si M es localmente compacto y M es una variedad foliada por una única hoja, entonces $Hol(\mathcal{F}) = M \times M$. Un sistema de Haar es una medida λ de soporte M. Los elementos de la subálgebra densa de la definición pueden realizarse como operadores integrales con núcleo de soporte compacto sobre $L^2(M, \lambda)$ y su compleción $C^*(M, \mathcal{F})$ es $\mathfrak{K}\left(L^2(M, \lambda)\right)$;

(iii) si la foliación viene dada por una fibración $F^p \to M \to B^q$ (F conexo), entonces M está foliada por las fibras sobre B. Las hojas son cerradas y difeomorfas a F, $Hol(\mathcal{F})$ es el grafo de la relación de equivalencia asociada a la partición de M en hojas y $C^*(M, \mathcal{F}) \simeq C_0(B, \mathfrak{K}(L^2(F))$;

(iv) si la foliación proviene de una acción de un grupo de Lie Γ y $Hol(\mathcal{F}) \simeq M \times \Gamma$ (este isomorfismo no es siempre cierto), entonces $C^*(M, \mathcal{F})$ es la C*-álgebra producto cruzado $C_0(M) \rtimes_{red} \Gamma$.

5. El regreso a la topología

5.1. La K-teoría topológica de Atiyah

Dado un espacio compacto M, si se denota por $V(M)$ el conjunto de las clases de isomorfismo de fibrados vectoriales complejos localmente triviales de base M, V es un functor contravariante de la categoría de los espacios compactos en la categoría de los semigrupos abelianos, invariante por homotopía. $K^0(M)$ se define como el grupo de Grothendieck de $V(M)$, y continúa siendo un functor contravariante, ahora de la categoría de los espacios compactos en la de los grupos abelianos. Esta definición se generaliza a M localmente compacto, por paso al compactificado de Alexandroff.

La *suspensión reducida* de orden n de M se define como el espacio no compacto $S^n(M) = M \times \mathbb{R}^n$, y su *K-grupo* de orden n es entonces $K^n(M) = K^0(S^n(M))$ (para más detalles ver [Bla] o [Weg]).

Proposición 5.1.1. *Sean M un espacio localmente compacto, E un fibrado vectorial complejo sobre M y $\Gamma(M, E)$ el conjunto de las secciones continuas de E. Entonces:*

1. *$\Gamma(M, E)$ es un módulo sobre el anillo de las funciones continuas de M con valores complejos $C(M)$ (es proyectivo de tipo finito si M es compacto);*

2. *un isomorfismo de fibrados vectoriales complejos induce un isomorfismo entre los módulos de secciones correspondientes;*

3. *si E es el fibrado trivial de dimensión n, entonces $\Gamma(M, E) \simeq C(M)^n$.*

Así, Γ es un functor covariante de la categoría de los fibrados vectoriales complejos sobre un espacio compacto y Hausdorff M, en la categoría de los módulos proyectivos de tipo finito sobre $C(M)$, y se puede incluso probar que Γ es biyectiva: este resultado tiene una gran importancia, puesto que existe una generalización natural en el caso no conmutativo, que se explica a continuación.

5.2. La K-teoría analítica

Si la K-teoría topológica es una teoría de cohomología generalizada para fibrados vectoriales, la K-teoría de álgebras de operadores lo es para ciertas matrices (los *proyectores* sobre una C*-álgebra (ver [Bla] ó [Weg]).

Definición 5.2.2. Sea A una C*-álgebra. Los elementos idempotentes ($p^2 = p$) y autoadjuntos ($p = p^*$), se denominan *proyectores*, y se denotan por $\mathcal{P}(A)$. Dos proyectores p, q sobre A son *equivalentes*, $p \sim q$, si existe $u \in A$ verificando $p = uu^*$ y $q = u^*u$. Se trata de una relación de equivalencia sobre A, y la clase de un elemento se denota por $[p]$.

Definición 5.2.3. Un *sistema dirigido de álgebras*, $\{A_i, \phi_{ij}\}_{i,j\in I}$, es una familia de álgebras A_i y morfismos inyectivos $\phi_{ij} : A_i \to A_j$, que inducen una relación de orden sobre las álgebras: $A_i \leq A_j$ si y sólo si $\phi_{ij} : A_i \to A_j$. En particular, dados $i, j \in I$, existe $k \in I$, tal que $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$.

Definición 5.2.4. Dado un sistema dirigido de álgebras $\{A_i, \phi_{ij}\}_{i,j\in I}$, su *límite inductivo*, $\varinjlim_i A_i$ ($\phi_j : \varinjlim_i A_i \to A_j$ es un homomorfismo para cada j), es el álgebra que cumple la siguiente propiedad universal: toda aplicación del sistema $\{A_i, \phi_{ij}\}_{i,j\in I}$ en un álgebra B (es decir, toda familia de morfismos $\{\psi_i : A_i \to B\}_i$ tales que $\psi_j \circ \phi_{ij} = \psi_i$), factoriza a través de $\varinjlim_i A_i$, es decir, existe $\theta : \varinjlim_i A_i \to B$ tal que $\psi_j \circ \phi_{ij} = \theta \circ \phi_i$.

Sea el sistema dirigido de matrices con valores en A, $\{\mathbb{M}_n(A), i_{nm}\}$, donde $i_{nm} : \mathbb{M}_n(A) \to \mathbb{M}_m(A)$ es la inclusión natural, para $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \leq m$. Denotamos $\mathbb{M}_\infty(A) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{M}_n(A)$, cuya compleción es $A \otimes \mathfrak{K}$ (ver [Bla] y [Weg]).

Si A es unitaria y $V(A) = \{[p] : p \in \mathbb{M}_\infty(A), p = p^* = p^2\}$, se desea dotar a $V(A)$ de estructura de semigrupo abeliano; pero la suma de proyectores (salvo que sean ortogonales) no es necesariamente un proyector. Puesto que trabajamos con clases de equivalencia, podríamos pensar en encontrar para dos proyectores p y q, una expresión del tipo $[p] + [q] = [r \oplus s]$, donde r y s son proyectores ortogonales y equivalentes a p y q, respectivamente. La ventaja de trabajar en $\mathbb{M}_\infty(A)$ es que r y s son fácilmente identificables: basta tomar $r = diag(p, 0)$ y $s = diag(0, q) \sim diag(q, 0)$. En consecuencia, $[p]+[q] = [diag(p, q)] = [diag(q, p)]$ (donde $diag(p, q)$ es la matriz diagonal por bloques $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$), y entonces es evidente el siguiente resultado:

Proposición 5.2.5. $(V(A), +)$ *es un semigrupo abeliano.*

Si $K_0(A)$ es el grupo de Grothendieck del semigrupo $V(A)$, se deduce:

Proposición 5.2.6. K_0 *es un functor covariante entre las categorías de las C*-álgebras unitarias y $*$-homomorfismos en la de los grupos abelianos y homomorfismos.*

Observación 5.2.7. Se puede extender esta definición a C*-álgebras no necesariamente unitarias.

Definición 5.2.8. Dada una C*-álgebra A, su *suspensión* es la C*-álgebra $SA = \{f \in C([0,1], A); f(0) = 0 = f(1)\}$, con las operaciones puntuales y la norma del supremo, donde $C([0,1], A)$ es la familia de funciones continuas de $[0,1]$ con valores en A. Y el *K-grupo de orden n sobre A* es $K_n(A) = K_0(S^n A)$.

Esta teoría generaliza la K-teoría topológica de Atiyah:

Teorema de Swan 5.2.9. *Si M es un espacio localmente compacto, su grupo de K-teoría analítica $K_j(C_0(M))$ es naturalmente isomorfo al grupo de K-teoría topológica $K^j(M)$.*

Se destacan algunas de las propiedades de grupos de K-teoría:

Teorema 5.2.10. *Dada una C*-álgebra A, se verifica:*

1. *K_n es un functor covariante de la categoría de las C*-álgebras y $*$-homomorfismos en la de los grupos abelianos y homomorfismos;*

2. *continuidad: dado un sistema dirigido de C*-álgebras, $\{A_i, \phi_{ij}\}_{i,j\in I}$, la familia $\{K_n(A_i), \phi^*_{ij}\}_{i,j\in I}$ es un sistema dirigido de grupos y*
$$K_n(\varinjlim_i A_i) = \varinjlim_i K_n(A_i);$$

3. *estabilidad de K_n: dada una C*-álgebra A, $K_n(A) \simeq K_n(A \otimes \mathfrak{K})$. En particular, si A y B son establemente isomorfos (es decir $A \otimes \mathfrak{K} \simeq B \otimes \mathfrak{K}$), entonces $K_n(A) \simeq K_n(B)$;*

4. *periodicidad de Bott: para cada C*-álgebra A, $K_n(A) \simeq K_{n+2}(A)$, es decir, salvo isomorfismo, sólo existen K-grupos en dimensiones 0 y 1;*

5. *dadas dos C*-álgebras A y B, es $K_n(A \oplus B) \simeq K_n(A) \oplus K_n(B)$;*

6. *equivalencia de Morita: si A y B son C*-álgebras Morita-equivalentes, sus grupos de K-teoría son isomorfos.*

En particular, con las notaciones anteriores, y como consecuencia de la proposición 4.4.13 y del teorema 5.2.10, se deduce:

Corolario 5.2.11. *Si T es una transversal total en el espacio foliado $(M, \mathcal{F})$, entonces $K_*(C^*(M, \mathcal{F}))$ y $K_*(C^*_{red}(Hol^T_T))$ son grupos isomorfos.*

La ventaja de esta propiedad es que se pueden obtener propiedades de la foliación trabajando únicamente sobre una transversal total, espacio de dimensión menor, y por lo tanto más sencillo de manipular.

5.3. K-teoría ordenada

Definición 5.3.12. Un par (H, H^+) es un *grupo abeliano ordenado* si H es un grupo abeliano y el *cono positivo* $H^+ \subset H$ es tal que

1. $H^+ + H^+ \subseteq H^+$;
2. $H^+ \cap -H^+ = \{0\}$;
3. $H^+ - H^+ = H$.

Sobre un grupo abeliano ordenado existe un orden parcial natural (por 1. y 2.), dado por $x \leq y \iff y - x \in H^+$.

En nuestro caso, sea $\kappa_A : V(A) \to K_0(A)$ la aplicación $\kappa_A([p]) = [p] - [0]$ y $K_0(A)^+ = \kappa_A(V(A))$, que no es en general un cono positivo.

Hay un tipo de C*-álgebras que verifican propiedades especialmente buenas en K-teoría:

Definición 5.3.13. Una C*-álgebra A es una *AF-álgebra* si es límite inductivo de una sucesión creciente de C*-álgebras de dimensión finita.

Observación 5.3.14. Toda C*-álgebra de dimensión finita es isomorfa a una suma de matrices $\mathbb{M}^n_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{M}^n_{k_n}(\mathbb{C})$, para $k_j \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 5.3.15. El álgebra de los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una AF-álgebra, ya que $\mathfrak{K}(\mathcal{H}) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Y se verifica que:

Proposición 5.3.16. *Si A es una C*-álgebra AF, entonces $K_0(A)^+$ tiene cancelaciones y se concluye que $(K_0(A), K_0(A)^+)$ es un grupo ordenado.*

Observación 5.3.17. $(K_0(A), K_0(A)^+)$ preserva sumas directas, límites inductivos, etc.

Proposición 5.3.18. *Toda C*-álgebra AF, A, es separable. Así, $K_0(A)$ es contable y además $K_1(A) = 0$.*

La estructura de orden para los grupos K_0 puede ayudar a distinguir C*-álgebras que la K-teoría analítica K_0 no es capaz de diferenciar:

Ejemplo 5.3.19. Es fácil probar que $K_0(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{Z}^2 \simeq K_0\big(C_0(\mathbb{S}^2)\big)$, con lo que la K-teoría no distingue entre la esfera $\mathbb{S}^2$ y el espacio formado por dos puntos ($\mathbb{C}^2 = C_0(\{a\} \cup \{b\})$). Sin embargo, puede probarse que $K_0(\mathbb{C}^2)^+ = \mathbb{N}^2$ y $K_0\big(C_0(\mathbb{S}^2)\big)^+ = \{(0,0)\} \cup \{(m,n) : m > 0\}$.

De hecho, G. Elliot demuestra (ver [Ell]) que la K-teoría ordenada de las AF-álgebras es un invariante completo, es decir, *dos C*-álgebras AF son isomorfas si y sólo si sus grupos ordenados K_0 lo son.*

6. Algunos ejemplos de aplicación

Hay diferentes trabajos que explican como se utilizan los anteriores conceptos en el estudio de espacios foliados. Por ejemplo, en [Hec] y [Mac] se explica como estas herramientas pueden ayudar a verificar la llamada conjetura de Baum-Connes para espacios foliados, propiedad que permite obtener información sobre la dinámica topológica de la foliación. Otro tipo de aplicaciones, no sólo en espacios foliados, aparecen en [Con].

A continuación, se describe sucintamente un ejemplo en el que estamos aún trabajando (ver [ALM] y [Loz]), y en el que se incorpora la herramienta de la K-teoría ordenada.

Las propiedades del espacio foliado de Gromov-Hausdorff $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ se estudian a través de su espacio de hojas, $X/\mathcal{R}$, donde $X = \overline{L_\infty}$ (L_∞ es la hoja que contiene al árbol repetitivo y aperiódico T_∞) es una transversal total (un Cantor) y $\mathcal{R} = \mathcal{L}|_X$. Se puede demostrar que la relación $\mathcal{R}$, provista de una topología adecuada, *es* el grupoide de holonomía (que es *étale*) de $\mathcal{L}|_X$.

Por la dificultad en la descripción de $X/\mathcal{R}$, su estudio no conmutativo se hace sobre una subrelación maximal y AF de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\infty$: se construye como límite inductivo de subrelaciones finitas encajadas (es AF), abiertas cada una en la siguiente ($\mathcal{R}_\infty$ es *abierta* en $\mathcal{R}$), étales y compactas de $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}_\infty$ es suficientemente grande como para proporcionar una *buena* información sobre $\mathcal{R}$, y al ser una subrelación abierta en $\mathcal{R}$, es $C_c(\mathcal{R}_\infty) \hookrightarrow C_c(\mathcal{R})$. Como la relación $\mathcal{R}_\infty$ es AF, se puede demostrar que su C*-álgebra $C^*(\mathcal{R}_\infty)$ también lo es, es decir, es límite inductivo de álgebras de dimensión finita (ver la definición 5.3.13).

En [Loz] (aquí no se puede describir este proceso pues hay demasiados detalles que concretar) se describe la K-teoría ordenada de la subrelación $\mathcal{R}_\infty$ gracias a las propiedades anteriormente descritas, lo que proporciona información sobre la dinámica topológica del espacio foliado de Gromov-Hausdorff.

Referencias

[ALM] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo y M. Macho Stadler, *Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon*, enviado para publicar.

[Bla] B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **5**, Springer-Verlag, New York, 1986.

[CC] A. Candel y L. Conlon, *Foliations*, Graduate Studies in Mathematics **23**, AMS, 2000.

[Con] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[Ell] G. Elliot, *On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras*, Journal of Algebra **38**, 29–44, 1976.

[H58] A. Haefliger, *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes*, Comm. Math. Helv. **32**, 248–329, 1958.

[H84] A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Astérisque **116**, 70–97, 1984.

[H85] A. Haefliger, *Pseudogroups of local isometries*, Res. Notes in Math. **131**, 174–197, 1985.

[Hec] G. Hector, *Groupoïdes, feuilletages et C*-algèbres (quelques aspects de la conjecture de Baum-Connes)*, Geometric study of foliations (Tokyo, 1993), World Sci. Publ., 3–34, 1994.

[Loz] A. Lozano Rojo, *Dinámica topológica, teoría ergódica y geometría no conmutativa de grafos repetitivos*, Tesis doctoral UPV/EHU.

[Mac] M. Macho Stadler, *La Conjetura de Baum-Connes en la Teoría de Foliaciones*, Rev. Semin. Iberoam. Mat. **2** (IV), 57–85, 1999.

[MRW] P.S. Mulhy, J. Renault y D.P. Williams, *Equivalence and isomorphism for groupoid C*-algebras*, J. Operator Theory **17**, 3–22, 1987.

[R80] J. Renault, *A groupoid approach to C*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics **793**, Springer, 1980.

[R82] J. Renault, *C*-algebras of groupoids and foliations*, Proc. Symposia Pure Maths. **38**, 339–350, 1982.

[Rie] M.A. Rieffel, *Morita equivalence for operator algebras*, Proc. Symposia Pure Maths. **38**, 285–298, 1982.

[Win] H.E. Winkelkemper, *The graph of a foliation*, Ann. Global Analysis and Geometry **3**, 51–75, 1983.

[Weg] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C*-algebras*, Oxford University Press, 1993.

Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Barrio Sarriena s/n
48940 Leioa
e-mail: `marta.macho@ehu.es`

Investigación parcialmente financiada por UPV-EHU 00127.310-E-15916 y EHU 06/05