ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

FISIKA KUANTIKA

4 Gaia

Momentu angeluarraren autofuntzioak eta autobalioak

1. Lor bitez $Y_2^{\pm 2}(\theta, \phi)$ eta $Y_2^{\pm 1}(\theta, \phi)$ harmoniko esferikoen adierazpenak.

2.

- (a) Adieraz bitez $Y_1^1(\theta, \phi)$, $Y_1^0(\theta, \phi)$ eta $Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ harmoniko esferikoak, koordenatu kartesiarretan.
- (b) Adieraz bitez $Y_2^{\pm 2}(\theta, \phi)$, $Y_2^{\pm 1}(\theta, \phi)$ eta $Y_2^0(\theta, \phi)$ harmoniko esferikoak, koordenatu kartesiarretan.

3.

- (a) Froga bedi $\hat{L}_x$ eta $\hat{L}_y$ eragileen itxarotako balioak nuluak direla, harmoniko esferiko guztietarako.
- (b) Kalkula bitez, harmoniko esferikoen bidez adierazitako egoeren kasuan, momentu angeluarraren x eta y osagaien batezbesteko desbidazio kuadratikoen bigarren errodurak.

4. Zenbat balio du $(Y_{l'}^{m'}, [\hat{L}_+, \hat{L}_-]Y_l^m)$?

5. Eragile bat momentu angeluarraren edozein bi osagairekin trukakorra izanez gero, froga ezazu hirugarren osagaiarekin trukakorra izango dela ere.

6. Kalkula itzazu $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ eta $\hat{L}_z$ eragileen aldibereko autofuntzio ($\psi(\mathbf{r})$) guztien adierazpenak.

7. Demagun elektroi baten egoerak $\{\phi_x = xf(r), \phi_y = yf(r)\}$ oinarrian adieraz daitezkela, non uhin-funtzio hauek $\hat{L}_x$ eta $\hat{L}_y$ eragileen autofuntzioak diren, hurrenez hurren.

- Zeintzuk dira egoera hauei dagozkien behagarri hauen autobalioak?
- $\hat{\mathbf{u}}$ norabidea OXY planoan dago eta α angelua osotzen du OX ardatzarekiko. Goiko oinarria erabiliz, adieraz ezazu norabide honekiko momentu angeluarraren proiekzioaren ($\hat{L}_u$) autobalio berdina duen autofuntzioa.

8. Partikula aske baten gainean $\hat{L}^2$ eta $\hat{L}_z$ behagarriak neurtzerakoan $l = 1$ eta $m = 1$ balioak lortzen ditugu. Gero, $\hat{L}_y$ neurtzen dugu. Zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta hauen probabilitateak?

9. Sistema baten Hamiltondarra ondorengoa da:

$$\hat{H} = \alpha \hat{L}_x^6,$$

non α konstante bat den. Hasieran ($t = 0$), sistemaren egoera ondorengo uhin-funtzioaren bidez adierazten dugu:

$$\psi(t = 0) = \sqrt{1/4}\ Y_1^1(\theta, \phi) + \sqrt{1/2}\ Y_1^0(\theta, \phi) + \sqrt{1/4}\ Y_1^{-1}(\theta, \phi).$$

Aurreko Hamiltondarraren eraginpean dagoelarik, kalkula ezazu hasierako aldiunean sistemak duen $\hat{L}_x$ behagarriaren batezbestekoa, $< \hat{L}_x > (t = 0)$. Aldatzen al da balio hau denboran zehar? ψ uhin-funtzioa egoera geldikorra al da?

10. Sistema baten momentu angeluarra (zehatza) $\sqrt{2}\hbar$ da. Sistema honek momentu kuadrupolar elektrikoa du eta kanpoko eremu elektrikoaren

gradientearekin duen elkarrekintza ondorengo Hamiltondarraren bidez adierazten dugu:

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2\right),$$

non ω_0 konstante bat den, eta $\hat{L}_u$ eta $\hat{L}_v$ XOZ planoan dauden OX eta OZ norabideekiko 45^0-ko angelua osotzen duten $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{2}$ eta $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{2}$ norabideetan sistemaren momentu angeluar osoak ($\mathbf{L}$) dituen proiekzioak diren.

Goiko Hamiltondarra kontutan harturik, zergatik ezin da aldatu sistemaren momentu angeluarraren balioa?

Hasieran ($t = 0$), sistemaren egoera ondorengo uhin-funtzioren bidez adierazten dugu:

$$\psi(t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[Y_1^1(\theta, \phi) - Y_l^{-1}(\theta, \phi)].$$

Aurreko Hamiltondarraren eraginpean dagoelarik, kalkula ezazu sistemaren $\hat{L}_x$ behagarriaren batezbestekoari dagokion denboraren garapena, $< \hat{L}_x > (t)$.

11. Partikula aske baten gainean $\hat{L}^2$ eta $\hat{L}_z$ behagarriak neurtzerakoan $l = 1$ eta $m = 1$ balioak lortzen ditugu. Gero, $\hat{L}_y$ neurtzen dugu. Zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta hauen probabilitateak?

12. Partikula aske baten gainean $\hat{L}^2$ eta $\hat{L}_y$ behagarriak neurtzerakoan $2\hbar^2$ eta $\hbar$ balioak lortzen ditugu, hurrenez hurren. Zein da egoera honen adierazpena $\{Y_1^1, Y_1^0, Y_1^{-1}\}$ oinarrian adierazita. Egoera honetan egonik, $\hat{L}_x$ neurtzean zein da $\hbar$ balioa lortzeko probabilitatea?

13. Sistema baten momentu angeluarra $\sqrt{2}\hbar$ da, eta posibleak dituen egoeren azpi-espazioaren oinarria hiru uhin-funtzioez osotzen da: ϕ_{+1}, ϕ_0 eta ϕ_{-1} ($\hat{L}^2$ eta $\hat{L}_z$ eragileen autofuntzioak direnak). Beraz, sistemaren edozein egoera hauen konbinazio lineala dugu:

$$\phi = \alpha\phi_{+1} + \beta\phi_0 + \gamma\phi_{-1},$$

non α, β eta γ hiru zenbaki konplexuak diren. Egoera honetan egonik, kalkula ezazu $< \hat{\mathbf{L}} > \alpha, \beta$ eta γ konstanteen funtzioan. Kalkula ezazu ere

$< \hat{L_x^2} >, < \hat{L_y^2} >$ eta $< \hat{L_z^2} >$.

14. Elektroi baten uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4}(e^{i\phi} \sin\theta + \cos\theta)R(r),$$

non $R(r)$ beheko normalizazio-baldintza betetzen duen edozein funtzioa den:

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = 1$$

$\hat{L}x$ neurtzen badugu, zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta hauen probabilitateak?

15. Elektroi baten uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-2r}}{r^2}(x + r).$$

Egoera horretan egonik L_x^{23} neurtzen dugu, zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta hauen probabilitateak?

16. Elektroi bat $l > 2$ momentu angeluarra duen zenbaki kuantikoaren azpiespazioan dago, uhin-funtzioa ondorengoa izanik,

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(Y_l^l + 2iY_l^{l-1} - Y_l^{l-2}\right),$$

non α konstante positiboa den. Kalkula ezazu L_x osagaiaren ziurgabetasuna, ΔL_x.

17. Elektroi baten uhin-funtzioa ondorengoa izanik:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\left(x + y + 2z + r\right),$$

non α konstante positiboa den, zein da elektroiaren L_x osagaia neurtzean 0 lortzeko probabilitatea?

18. Elektroi baten uhin-funtzioa ondorengoa da:

$$\psi(\mathbf{r}) = Axy\frac{e^{-\alpha r}}{r^3},$$

non $\alpha > 0$ den eta A uhin-funtzioa normalizatzeko behar den konstantea (ez duzue A kalkulatu behar). Egoera honetan egonik, zenbat balio du $< \hat{L}_x >$?