La Matriz de Leontief

EL PROBLEMA ECONÓMICO DE LAS RELACIONES INTERINDUSTRIALES

El análisis de cuadros de insumo-producto, fue desarrollado por W.W. Leontief en 1936, como el instrumento de interpretación de las interdependencias de los diversos sectores de la economía. Es decir, en el análisis de insumo-producto consideramos cualquier sistema económico como un complejo de industrias mutuamente interrelacionadas. Se considera que toda industria recibe materias primas (insumos) de las demas industrias del sistema y que, a su vez, proporciona su producción a las demás industrias en calidad de materia prima. Fundamentalmente se trata de un análisis general del equilibrio estático de las condiciones tecnológicas de la produccón total de una economía, durante el periodo de tiempo en cuestión.

La Matriz de Transacciones Interindustriales

A grandes rasgos, la economía en su conjunto se divide en el sector productor y en el sector consumidor; el sector productor, a su vez se divide en un gran número de industrias en el cual se supone que cada industria produce un producto homogéneo.

El punto de partida para la elaboración de un análisis de insumo-producto es la formulación de una tabla que contiene partidas que demuestran, ya sea cuantitativamente o en términos de valor, de que manera se distribuye la producción total de una industria a todas las demás industrias en forma de producción intermedia (es decir, como materia prima) y a los usuarios finales no productores.

Veamos un ejemplo:

Compras	Demanda Intermedia			Demanda o	Producción
Ventas	Agricultura	Industria	Servicio	uso Final	Bruta
Agricultura	600	400	1400	600	3000
Industria	1500	800	700	1000	4000
Servicos	900	2800	700	700	2600

Esta es una tabla de transacciones intersectoriales, que muestran como se interrelacionan todas las industrias, en el sentido de que cada una adquiere productos fabricados por las demás a fin de llevar a cabo su propio proceso.

Los sectores de esta tabla son precisamente Agricultura, Industria y Servicios. Estos nombres reflejan un concepto amplio, en el sentido de que dentro del sector servicios se agrupan todas las empresas que prestan algún tipo de servicio, tales como: bancos, transporte de carga, transporte de pasajeros, comercios, servicios profesionales diversos, servicios públicos diversos, etc. Dentro del sector industrial se agrupan todas las empresas que producen bienes, tales como: industria textil, farmacéutica, petroquímica, de energéticos, de alimentos, de bebidas, de plastico, de papel y derivados, etc.. En el sector agricultura se agrupan todas las empresas agrícolas y ganaderas de diversos tipos, tales como: producción de hortalizas, de cereales, de forrajes, de ganado lechero, de ganado lanar, avícola, porcino, etc.,o según otra clasificación más conveniente.

En la primera columna de esta tabla la cifra 600 representa las compras que las empresas del sector agricultura han efectuado a otras empresas del mismo sector, tales como semillas mejoradas, abonos, ganado para engorde, forrajes, etc. La cifra 1500 representa las compras que las empresas del sector agricultura han efectuado al sector industrial, tales como: tuberias, herramientas, fertilizantes químicos, insecticidas, tractores, etc. La cifra 900 representa las compras que las empresas del sector agricultura han efectuadoal sector servicios, tales como: servicios de transporte de carga, servicio de sanidad e inmunización, servicios de asesoría legal, servicios de almacenajes en silos y bodegas, servicios de comercialización, etc.

Análogamente, las cifras de la segunda columna representan las compras que las empresas del sector industrial han efectuado al sector agricultura (400), a otras empresas del mismo sector industrial (800),y al sector de servicios (2800).

La tercera columna se interpreta de la misma manera. Se dice que estas tres columnas representan la demanda intermedia o la utilización intermedia, ya que estas cifras corresponden a los insumos que los sectores adquieren para fabricar otros productos, es decir que corresponden a bienes que no llegan al consumidor final, sino que se utilizan dentro del proceso de producción.

La cuarta columna de esta tabla representa las compras que los consumidores finales efectúan a los sectores de producción, esto es, los bienes que son adquiridos por las familias, por las instituciones estatales y federales y por otros paises para serutilizados en consumo (compra de alimentos, de ropa, de servicios recreativos, de viajes) o en inversión (compra de maquinaria, vehículos, edificios y en general, en bienes de activo fijo). Esta columna recibe la denominación de demanda final o de utilización final, ya que corresponde a bienes que no se utilizan como insumos intermedios para producir otros bienes, sino que satisfacen una necesidad de algún consumidor final.

Conviene subrayar que la columnas nos indican siempre las cantidades compradas por un determinado sector para lograr un nivel de producción específico; es decir que indican el origen o las fuentes de donde ese sector absorve las materias primas, los productos semielaborados y los servicios en la cantidad necesaria para cumplir con su proceso de producción. Otra forma de verlo, es que las columnas indican el volumen de las adquisiciones de bienes y servicios de diversos orígenes, que cooperan en el proceso de producción de un determinado sector.

En cambio, las filas de la matriz nos indican siempre las cantidades vendidas por un sector dado a todos los otros sectores compradores, esto es el destino de la producción.

Mientras que las filas indican cómo se distribuye el volumen de producción de un determinado sector, las columnas indican de donde provienen los insumos de bienes y servicios necesarios para obtener un determinado volumen de producción en un sector específico. De ahí que a esta matriz se le conoce como matriz de insumo-producto o como *modelo input-output*.

En la última columna tenemos el valor bruto de la producción de cada sector, o abreviadamente la producción bruta de cada uno de los sectores. Esas cifras se calculan sumando las ventas que cada sector ha efectuado a cada uno de los sectores de la economía nacional, esto es sumando horizontalmente cada fila de la tabla. De ahí que la producción bruta de cada sector sea igual a la suma de las ventas a demanda intermedia y las ventas a demanda final.

Esta tabla de transacciones intersectoriales se ha construido bajo el supuesto de que los resultados del proceso productivo se expresan en unidades físicas. Bajo este supuesto siempre es posible sumar horizontalmente las filas de la tabla, ya que las cifras de una misma fila, representan las ventas de un mismo sector, destinados a satisfacer necesidades finales y por lo tanto se expresan en la misma unidad de medida.

En cambio no tiene sentido sumar verticalmente (por columna) ya que cada cifra representa una compra efectuada a otro sector de producción y por lo tanto esta expresada en diversas unidades de medidas (toneladas, metros cúbicos, toneles, bolsas, cajas, cuñetes, etc.). Esto implicaría el absurdo de sumar elementos tan disímiles como x toneladas de cereales + y metros de tubos de acero + z horas de trabajo de mano de obra..., etc.

Por ello es que la dimensión en que se expresa los insumos no debe ser física sino monetaria. Las cifras de una tabla de transacciones interindustriales, deben estar expresadas en valores monetarios (dólares, pesos, etc.) para que tengan sentido sumarlas tanto horizontalmente (ventas) como verticalmente (compras).

Esto significa que además de conocer las cantidades físicas intercambiadas entre los sectores, necesitamos disponer de los precios unitarios correspondientes a cada uno de esos bienes, a fin de expresar cada transacción en su valor monetario multiplicando el precio por la cantidad respectiva.

La Planeación de Requerimientos de Producción

*S*upongamos que una oficina de planeación ha determinado el incremento en la demanda final que previsiblemente ocurrirá en el próximo año de actividad y se pregunta ¿ cuál debe ser el valor de la producción bruta de cada sector que se requerirá para que se satisfagan esas necesidades ?

Supongamos que por una razón cualquiera la demanda final del sector agricultura se incrementa en 100 unidades. ¿ Qué efecto producirá este incremento de la demanda final sobre el proceso de producción ?

1. Ocurrirá un incremento de la demanda final.

2. El sector agricultura se vera obligado a incrementar sus compras de productos intermedios, tanto del mismo sector agricultura (semillas, forrajes, etc.) como del sector industrial (maquinaria, abonos químicos, etc.), y servicios (transporte de carga, sanidad, etc.) esto es lo que indica la columna 1.

3. Una cadena de efectos indirectos que se transmiten a las demás columnas de insumos.

En otras palabras, la interdependencia existente entre los sectores de producción da origen a una cadena de reacciones, que cada vez puede ir comprometiendo nuevos sectores, si bien la magnitud de estos efectos va siendo progresivamente más débil. Esa es la esencia del problema: ¿cómo cuantificar no sólo los efectos directos sino también todos los efectos indirectos que se derivan del incremento de la demanda final de un sector determinado? O, planteándolo en otra forma, ¿en que medida tendría que aumentar la producción de todos y cada uno de los sectores de la economía para que pueda tener lugar una expansión de cierta magnitud de un sector determinado?

Resumiendo, el modelo de insumo-producto ilustra la forma en que tiene que modificarse todo el flujo de transacciones interindustriales, y por lo tanto, también los niveles sectoriales de producción bruta, para poder hacer frente a un cambio dado del nivel o de composición de la demanda final, y asimismo proporcionar los instrumentos de cálculo que permiten cuantificar esas modificaciones. En este aspecto el modelo tiene necesariamente que ajustarse a ciertos supuestos básicos. El mas importante de ellos es que una determinada producción requiere proporciones específicas de insumos; en otras palabras, se supone que no ocurrirán cambios que afecten la estructura de producción de los sectores, tales como la sustitución de ciertos insumos por otros diferentes, o cambios en la tecnología de producción (más mecanización, otros productos, etc.).

La Matriz de Coeficientes Técnicos de Insumo-Producto

Vamos a introducir aquí la notación necesaria para simbolizar las relaciones entre producción, demanda final y demanda intermedia, que resultan de la tabla que tenemos como ejemplo.

Con X_i , se simbolizará la producción bruta del sector i, esto es:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 7000 \end{pmatrix}$$

Con y_i se representará la demanda final correspondiente al sector i, esto es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 1000 \\ 2600 \end{pmatrix}$$

Con x_{ij} se representará las ventas que el sector i ha efectuado al sector j, esto es:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 400 & 1400 \\ 1500 & 800 & 700 \\ 900 & 2800 & 700 \end{pmatrix}$$

Como la producción bruta de cada sector es igual a la suma de las ventas o demanda intermedia más las ventas a demanda final, las relaciones entre producción y demanda se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ X_2 &= x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ X_3 &= x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{aligned} \tag{1}$$

o en términos matriciales,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, elaboremos lo que se conoce como la matriz de coeficientes técnicos o matriz de coeficientes de requisitos directos o indirectos por unidad de producción bruta.

Comenzamos diciendo que en cada transacción existen dos sectores: un sector vendedor, que indicamos con el subíndice i y el sector comprador que representamos con el subíndice j. Relacionando cada x_{ij} (ventas del sector i al sector j) con la producción bruta X_j del sector comprador, efectuamos el cociente $\frac{x_{ij}}{X_j}$ que define el coeficiente técnico a_{ij}.

Cada coeficiente a_{ij} representa los requerimientos de insumos del sector i necesarios para producir una unidad del producto j. Sabemos que existe proporcionalidad directa entre la producción bruta del sector j y el volumen total de los insumos que este sector adquiere de los demás sectores proveedores. Es decir, los insumos que venden los sectores proveedores varían en la misma proporción en que se modifica la producción bruta del sector que los adquiere. Entonces, bajo este supuesto, se admite que los coeficientes técnicos a_{ij} son constantes, y por lo tanto se tiene la ecuación lineal $x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$, que indica que las compras que un sector j efectúa a otro sector cualquiera i, se calculan multiplicando la producción bruta de ese sector X_j , por un coeficiente constante, a_{ij}.

Vamos a los cálculos:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{600}{3000} = 0,2 & a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{400}{4000} = 0,1 & a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{1400}{7000} = 0,2 \\ a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{1500}{3000} = 0,5 & a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{800}{4000} = 0,2 & a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{700}{7000} = 0,1 \\ a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{900}{3000} = 0,3 & a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{2800}{4000} = 0,7 & a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{700}{7000} = 0,1 \end{array}$$

Esto significa que:

- para obtener los coeficientes técnicos a_{i1} se divide cada cifra x_{i1} de la primera columna entre el total de la suma de la primera fila (producción bruta del sector 1).

- para obtener los coeficientes técnicos de a_{i2} se divide cada cifra x_{i2} de la segunda columna entre la suma de la segunda fila (producción bruta del sector 2).

- para obtener los coeficientes a_{i3} se divide cada cifra x_{i3} de la tercera columna entre la suma de la tercera fila (producción bruta del sector 3).

De esta forma se tiene la matriz de coeficientes técnicos a_{ij}, siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Regresando al sistema de ecuaciones (1)

$$X_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} + y_i$$

con i=1, 2, 3.

Que se puede escribir matricialmente así;

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

o en forma simbólica,

$$X = A \cdot X + y$$

La Matriz de Leontief y su Inversa

Hemos supuesto que los coeficientes a_{ij} no varian durante un cierto período de tiempo. Ello nos permite utilizar el sistema de ecuaciones,

$$X = AX + y$$

para determinar el nivel de producción bruta que se requiere en cada sector para satisfacer la demanda final prevista para el período siguiente.

En este ejemplo, supongamos que se trata de satisfacer un aumento en la demanda final para el próximo año de actividad de 400 unidades en el sector agricultura, 200 unidades en el sector industrial y 200 unidades en el sector servicios, y se pregunta: ¿ cuáles deben ser los valores X_1, X_2 y X_3 que permitirán satisfacer esos incrementos ?

Este problema se resuelve expresando dicho sistema de ecuaciones como una relación funcional entre producción bruta y demanda final, el vector X es la variable dependiente y el vector y es la variable independiente. Despejando el vector X de la ecuación anterior se obtiene,

$$X = (I - A)^{-1} \cdot y$$

La matriz $(I-A)$ se denomina *matriz de Leontief* y la matriz $(I-A)^{-1}$ se llama *matriz inversa de Leontief*, o matriz de coeficientes de requerimientos directos e indirectos por unidad de demanda final.

En el ejemplo que estamos estudiando, se tiene que;

$$I - A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & -0{,}7 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

y la inversa;

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}83 & 0{,}64 & 0{,}48 \\ 1{,}35 & 1{,}86 & 0{,}50 \\ 1{,}66 & 1{,}66 & 1{,}66 \end{pmatrix}$$

Tomando en cuenta los incrementos previstos en la demanda final, se tiene que satisfacer para el año próximo los niveles

$$y = \begin{pmatrix} 600 \\ 1000 \\ 2600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 2800 \end{pmatrix}$$

que sustituidos en la ecuación:

$$X = (I - A) - 1 \cdot y$$

permite obtener los siguientes niveles estimados:

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}83 & 0{,}64 & 0{,}48 \\ 1{,}35 & 1{,}86 & 0{,}50 \\ 1{,}66 & 1{,}66 & 1{,}66 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 2800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3958 \\ 5014 \\ 8330 \end{pmatrix}$$

lo que significa que para satisfacer la demanda final prevista de 1000 unidades de productos del sector agricultura, 1200 unidades del sector productos industriales y 2800 unidades de servicios, se debe generar una producción bruta de 3959 unidades en el sector agricultura, 5014 unidades en el sector industrial y 8330 unidades en el sector servicios.

Comparando este vector $X = \begin{pmatrix} 3958 \\ 5014 \\ 8330 \end{pmatrix}$ con el anterior $X_a = \begin{pmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 7000 \end{pmatrix}$

se obtienen las cifras del incremento de producción de cada sector, necesarios para satisfacer el incremento previsto en la demanda final:

$$\Delta X = X - X_a = \begin{pmatrix} 3958 \\ 5014 \\ 8330 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 7000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 959 \\ 1014 \\ 1330 \end{pmatrix}$$

Esto significa que para satisfacer los incrementos previstos de demanda final sectorial de:

$$\Delta y = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

se debe generar en el sistema de producción los siguientes incrementos de producción bruta:

$$\Delta X = \begin{pmatrix} 959 \\ 1014 \\ 1330 \end{pmatrix}$$

Es importante notar la falta de proporcionalidad entre el incremento de demanda final Δy y el incremento de producción bruta ΔX correspondiente a ese mismo sector. Esto se debe a la complejidad de las interrelaciones entre sectores, que determinan efectos indirectos relativamente importantes.

Veamos otro ejemplo;

	Insumos		Demanda Final	X_i
	Agricultura	Industria		
Agricultura	3.5	7.5	59.0	70.0
Industria	10.5	3.0	16.5	30.0
Valor Factores	56.0	19.5		
X_j	70.0	30.0		

La matriz de coeficientes técnicos de producción es;

$$\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}25 \\ 0{,}15 & 0{,}10 \end{pmatrix}$$

encontremos I-A,

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}25 \\ 0{,}15 & 0{,}10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}25 \\ -0{,}15 & 0{,}90 \end{pmatrix}$$

de aquí podemos calcular $(I - A)^{-1}$

$$(I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1{,}101 & 0{,}306 \\ 0{,}183 & 1{,}162 \end{pmatrix}$$

Ahora supongamos que queremos un incremento en la demanda final de 11 millones de unidades en el sector agricultura y 0 unidades en el sector industria, luego;

$$y = \begin{pmatrix} 59 \\ 16{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 16{,}5 \end{pmatrix}$$

si sustituimos en la ecuación:

$X = (I - A)^{-1} \cdot y$

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}101 & 0{,}306 \\ 0{,}183 & 1{,}162 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 16{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82{,}12 \\ 31{,}98 \end{pmatrix}$$

lo que significa que para satisfacer la demanda final prevista de 70 unidades del sector agricultura y 16,5 unidades del sector industria, se debe generar una producción bruta de 82,12 unidades del sector agricultura y 31,98 unidades en el sector industrial.

Comparando este vector $X = \begin{pmatrix} 82{,}12 \\ 31{,}98 \end{pmatrix}$, con el anterior $X_a = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix}$,

se obtienen las cifras del aumento de producción de cada sector necesario para satisfacer el incremento previsto en la demanda final.

$$\Delta X = X - X_a = \begin{pmatrix} 82{,}12 \\ 31{,}98 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}12 \\ 1{,}98 \end{pmatrix}$$

Al ser comparados con las cifras iniciales estos resultados revelan que un aumento de 11 unidades en la demanda de bienes agrícolas implica:

- un aumento de 12,12 unidades de producción total agrícola,
- un aumento de 1,98 unidades de la producción total industrial.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea la tabla de relaciones intersectoriales siguiente:

Sector Productor	SECTOR COMPRADOR			Uso	Uso
	Agricultura	Industria	Servicios	Final	Total
Agricultura	11	19	1	10	41
Industria	5	89	40	106	240
Servicios	5	37	37	106	185
Insumos Primarios	20	95	107	21	243
Producción Total	41	240	185	243	659

1. Hacer un comentario global sobre las diferentes relaciones intersectoriales de la tabla.

2. Hallar la matriz de coeficientes técnicos de producción.

3. Si cambiamos la demanda de uso final por Agricultura 25, Industria 201 y Servicios 145 unidades. Encontrar la producción total para esa demanda.

4. Lo mismo que lo anterior para los datos: 30, 150 y 125 de Agricultura, Industria y Servicios respectivamente. Las condiciones tecnológicas son similares a las del ejemplo anterior.

2. Suponga que una economía consta de dos industrias A y B solamente, y que su matriz de transacciones para el año 2500 antes de Cristo es la siguiente (las cifras se dan en piedradólares).

De acuerdo a esta tabla:

	Industrias		Demanda	Producción
	A	B	Final	Total
A	20	15	45	80
B	15	15	10	40
Insumo Primario	35	10	5	40

1. Encuentre la matriz de coeficientes técnicos de está economía. Suponga que se desea un desarrollo de tal naturaleza que se eleven los niveles de demanda final;

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

2. Suponiendo que la oferta de trabajo es abundante, determine a que niveles de producción se deben elevar A y B de manera que satisfagan los niveles de demanda.

SOLUCION A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Respuesta a la pregunta 1

1.- De la matriz insumo-producto observamos:

1.1 El sector agrícola compra a su mismo sector 11 mil millones de dólares, al sector industrial le compro 5 mil millones de dólares, y al sector servicio le compro 5 mil millones.

1.2 El sector servicio le compro a la agricultura 1 mil millones de dólares, al sector industrial le compro insumos por un valor de 40 mil millones y se compro a si mismo 37 mil millones de dólares en insumos.

1.3 Por otra parte el sector industrial vendió al sector agricultura 5 mil millones de dólares, lo cual concuerda con lo expresado en el punto 1.1 , y también le vendió a su mismo sector 89 mil millones, finalmente le vendió al sector servicios 40 mil millones de dólares. Parte de la producción del sector industrial fue directamente al consumidor por un valor de 106 mil millones de dólares.

1.4 La producción total del sector industrial del año que se trata fue de 240 mil millones de dólares.

Y así con los otros sectores.

2.-

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}268 & 0{,}079 & 0{,}005 \\ 0{,}122 & 0{,}371 & 0{,}216 \\ 0{,}122 & 0{,}154 & 0{,}200 \end{pmatrix}$$

3.- $y_n = \begin{pmatrix} 25 \\ 201 \\ 145 \end{pmatrix}$, y como $X = (I - A)^{-1} \cdot y$

Matriz de coeficientes técnicos de producción de la tabla.

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}268 & 0{,}079 & 0{,}005 \\ 0{,}122 & 0{,}371 & 0{,}216 \\ 0{,}122 & 0{,}154 & 0{,}200 \end{pmatrix}$$

y,

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}409 & 0{,}192 & 0{,}062 \\ 0{,}372 & 1{,}753 & 0{,}476 \\ 0{,}286 & 0{,}367 & 1{,}351 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}409 & 0{,}192 & 0{,}062 \\ 0{,}372 & 1{,}753 & 0{,}476 \\ 0{,}286 & 0{,}367 & 1{,}351 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 201 \\ 145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82{,}8 \\ 430{,}7 \\ 276{,}7 \end{pmatrix}$$

comparando este nuevo vector

$X_n = \begin{pmatrix} 82{,}8 \\ 430{,}7 \\ 276{,}7 \end{pmatrix}$, con el anterior $X_a = \begin{pmatrix} 41 \\ 240 \\ 185 \end{pmatrix}$

$$\Delta X = X_n - X_a = \begin{pmatrix} 41{,}8 \\ 190{,}7 \\ 91{,}7 \end{pmatrix}$$

nos da el resultado de la producción

que debe darse si aumenta la demanda $\Delta y = \begin{pmatrix} 15 \\ 95 \\ 39 \end{pmatrix}$.

Como comentario final tenemos: un aumento de 15 mil millones en agricultura, 95 en la industria y 39 mil millones en servicios implica un aumento de 41,8 mil millones en el sector agrícola; 190,7 en el sector industrial y 91,7 en el sector servicios.

4.- En resumen;

$$X_n = \begin{pmatrix} 1{,}409 & 0{,}192 & 0{,}062 \\ 0{,}372 & 1{,}753 & 0{,}476 \\ 0{,}286 & 0{,}367 & 1{,}351 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 150 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78{,}82 \\ 333{,}61 \\ 232{,}50 \end{pmatrix}$$

esto nos da la nueva producción debido al aumento en la demanda final y se sigue el mismo procedimiento.

Respuesta a la pregunta 2

2.1- Matriz de coeficientes técnicos de producción

$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 3/16 & 3/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}375 \\ 0{,}1875 & 0{,}375 \end{pmatrix}$, hallemos I-A.

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}375 \\ 0{,}1875 & 0{,}375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/8 \\ -3/16 & 5/8 \end{pmatrix}$$

encontrando que, $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 80/51 & 16/17 \\ 8/17 & 32/17 \end{pmatrix}$.

Aplicando la fórmula; $X = (I - A)^{-1} \cdot y$

$$X = \begin{pmatrix} 80/51 & 16/17 \\ 8/17 & 32/17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106{,}7 \\ 79{,}9 \end{pmatrix}$$

$$\Delta X = X_n - X_a = \begin{pmatrix} 106{,}7 \\ 79{,}9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26{,}7 \\ 39{,}9 \end{pmatrix}.$$

2.2- $\Delta y = y_n - y_a = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$.

COMENTARIO FINAL

El modelo insumo-producto tiene como ventaja principal la de obligar al planificador o programador a considerar explícitamente el problema de la interdependencia entre los sectores productivos. Esta relación de compra y venta entre sectores queda palmariamente graficada en la tabla de insumo-producto.

Otros posibles usos del modelo insumo-producto es:

- cálculo de los efectos de los cambios de la producción generados por los cambios en la composición de la demanda al aumentar los niveles de ingresos y educación;
- incidencia de las alzas de salarios, impuestos indirectos o importaciones, sobre el nivel de precios;
- estudio de las repercusiones totales de inversiones, tanto sobre la producción de los distintos sectores como sobre los ingresos o importaciones.

Por último, resumiremos algunas de los inconvenientes:

- dificultades practicas que origina su construcción;
- convenciones necesarias para ubicar algunos sectores;
- dificultad de establecer coeficientes técnicos por la razón anterior;
- los cuadros no proporcionan una representación precisa de los hechos, pues resultan de múltiples simplificaciones más o menos burdas;
- se asume que los coeficientes técnicos son constante, y no se considera la posibilidad de cambios que afecten dichos coeficientes.

Bibliografía

[1] Ayres, Frank. Teoría y Problemas de Matrices. Serie Schaum, Editorial McGraw-Hill,Mexico. 1978.

[2] Bardell, Ross. Algebra Superior. Editorial CECSA, México. 1974.

[3] Britton, Jack. Matemáticas Universitarias. Tomo II. Editorial CECSA, México, 1970.

[4] Fernández, Celia. Algebra Lineal: Teoría y Problemas. Universidad de la Habana, Facultad de Economía, Departamento de Matemática. La Habana, Cuba. 1981.

[5] Howard, Taylor. Matemáticas Básicas; con Vectores y Matrices. Editorial Limusa, México. 1980.

[6] Huang, David. Introducción al Uso de la Matemática en el Análisis Económico. Editorial Limusa. 1980.

[7] Kleiman, Ariel. Matrices; Aplicaciones Matemáticas en Economía y Administración. Editorial Limusa, México. 1987.

[8] Kovacic, Michael. Matemática: aplicaciones a las Ciencias Económicas y Administrativas. Fondo Educativo Interamericano S.A., México. 1977.

[9] Schiefelbein, Ernesto. Teoría, Técnicas, Procesos y Casos en el Planeamiento de la Educación. Editorial Ateneo, Buenos Aires, Argentina. 1974.

[10] Yamane, Taro. Matemática para Economistas. Editorial Ariel, Barcelona, España. 1965.