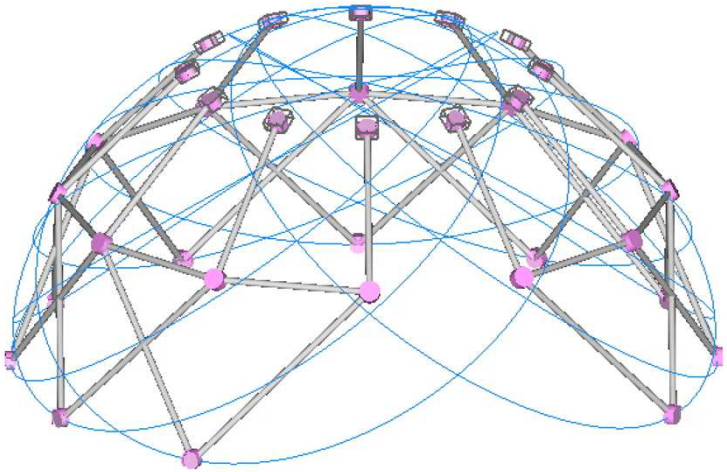
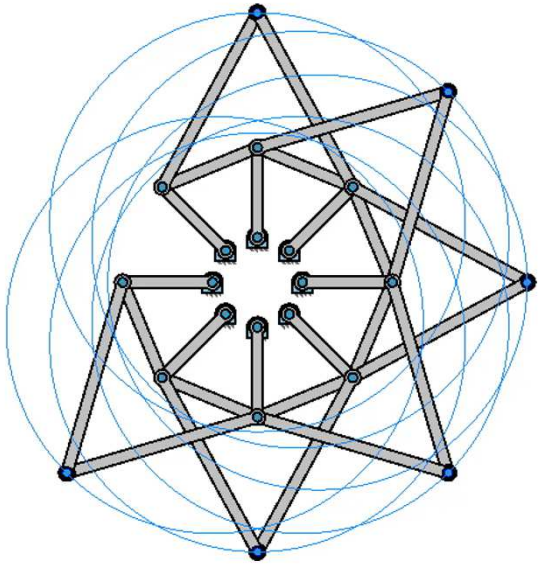
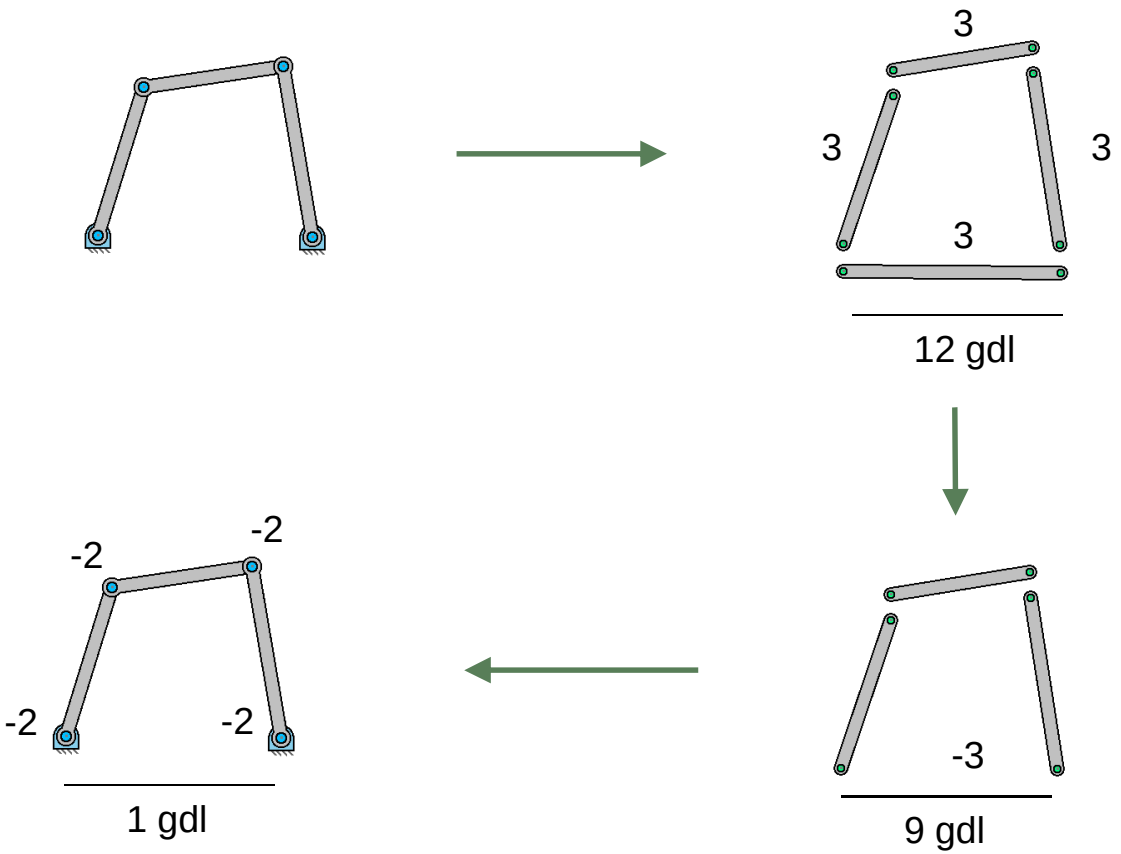
Mecanismos:
Geometría y Movimiento

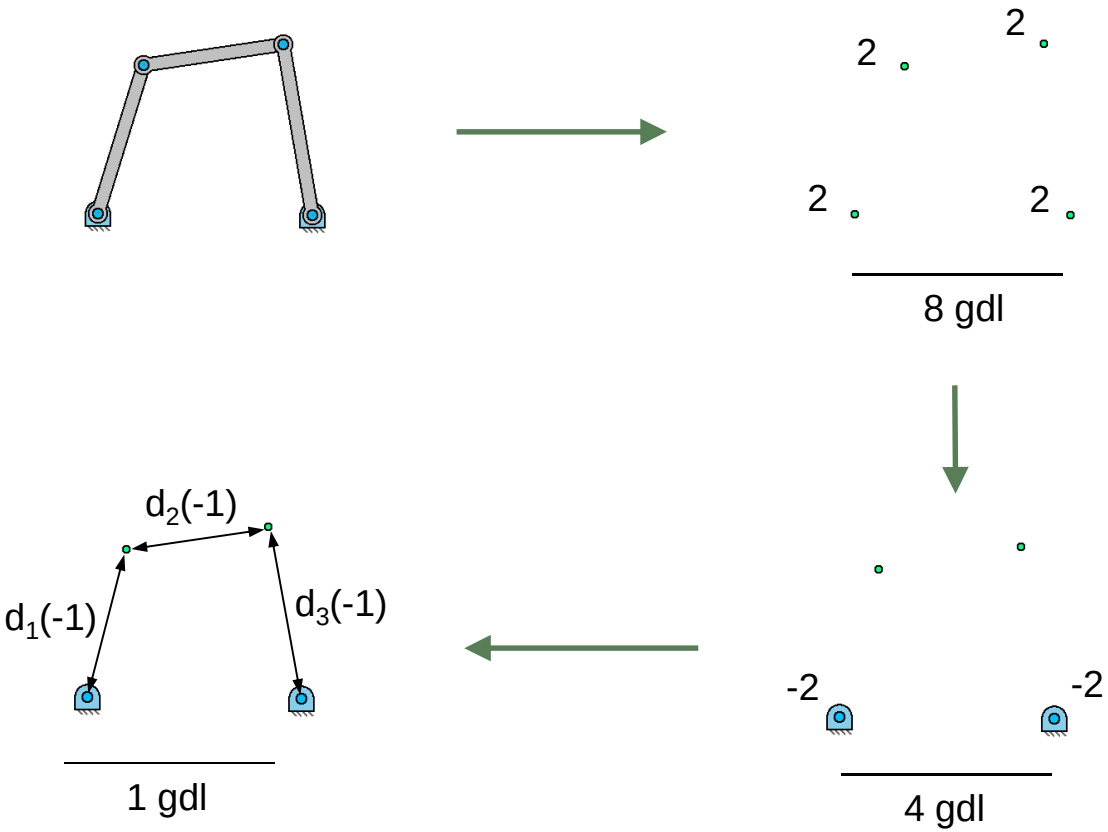




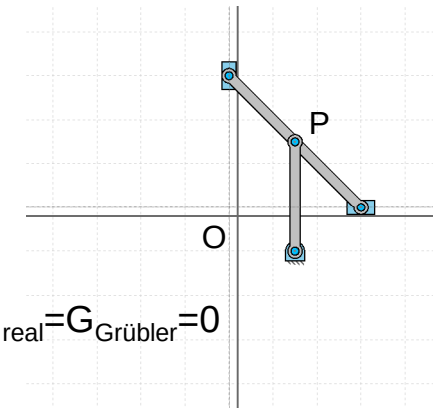
GRÜBLER caso plano: $G = 3(N - 1) - 2P_I - P_{II}$



MECANISMO COMO UN CONJUNTO DE RESTRICCIONES GEOMÉTRICAS

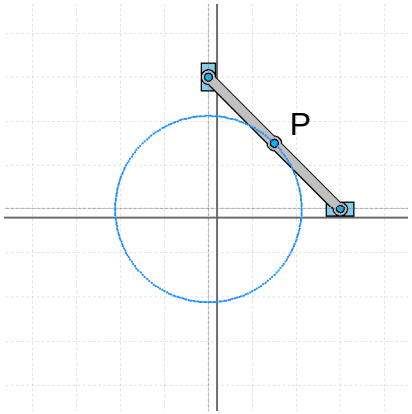


RESTRICCIONES REDUNDANTES

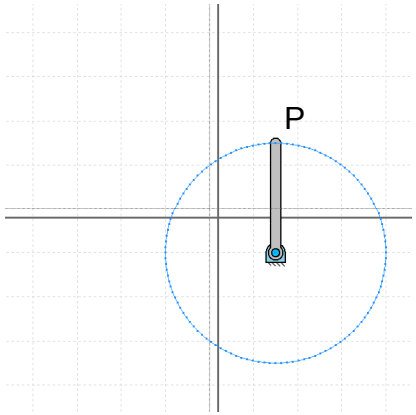


$G_{real}=G_{Grübler}=0$

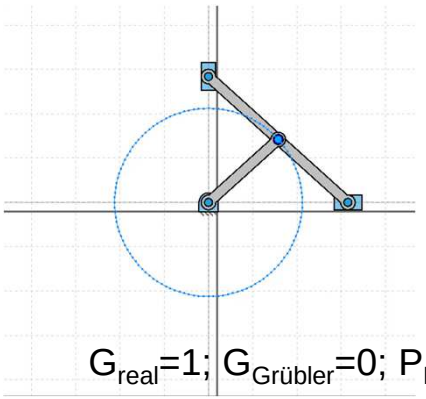
=



+



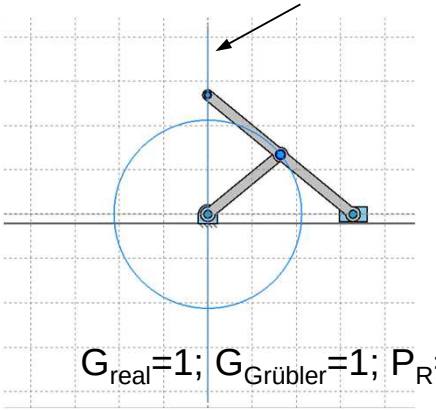
$G=3(5-1)-2\cdot 6=0$



$G_{real}=1;\ G_{Grübler}=0;\ P_R=1$

Idea de diseño

Guiado recto



$G_{real}=1;\ G_{Grübler}=1;\ P_R=0$

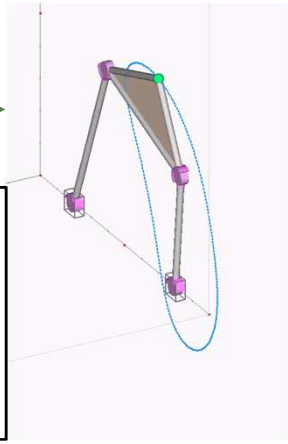
$G_{real}= G_{Grübler}+ P_R$

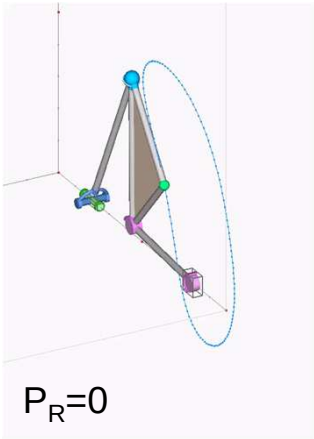
RESTRICCIONES REDUNDANTES: MECANISMOS PLANOS

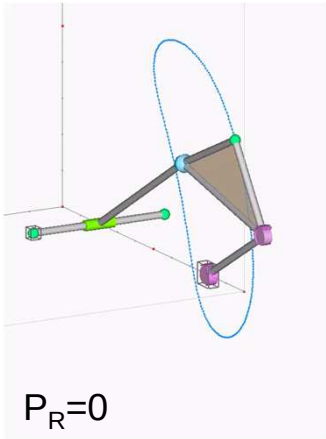
$G_{Grübler} = 6(5-1)-5\cdot 4=-2$

$G_{real}=1$

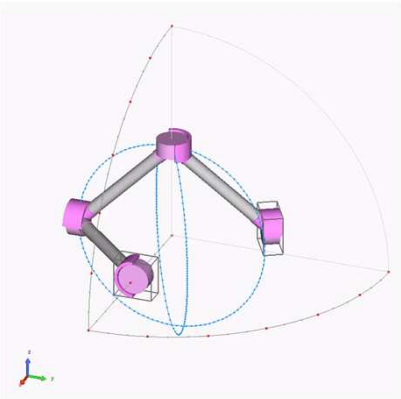
$P_R=3$

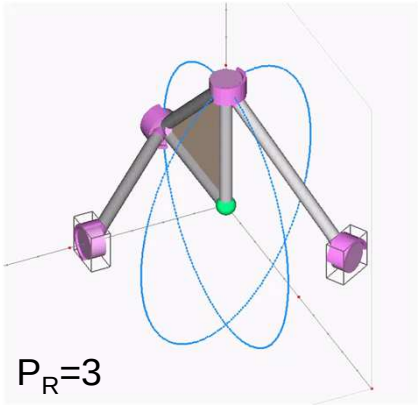


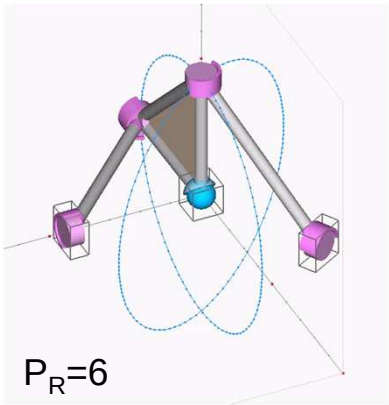


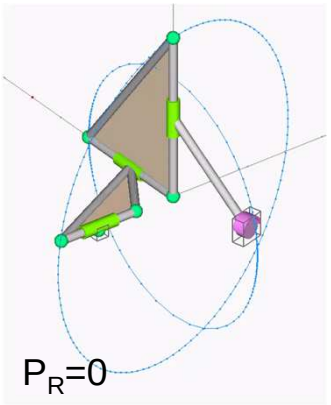


RESTRICCIONES REDUNDANTES: MECANISMOS ESFÉRICOS

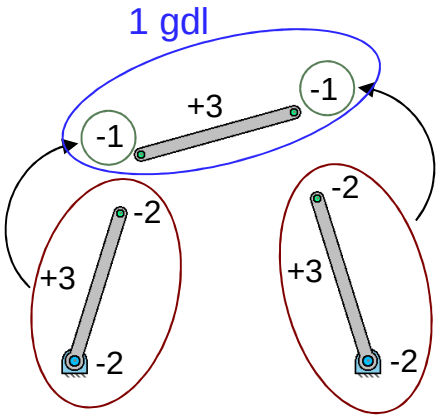








GDLs de un elemento (ACOPLADOR o PLATAFORMA MÓVIL)

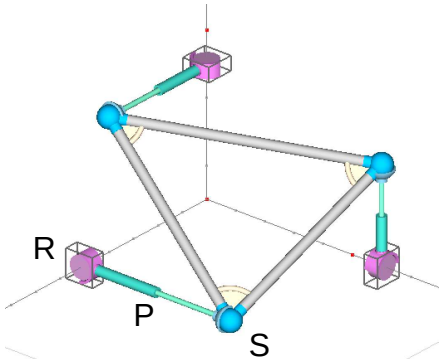


Fórmula para robots paralelos

$$G = G_p - \sum_{i=1}^{p} C_i + PR - GI$$

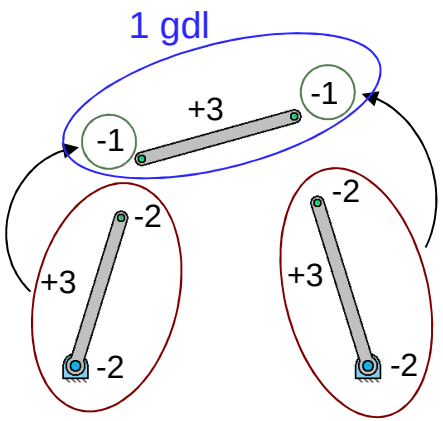
Nº patas de la plataforma: p
Nº de elementos de la pata i: n_i
Clase de los pares de la pata i: $P_I^i, P_{II}^i, P_{III}^i, ..$
GDL inoperantes de la pata i: gi_i
Restricciones redundantes en la pata i: pr_i
Restric. que impone la pata i a la plataf. móvil:
$C_i = (5P_I^i + 4P_{II}^i + 3P_{III}^i + 2P_{IV}^i + P_V^i - pr_i) - (6n_i - gi_i)$
Gdls de la plataforma móvil libre: G_p
Restric. redund. en el conjunto del robot: PR
Gdls inoperantes del conjunto del robot: GI

Manipulador Paralelo 3-RPS

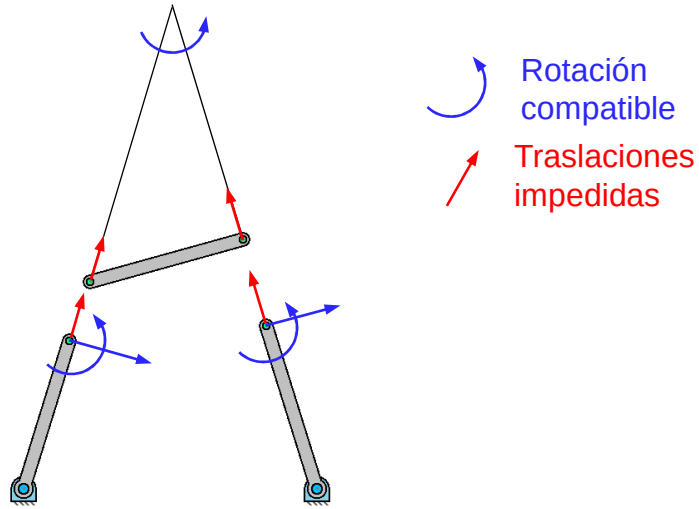


$G = G_P - 3((2P_I + P_{III}) - (6n_i))$
$G = 6 - 3((2 \cdot 5 + 3) - (6 \cdot 2)) = 3$

PATRÓN DE MOVIMIENTO DE LA PLATAFORMA MÓVIL

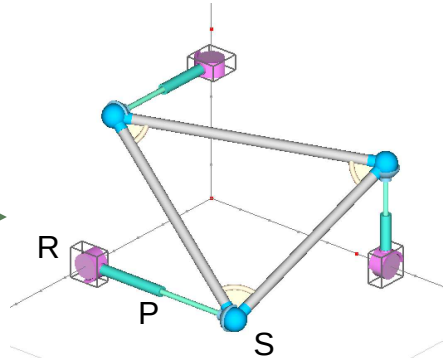


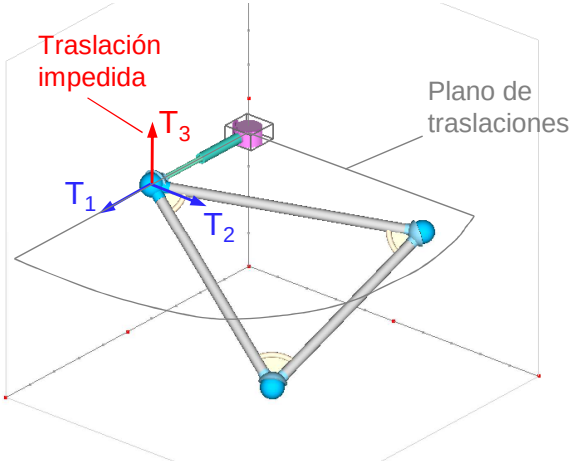
Patrón de movimiento: 1R



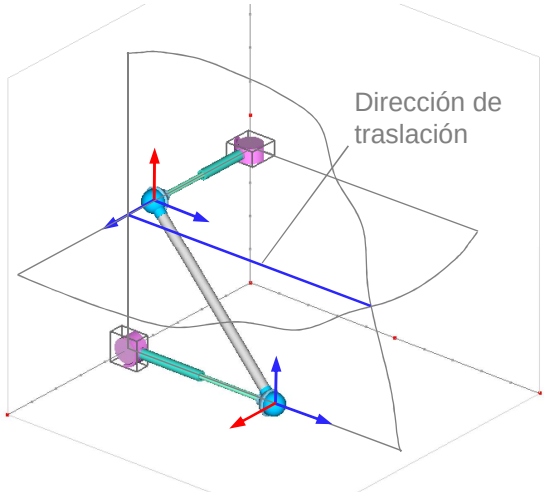
El patrón de movimiento es instantáneo; en general, depende de la posición

PATRÓN DE MOVIMIENTO DE LA PLATAFORMA MÓVIL del MP 3-RPS

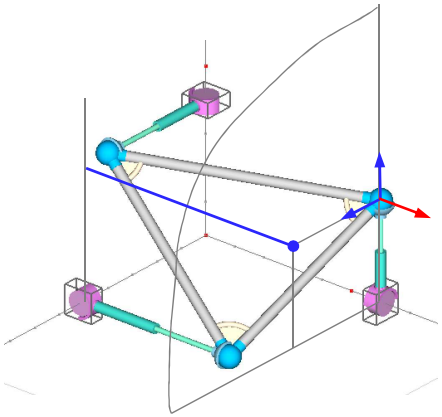




Patrón de Movimiento Plat. Móv: 2T3R

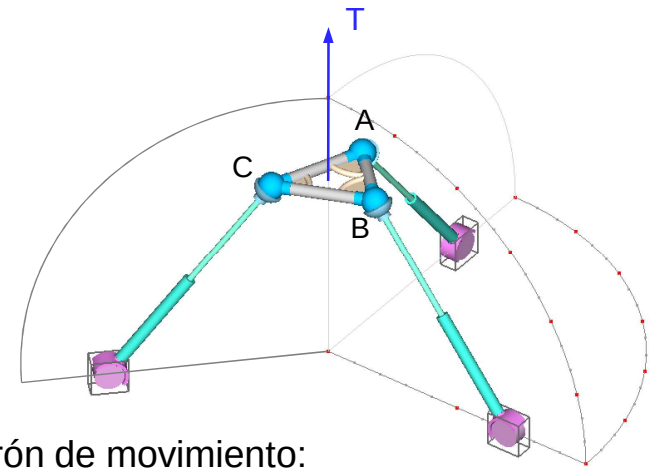


Patrón de Movimiento Plat. Móv: 1T3R



Patrón de Movimiento Plat. Móv: 0T3R

PATRÓN DE MOVIMIENTO: otra arquitectura del MP 3-RPS



Patrón de movimiento:
pasa de 0T3R a **1T2R**

Gana 1T pierde 1R

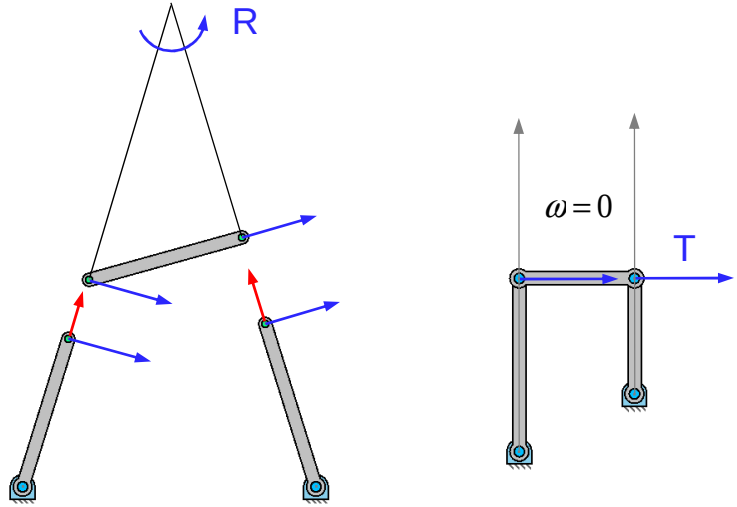
Plano de rotaciones de la P.M.
en cualquier posición :

$$(z_C - z_B)\omega_x + (z_C - z_A)\omega_y + (x_B - y_A)\omega_z = 0$$

Con la plataforma horizontal:

ω_z=0 (Plano Htal)

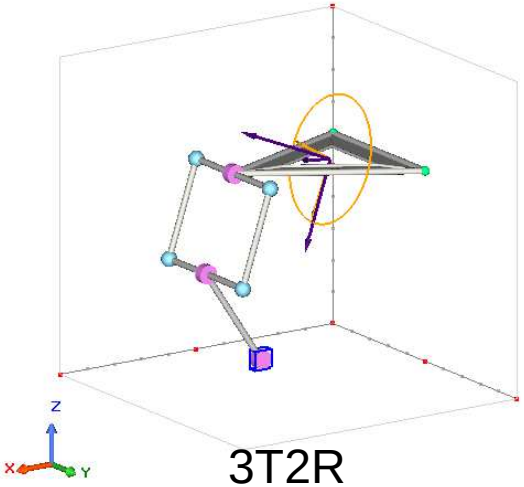
Concepto equivalente en el CA



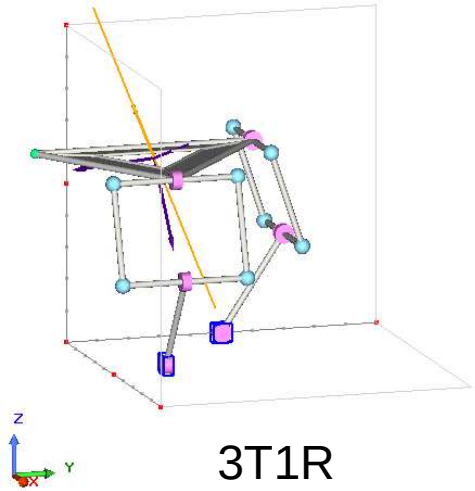
Patrón de movimiento:
pasa de 1R a **1T**

Gana 1T pierde 1R

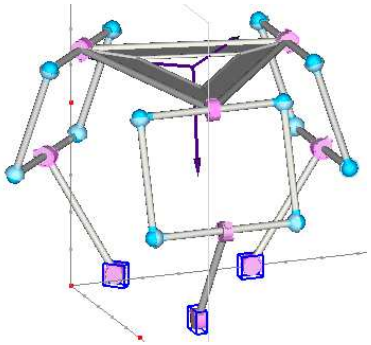
PATRÓN DE MOVIMIENTO DEL ROBOT DELTA



3T2R

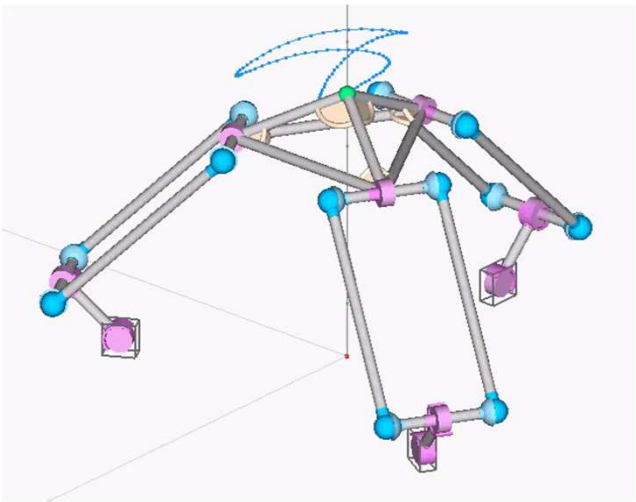


3T1R



3T0R

MP de TRASLACIÓN



R. Clavel. Proc. 18th Int. Symp. Industrial Robots (1988)

MÉTODO PARA OBTENER EL PATRÓN DE MOVIMIENTO DE LA PLATAFORMA MÓVIL

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}$	Ecuación de velocidades
$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix}$	Estado de velocidad de la plataforma móvil
$\boldsymbol{v} = \left[v_x, v_y, v_z\right]^T$	Velocidad de un punto de la plataforma móvil
$\boldsymbol{\omega} = \left[\omega_x, \omega_y, \omega_z\right]^T$	Velocidad angular de la plataforma móvil
$\dot{\boldsymbol{q}}$	Velocidades de entrada del manipulador ($n \leq 6$)
$\boldsymbol{J}$	Matriz Jacobiana (6xn)
$n = rank(\boldsymbol{J})$	Para una postura ordinaria (no singular) del manipulador

Altuzarra, O.; San Martín, Y.; Amezua, E.; Hernández, A. Robotics & CIM, 25 (2009)

MÉTODO PARA OBTENER EL PATRÓN DE MOVIMIENTO DE LA PLATAFORMA MÓVIL

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_T \\ \boldsymbol{J}_R \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

→ $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J}_R \dot{\boldsymbol{q}}$ → Análisis del subespacio de $\boldsymbol{\omega}$: SVD o valores y vectores propios de $\boldsymbol{J}_R$ →

- Una base de la imagen de $\boldsymbol{J}_R$ es una base de las $\boldsymbol{\omega}$: *dim*: $n_R = rank(\boldsymbol{J}_R)$

$$\lambda_{r_i} \neq 0, \dot{\boldsymbol{q}}_{r_i} \rightarrow \boldsymbol{J}_R \dot{\boldsymbol{q}}_{r_i} = \lambda_{r_i} \dot{\boldsymbol{q}}_{r_i} = \boldsymbol{\omega}_{r_i}$$

- Una base del núcleo (subespacio nulo de $\boldsymbol{J}_R$): *dim*: $n_T = n - n_R$

$$\lambda_{t_i} = 0, \dot{\boldsymbol{q}}_{t_i} \rightarrow \boldsymbol{J}_R \dot{\boldsymbol{q}}_{t_i} = \lambda_{t_i} \dot{\boldsymbol{q}}_{t_i} = 0 \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_{t_i} = 0 = \boldsymbol{\omega}$$

→ Cond. traslación

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}_T \dot{\boldsymbol{q}} \rightarrow \boldsymbol{v}_{t_i} = \boldsymbol{J}_T \dot{\boldsymbol{q}}_{t_i} \rightarrow \boldsymbol{v}_{t_i}$$ (direcs. de traslación)

Altuzarra, O.; Salgado, O.; Pinto, Ch.; Hernández, A. Mechanism and Machine Theory, 60 (2013)

El Patrón de movimiento es una característica instantánea

Diseño de MP: deseable patrón de movimiento constante

¿Por qué?

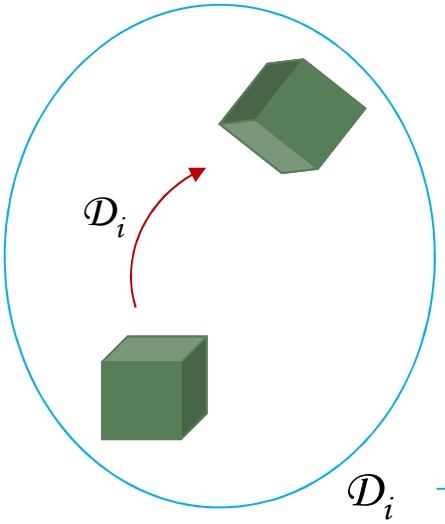
Robots de movilidad reducida y ajustada a requisitos cinemáticos

Cinemática más sencilla

Planificación de trayectorias más sencilla (interpolación)

Control más sencillo

Conjunto de los desplazamientos de sólido rígido $\{\mathcal{D}\}$



Representación matemática

Matriz de transformación homogénea

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Preserva la métrica euclidiana

T_i

Concatenación de desplazamientos

Operación binaria $*$:
$\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 \in \{\mathcal{D}\}$

Producto de matrices

$\mathrm{T}_1 \ \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_3 \in SE(3)$

Estructura algebraica de GRUPO

Propiedades:

- Operación interna
- Asociativa
- Elemento neutro
- Elemento inverso

Dentro de $\{\mathcal{D}\}$ hay 12 subconjuntos con estructura de grupo. Cada uno con su propio patrón de movimiento

Subgrupo de las traslaciones en el espacio de dimensión 3: $\{\mathcal{T}_3\}$

$$\boldsymbol{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Operación interna

$$\boldsymbol{T}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_x \\ 0 & 1 & 0 & l_y \\ 0 & 0 & 1 & l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}_d \cdot \boldsymbol{T}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (d_x + l_x) \\ 0 & 1 & 0 & (d_y + l_y) \\ 0 & 0 & 1 & (d_z + l_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conserva la misma estructura

Propiedad Asociativa

Elemento Neutro

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I para los 12 subgrupos

Elemento Inverso

$$\mathbf{T}_d^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{-d}$$

CARACTERÍSTICAS DE LOS 12 SUBGRUPOS

Represent.	Dimensión	Significado	Materialización	Tipo variables
$\{I\}$	0	Desplazamiento nulo	Unión rígida	ninguna
$\{\mathcal{T}_{\boldsymbol{u}}\}$	1	Traslación según la direcc. ***u***	Par prismático	s
$\{\mathcal{T}_{\mathcal{A},\boldsymbol{r}_a}\}$	1	Rotación alrededor de un eje *A*	Par de rotación	φ
$\{\mathcal{H}_{\mathcal{A},h,\boldsymbol{r}_a}\}$	1	Rot. y trasl. acopladas según eje A	Par helicoidal	s, φ; $s = h\varphi$
$\{\mathcal{T}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\}$	2	Trasl. direcc. ***u***, ***v*** lineal. indep.	----------	s_u , s_v
$\{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\}$	2	Rot. eje *A* y trasl. $\boldsymbol{r}_a$, desacopl.	Par cilíndrico	s, φ
$\{\mathcal{T}_3\}$	3	Trasl. direcc. ***u***, ***v***, ***w*** lineal. indep.	----------	s_u , s_v , s_w
$\{\mathcal{F}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\}$	3	Movimiento plano	Par plano	s_u , s_v , φ
$\{\mathcal{S}_{\mathrm{O}}\}$	3	Movimiento Esférico	Rotula esférica	φ, θ, ψ
$\{\mathcal{Y}_{\boldsymbol{u},h}\}$	3	2 trasl. independ. + mov. helic. perpend. al plano traslaciones	----------	s_u , s_v , $s_w = h\varphi$
$\{\mathcal{X}_{\boldsymbol{e}}\}$	4	Trasl. direcc. ***u***, ***v***, ***w*** lineal. indep. + rot. alrededor dirección fija ***e***	----------	s_u , s_v , s_w , φ
$\{\mathcal{D}\}$	6	Movimiento espacial general	----------	s_u , s_v , s_w , φ, θ, ψ

JM Hervé. Mechanism and Machine Theory. Vol. 13 (1978)

SÍNTESIS MORFOLÓGICA O ESTRUCTURAL

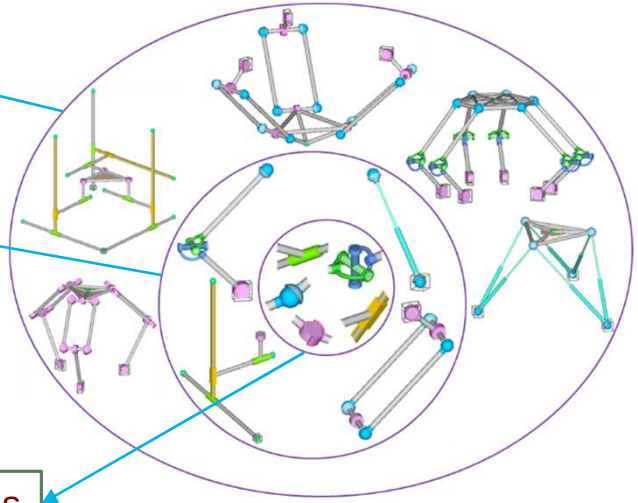
Diseño de Robots Paralelos

Patrón de mov. en la PM

Cadenas cinemáticas
Patas del MP
Generadores de movimiento

Subgrupos de desplazamientos

Elementos y juntas cinemáticas



PROCEDIMIENTO DE SÍNTESIS MORFOLÓGICA

Requisito cinemático: patrón de movimiento Schönflies (3T1R) en la plataforma móvil.

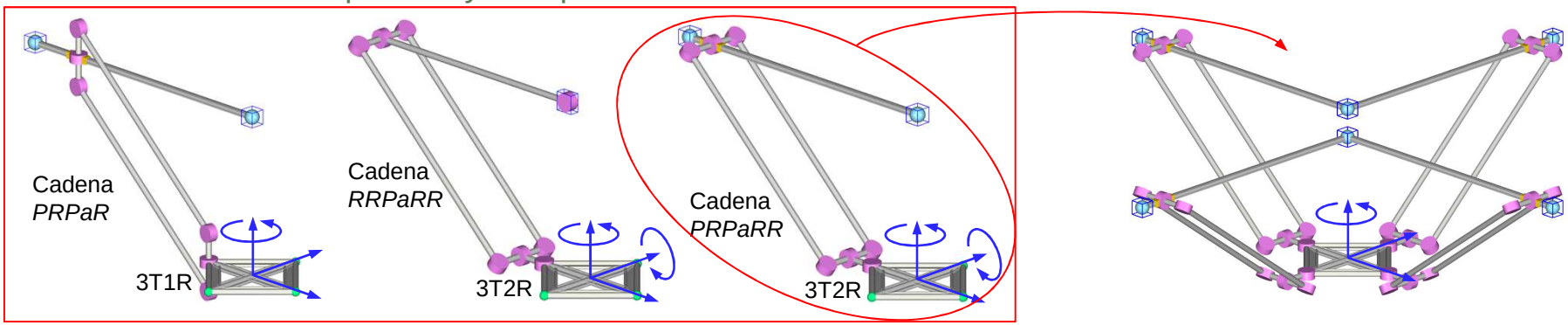
$\{\mathcal{X}_e\}$	Dimensión: 4	Trasl. direcc. ***u***, ***v***, ***w*** lineal. indep. + rot. alrededor dirección fija ***e***	s_u , s_v , s_w , φ

Caso del MP ARABA

Hernández, O. Altuzarra, O. Salgado, Ch. Pinto & V. Petuya. Industrial Robot, 39 (2012)

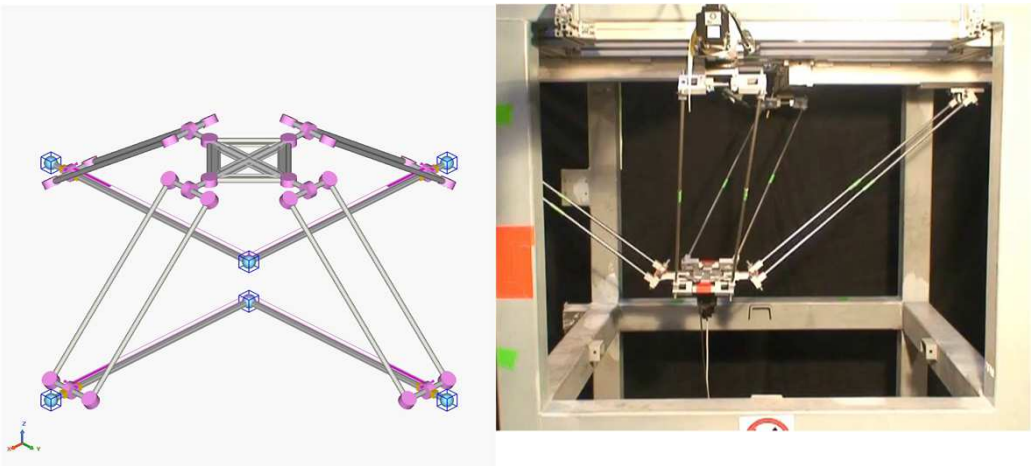
DISEÑO MORFOLÓGICO O ESTRUCTURAL DEL MP ARABA

1.- Seleccionar cadenas que incluyan al patrón de movimiento Schönflies: 3T1R



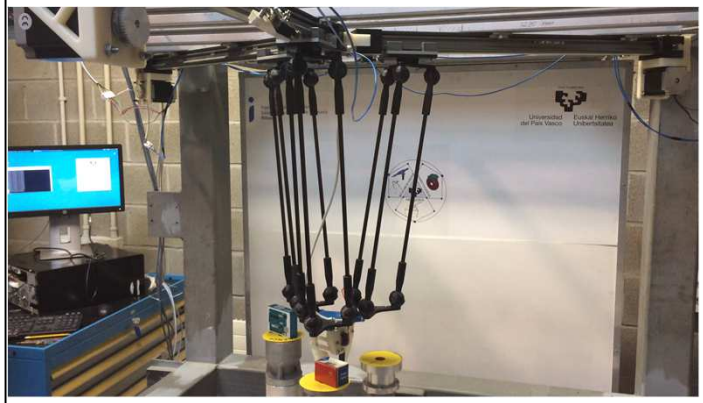
2.- Distribución espacial de las (4) patas.

3.- La intersección de los (4) generadores da un desplaz. Schönflies.



Salgado, O.; Altuzarra, O.; Petuya, V.; Hernández, A. J. Mechanical Design, 130 (2008)
Altuzarra, O.; Salgado, O.; Hernández, A.; Angeles, J. Mechanical Design. 131 (2009)

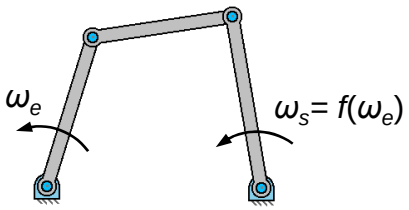
OTRO DISEÑO: 3-P(3SS)R
Robot de traslación



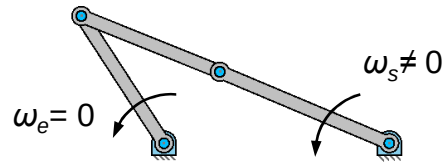
Hernández, A.; Macho, E.; Urízar, M.; Petuya, V. Mechanical Sciences, 9 (2018)

SINGULARIDADES

Posición regular
u ordinaria

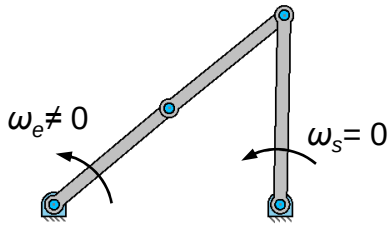


Entrada Salida



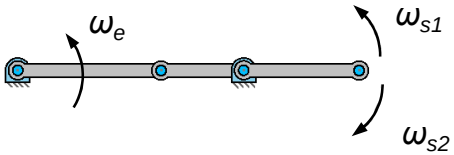
Posición de Bloqueo

→ Singularidad en el problema directo



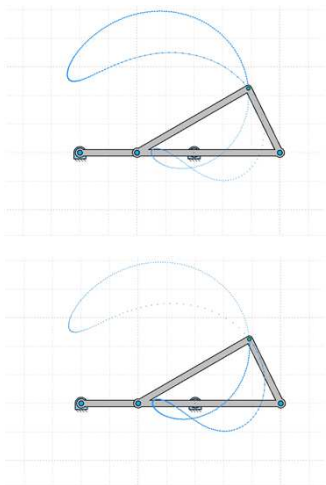
Posición de punto muerto

→ Singularidad en el problema inverso



Posición de indeterminación

→ Incremento de movilidad



SINGULARIDAD EN EL PROBLEMA DIRECTO (SPD)

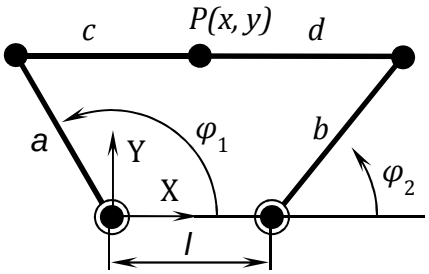
Sistema de ecuaciones de velocidad:

$$\boldsymbol{J}_x \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}_q \dot{\boldsymbol{q}}$$

Condición de SPD:

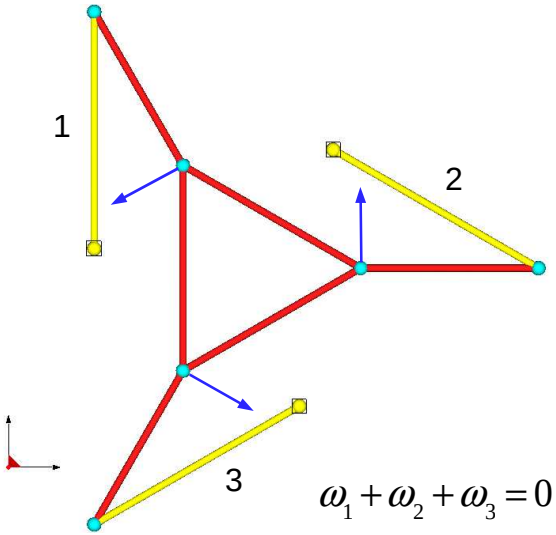
$$\boldsymbol{J}_x \text{ pierde rango} \rightarrow |\boldsymbol{J}_x| = 0$$

5R

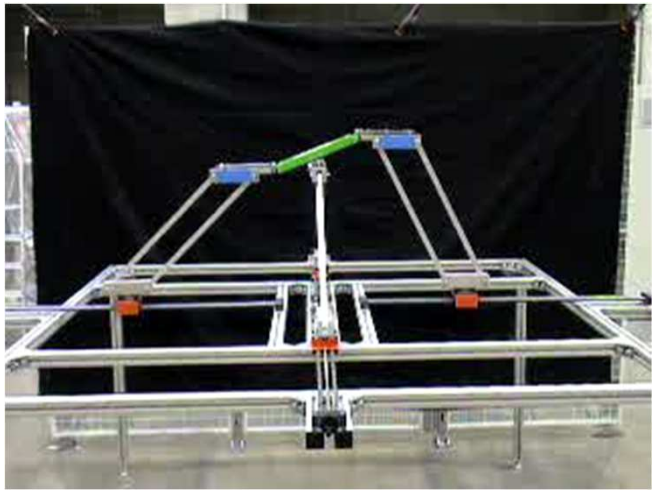


$$\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2} = \frac{b\, sen\varphi_2}{a\, sen\varphi_1}$$

3-RRR



$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$



Salgado, O.; Altuzarra, O.; Amezua, E.; Hernández, A. J. Mechanical Design, 129 (2007)

Problemas en el sistema de actuación

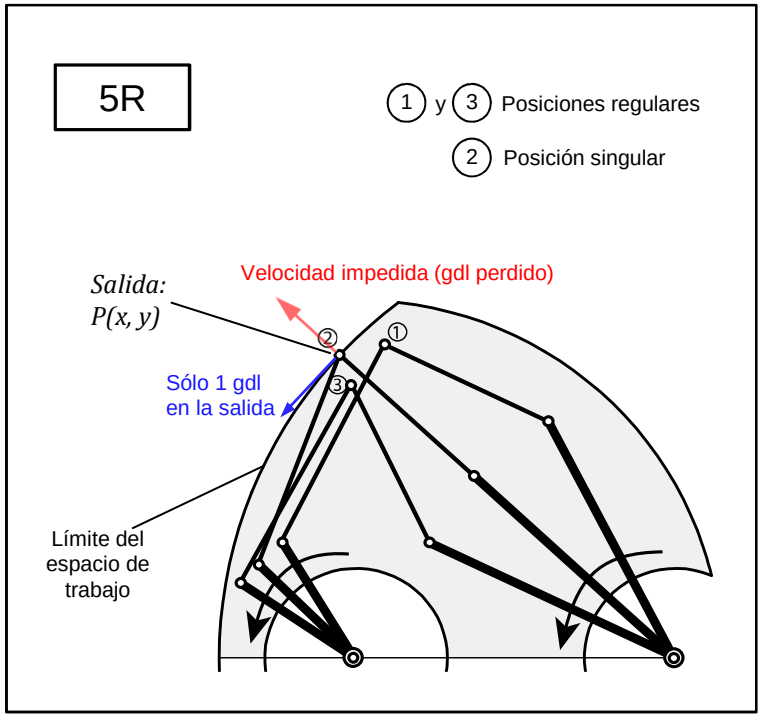
SINGULARIDAD EN EL PROBLEMA INVERSO (SPI)

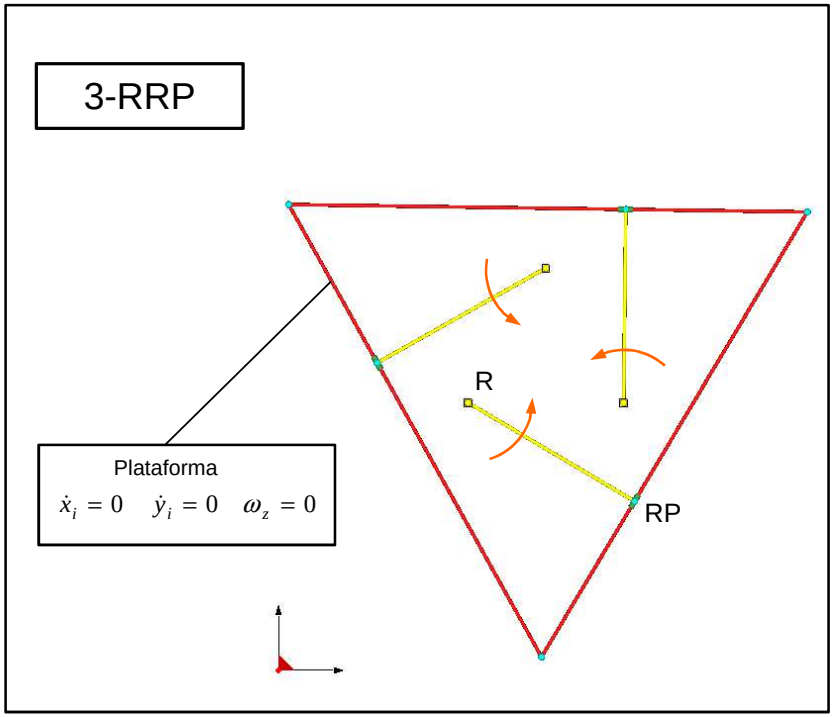
Sistema de ecuaciones de velocidad:

$$\boldsymbol{J}_x \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}_q \dot{\boldsymbol{q}}$$

Condición de SPI:

$\boldsymbol{J}_q$ pierde rango





INCREMENTO DE MOVILIDAD (IM)

Sistema de ecuaciones de velocidad:

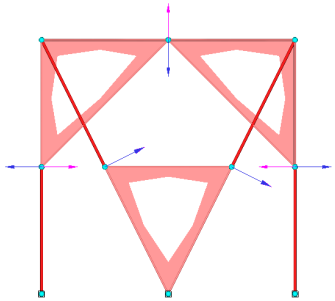
$$\begin{bmatrix} J_x & -J_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Condición de IM:

$\begin{bmatrix} J_x & -J_q \end{bmatrix}$ Pierde rango

Requiere entradas adicionales

Doble mariposa

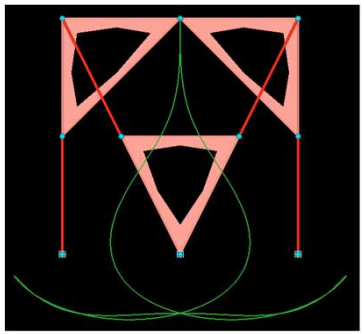


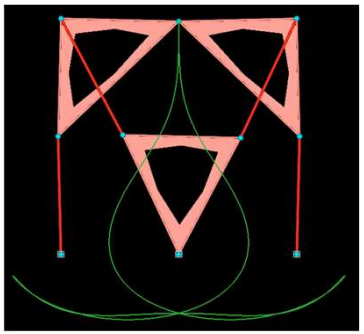
$$[G]\{\dot{x}\} = \lambda\{\dot{x}\} = \{0\}$$

Hernández, A.; Altuzarra, O.; Avilés, R.; Petuya, V. Mechanism and Machine Theory, 38 (2003)

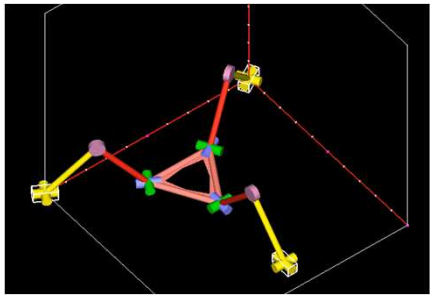
$$\{\dot{x}\}_{Dx1} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \{v_j\}_{Dx1} = [V]_{Dxn} \{\beta\}_{nx1}$$

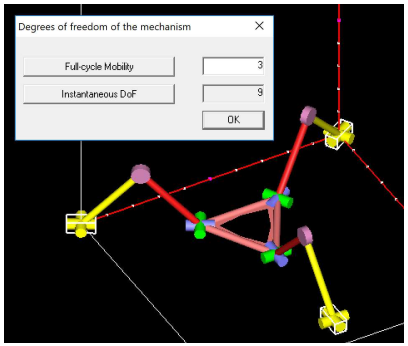
Altuzarra; O.; Salgado, O.; Petuya, V.; Hernández, A. Mechanism and Machine Theory, 41 (2006)





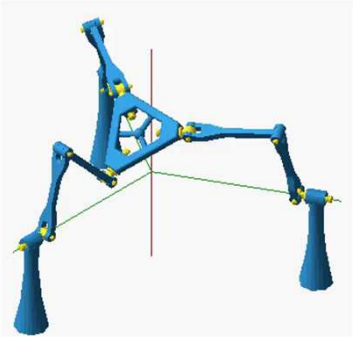
3-URU



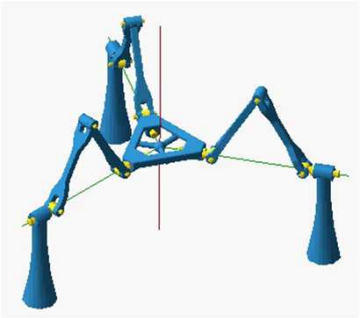


MECANISMOS CINEMATOTRÓPICOS

Reconfigurabilidad en Robótica

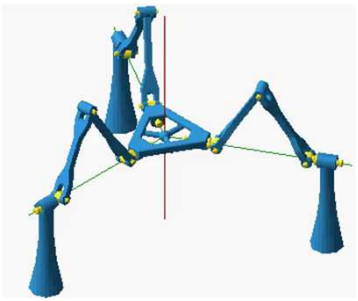


M.O. Mixto (1T2R)



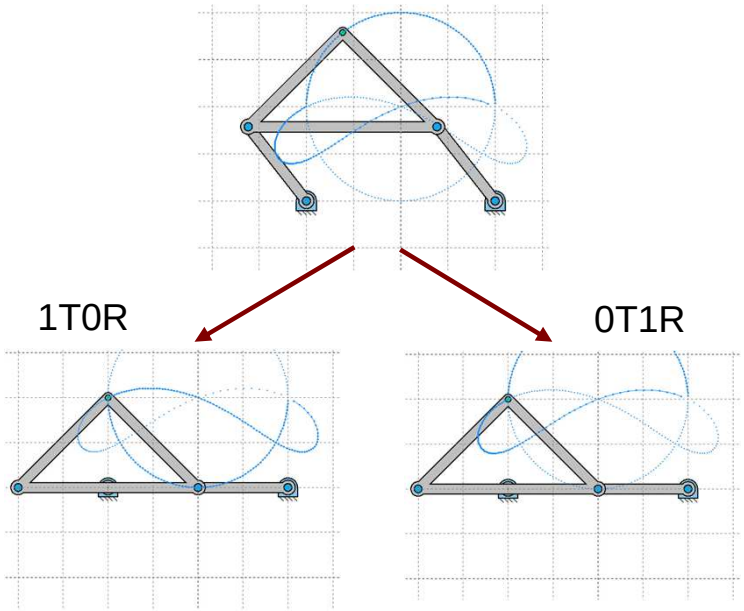
M.O. Orientación (0T3R)

M.O. Traslación (3T0R)



M.O. Plano (2T1R)

El C.A. también es un mec. cinematotrópico



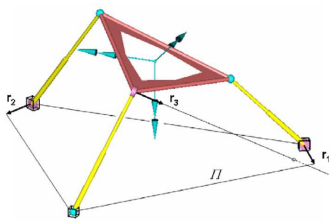
DYMO: Zlatanov, D.; Bonev, I. A. y Gosselin, C. M.: “Constraint singularities as C-space singularities”, Advances in Robot Kinematics, (2002).

RESUMEN DE SINGULARIDADES

Altuzarra, O.; Pinto, Ch.; Avilés, R.; Hernández, A. IEEE Transactions on Robotics, 20 (2004)

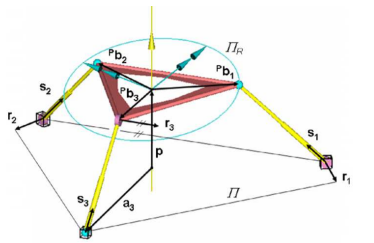
- Incremento de Movilidad
- Dependencia lineal de velocidades → (entradas, salidas, pasivas y otras)

Transición en el Patrón de velocidades



Non-singular position and 3 rotational velocity pattern of the platform.

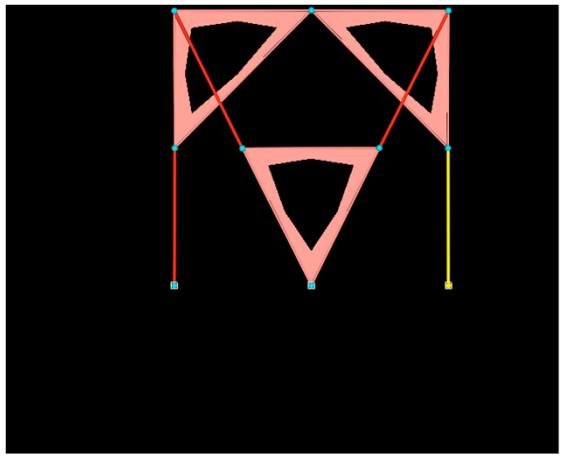
- No hay incremento del nº gdls
- Hay variación en la naturaleza de los gdls



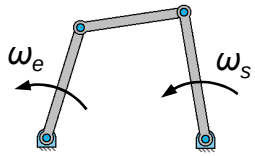
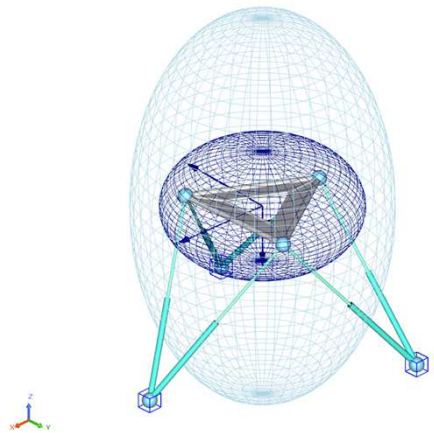
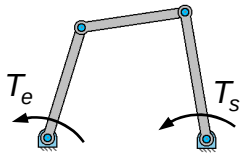
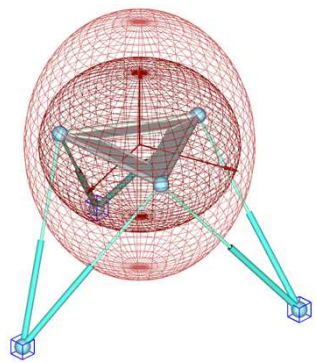
New motion type: 2 rotational + 1 translational motion.

Hernández, A.; Altuzarra, O.; Pinto, Ch.; Amezua, E. Mechanism and Machine Theory, 43 (2008)

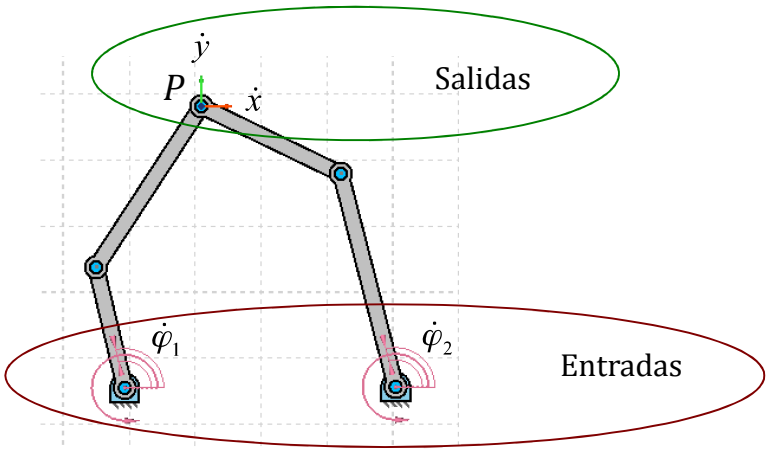
Velocidades nulas



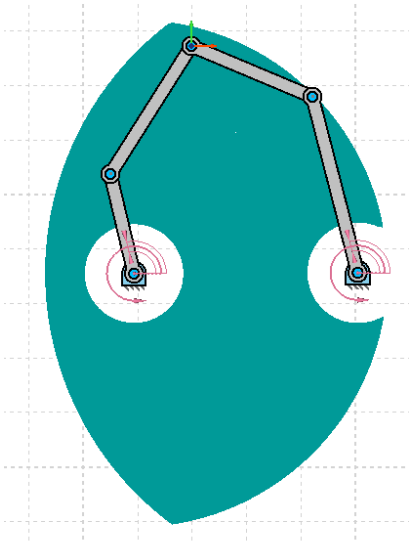
ELIPSOIDES

	1 gdl	varios gdl	Elipsoides
Relación entrada/salida	 $\mu=\frac{\omega_s}{\omega_e}=g_s(\varphi_e)$ Velocidad de salida nula (punto muerto)	$\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}=1 \quad\Rightarrow\quad \lVert\dot{\boldsymbol{q}}\rVert=1$ Elipsoide de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_R\dot{\boldsymbol{q}}$ Elipsoide de velocidad $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_T^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_T\dot{\boldsymbol{q}}$ Algún semieje se anula (singul. probl. inverso)	
Ventaja mecánica	 $VM=\frac{T_s}{T_e}=\frac{\omega_e}{\omega_s}=\frac{1}{g_s(\varphi_e)}$ Velocidad de entrada nula (posición de bloqueo)	$Pot_e=\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=Pot_s$ $\boldsymbol{\tau}\rightarrow f.actua;\quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{f}_T,\boldsymbol{m})\rightarrow f.plataf$ $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=1 \quad\Rightarrow\quad \lVert\boldsymbol{\tau}\rVert=1$ Elipsoide de Fuerzas $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=1=\boldsymbol{f}_T^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_T^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_T\boldsymbol{f}_T$ Elipsoide de Momentos $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=1=\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_R\boldsymbol{m}$ Algún semieje se anula (singul. probl. directo)	

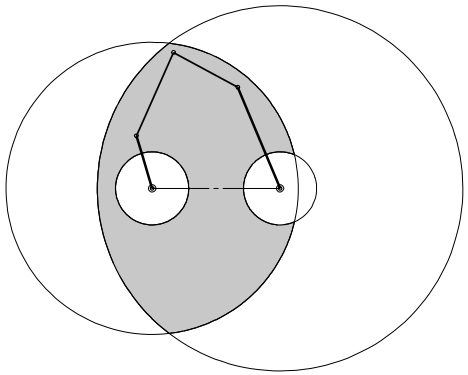
ESPACIO DE TRABAJO



5R ó 2-RRR PM



Espacio de trabajo:
soluciones del problema
de posición inverso



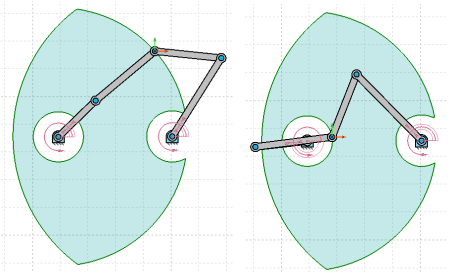
ANALISIS DE SINGULARIDADES

Ecuaciones de velocidad:

$$\boldsymbol{J}_x \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_q \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix}$$

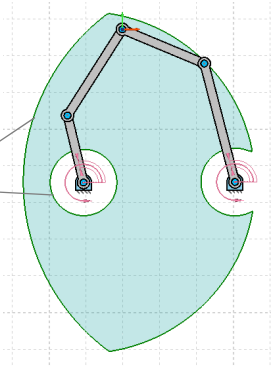
Singularidad P. Inverso:

$$\left|\boldsymbol{J}_q\right| = 0$$



Alineamiento de las cadenas RRR

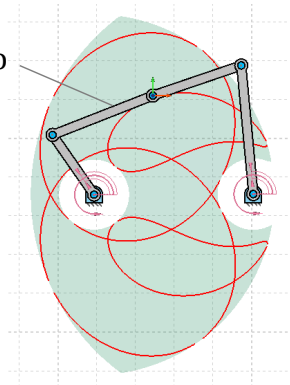
Fronteras del espacio de trabajo



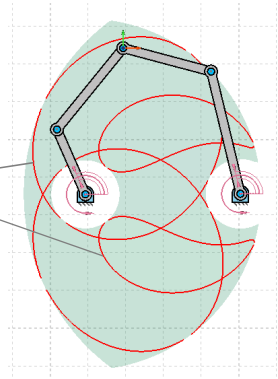
Singularidad P. Directo:

$$\left|\boldsymbol{J}_x\right| = 0$$

Alineamiento de las barras flotantes



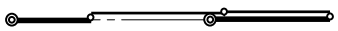
Curvas en el interior del espacio de trabajo



Incremento de Movilidad:

$\left[\boldsymbol{J}_x \; -\boldsymbol{J}_q\right]$ Pierde rango

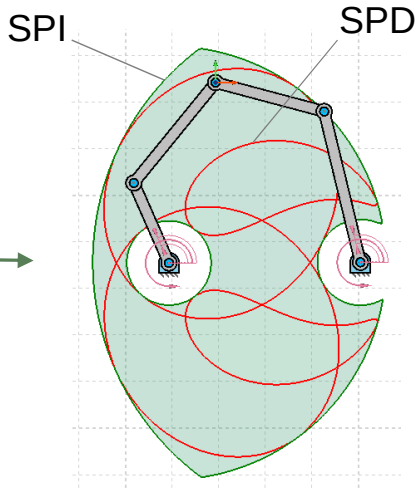
Alineamiento de todas las barras:



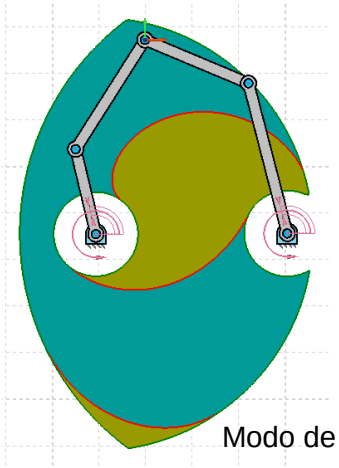
En este ejemplo no hay posiciones de IM

MODOS DE TRABAJO

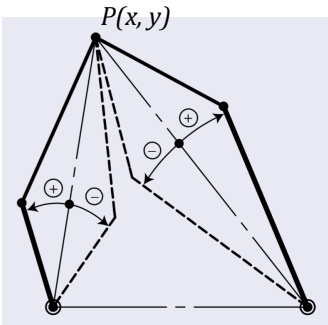
Todas las singularidades del manipulador



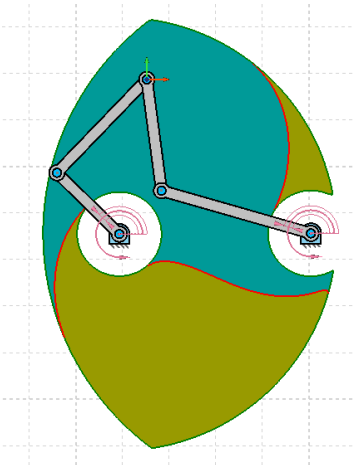
SPD correspondientes al **modo de trabajo** de la figura



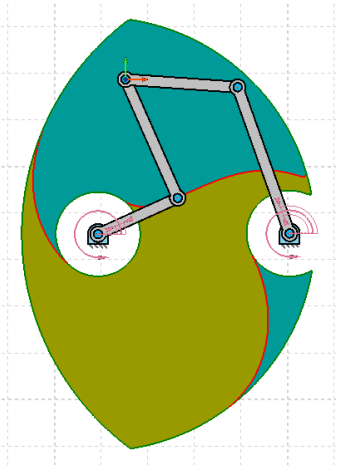
Modo de trabajo 1: (+)(+)



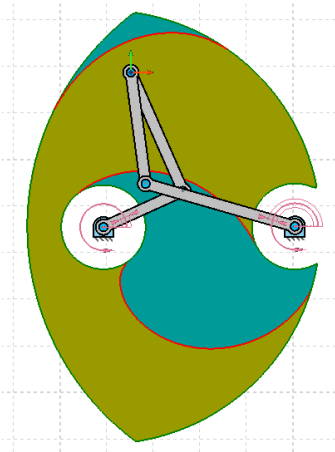
4 soluciones del problema de posición inverso: 4 modos de trabajo



Modo de trabajo 2: (+)(-)



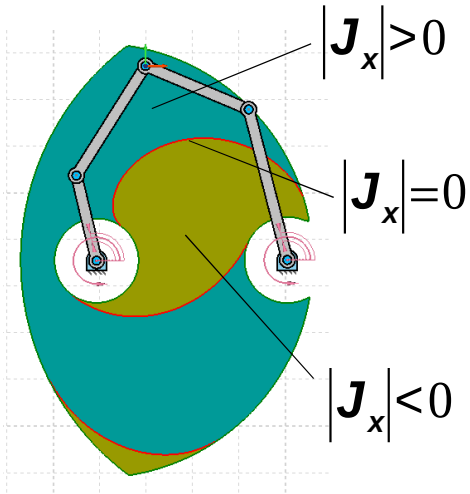
Modo de trabajo 3: (-)(+)



Modo de trabajo 4: (-)(-)

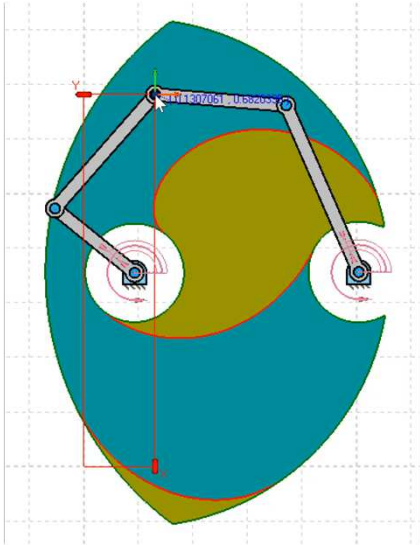
Macho, E.; Altuzarra, O.; Amezua, E.; Hernández, A. Mechanism and Machine Theory, 44 (2009)

MODOS DE ENSAMBLADO

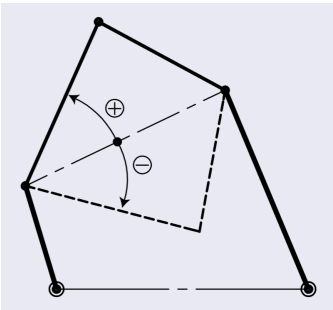


Modo de trabajo 1

Cambios de **modo de ensamblado** al atravesar una singularidad del directo

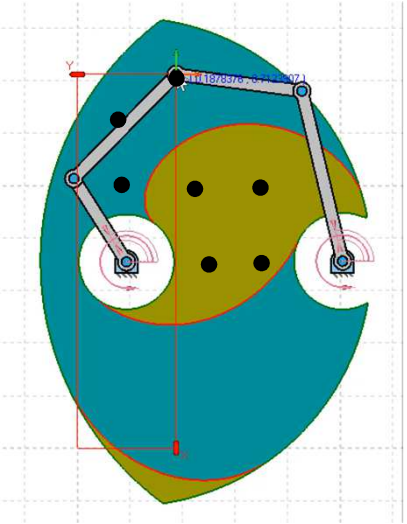


Modos de ensamblado: Soluciones del problema de posición directo

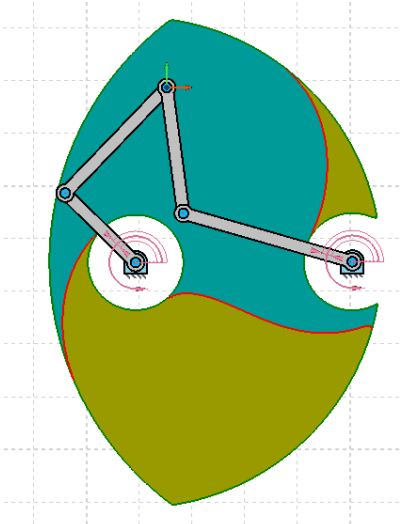


Por cada modo de trabajo hay 2 modos de ensamblado

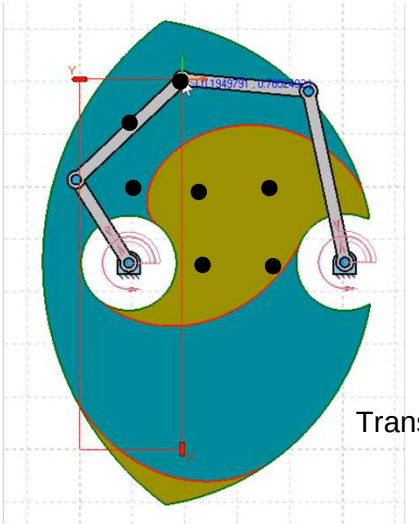
ESPACIO DE TRABAJO OPERACIONAL



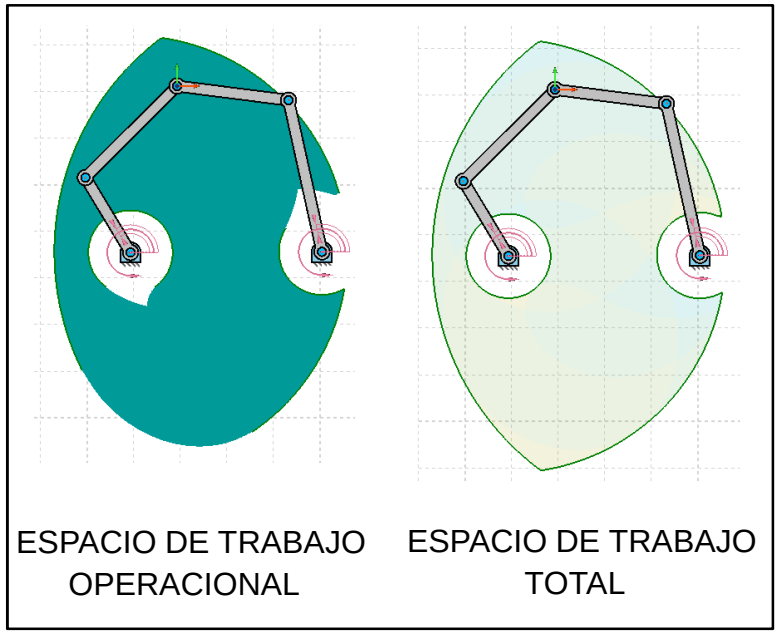
Modo de trabajo 1



Modo de trabajo 2



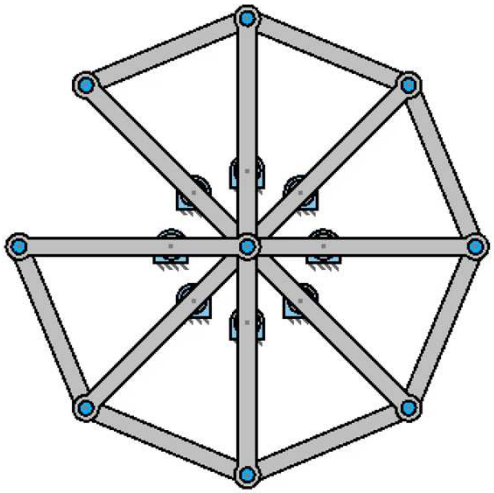
Transición del 1 al 2

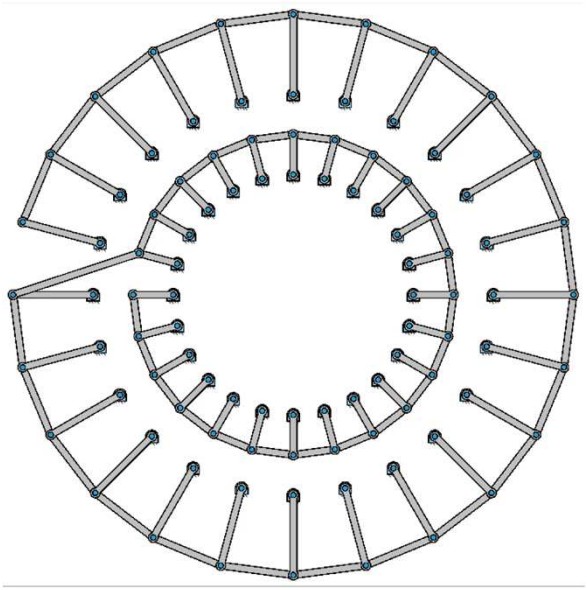


ESPACIO DE TRABAJO OPERACIONAL

ESPACIO DE TRABAJO TOTAL

Macho, E.; Pinto, Ch.; Altuzarra, O.; Hernández, A. Robotica, 26 (2008)





¡Esto es todo!
¡Muchas gracias!

Todas las simulaciones excepto las del DYMO se han realizado con el software GIM (http://www.ehu.eus/compmech/)