Lección 8

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

8.1. Introducción: Sistemas de ecuaciones diferenciales

Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de una o más ecuaciones en las que aparecen una o más funciones incógnita, pero todas ellas dependiendo de una sola variable independiente. Para ilustrar este concepto vamos a retomar un ejemplo de cinética química que estudiamos en la lección anterior, pero preguntándonos ahora una cuestión diferente y, como veremos, más complicada.

Ejemplo 8.1 .- Consideremos las siguientes reacciones irreversibles de segundo orden que se producen consecutivamente en un reactor:

$$A + S \xrightarrow{k_1} X$$

$$X + S \xrightarrow{k_2} Y$$

Si inicialmente se añaden 2 moles de S y 1 mol de A. ¿Cuál es la cantidad de sustancia en el reactor en cada instante de tiempo?.

Si, como viene siendo habitual, $[A]$, $[S]$, $[X]$ y $[Y]$ representan las concetraciones molares de las sustancias presentes en las reacciones, las ecuaciones diferenciales que modelan la evolución en el tiempo de las concentraciones son:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} &= -k_1[A][S] \\
\frac{\mathrm{d}[Y]}{\mathrm{d}t} &= k_2[X][S] \\
\frac{\mathrm{d}[X]}{\mathrm{d}t} &= k_1[A][S] - k_2[X][S] \\
\frac{\mathrm{d}[S]}{\mathrm{d}t} &= -k_1[A][S] - k_2[X][S]
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Esto es un sistema de 4 ecuaciones diferenciales de primer orden con cuatro funciones incógnitas: $[A]$, $[S]$, $[X]$ y $[Y]$. Así pues, resolver el sistema sería encontrar expresiones para las cuatro funciones (como funciones del tiempo t, que es la variable independiente). Como además se dan unas condiciones iniciales: $[A]_0 = 1$ mol, $[S]_0 = 2$ moles $[X]_0 = [Y]_0 = 0$ moles, estamos en presencia de un problema de condiciones iniciales.

Se trata de un sistema que no es lineal porque las ecuaciones que los componen no lo son. Salvo para sistemas muy concretos sólo disponemos de métodos analíticos generales para resolver sistemas lineales especiales. Por ello no es esperable que podamos obtener, tal y como se nos pide, expresiones analíticas para la evolución de las concentraciones de las sustancias presentes en el reactor a lo largo del tiempo. Esto no significa que no podamos decir nada a este respecto: disponemos de buenos métodos cualitativos y numéricos que nos permiten conseguir mucha información acerca de las soluciones de gran cantidad de sistemas no lineales. En ésta y las dos próximas lecciones estudiaremos métodos analíticos para expresar las soluciones de los sistemas lineales y en particular de los de coeficientes constantes. Posteriormente estudiaremos técnicas cualitativas para obtener información de las soluciones de los sistemas no lineales. Los métodos numéricos se estudiarán en la asignatura de Análisis Numérico.

8.2. Sistemas de primer orden

En el sistema (8.1) aparecen sólo derivadas de primer orden en las funciones incógnita $[A]$, $[S]$, etc. Por eso se llama un **sistema de primer orden**. El **orden** de un sistema de ecuaciones diferenciales es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en el sistema.

La forma general de un sistema de dos ecuaciones y de primer orden es:

$$\begin{aligned}
x' &= f(t, x, y) \\
y' &= g(t, x, y)
\end{aligned}$$

donde f y g son funciones de las tres variables x, y y t (variable independiente del sistema). Una **solución** del sistema en el intervalo (a,b) es un par de funciones $x(t)$, $y(t)$ que satisfacen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) &= g(t, x(t), y(t)) \end{aligned}$$

idénticamente para todo $t \in (a,b)$.

Ejemplo 8.2 .- Probar que las funciones $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-t}$ son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x' &= x^2 y \\ y' &= -xy^2. \end{aligned}$$

en toda la recta real.

En efecto, por una parte $x'(t) = e^t$ y $x(t)^2 y(t) = e^{2t}e^{-t} = e^t$. Así pues $x'(t) = x(t)^2 y(t)$ y se satisface la primera ecuación idénticamente. Además $y'(t) = -e^{-t}$ y $-x(t)y(t)^2 = -e^t e^{-2t} = -e^{-t}$. Entonces $y'(t) = -x(t)y(t)^2$ con lo que se satisface la segunda ecuación. En consecuencia, las funciones $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-t}$ son soluciones del sistema.

Los sistemas no tienen por qué ser de dos 2 ecuaciones. En general, un sistema de n ecuaciones diferenciales con n funciones incógnitas $x_1(t)$,..., $x_n(t)$ en la variables independiente t, tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

donde f_1, f_2, ..., f_n son funciones de las $n+1$ variables t, x_1, x_2, ..., x_n. Siempre exigiremos que el número de ecuaciones y de incógnitas sea el mismo. Y a este número común le llamaremos la **dimensión** del sistema.

8.2.1. Notación vectorial

Al trabajar con sistemas es conveniente utilizar la notación vectorial; es más manejable y compacta. Por ejemplo para el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= k_1 x_1^2 x_2^{-1} - k_2 x_1 \\ x_2' &= k_3 x_1^2 - k_4 x_2, \end{aligned}$$

si definimos la función vectorial

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

tendríamos que

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 x_1^2 x_2^{-1} - k_2 x_1 \\ x_2' = k_3 x_1^2 - k_4 x_2 \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Debemos observar dos cosas en relación con la ecuación (8.2). Primero, para derivar una función vectorial $\boldsymbol{x}(t)$ lo único que hay que hacer es derivar cada una de sus componentes:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

En segundo lugar, la parte de la derecha de la ecuación (8.2) es una función vectorial respecto de las componentes del vector $\boldsymbol{x}$. Por lo tanto, si ponemos

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} k_1 x_1^2 x_2^{-1} - k_2 x_1 \\ x_2' = k_3 x_1^2 - k_4 x_2 \end{pmatrix},$$

entonces la ecuación (8.2) se convierte en

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{8.3}$$

En general, para un sistema de dimensión n:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{8.4}$$

podemos ahorrar mucho espacio y tiempo si usamos notación vectorial. Si ponemos

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \boldsymbol{x}) \\ f_2(t, \boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix},$$

entonces el sistema se puede escribirse como

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}).$$

Vemos así que la gran ventaja de usar notación vectorial consiste en poder expresar un sistema de cualquier dimensión casi de la misma forma que una sola ecuación diferencial. La diferencia es que para sistemas, las variables y funciones son vectores, que siempre escribiremos en negrita para diferenciarlas de las variables y funciones escalares. Por lo general, sin embargo, del contexto se podrá deducir fácilmente si trabajamos con vectores o con escalares.

Una última observación. Aunque nuestros vectores serán siempre vectores columna, por sencillez, en ocasiones escribiremos estos vectores como una n-tupla. Es decir, un vector

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

también lo escribiremos como $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

8.2.2. El Problema de condiciones iniciales

En las aplicaciones, los sistemas de ecuaciones diferenciales que modelizan procesos reales, suelen ir acompañados de ciertas condiciones que deben cumplir las funciones incógnitas para uno o más valores de la variable independiente t. Así, en el ejemplo del sistema (8.1) que modeliza la evolución de las concentraciones de ciertas sustancias en un reactor, éstas comienzan con unas concentraciones iniciales de dichas sustancias. Son las condiciones iniciales del sistema. Vemos que hay una condición inicial para cada variable del sistema. En este caso las condiciones iniciales se conocerán, muy posiblemente,en el instante en el que se pone en marcha el reactor; es decir, $t = 0$; pero en otras situaciones bien podría suceder que esas condiciones iniciales se dieran en un instante t_0 cualquiera.

Así pues, el **Problema de condiciones iniciales** para un sistema de dimensión n

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

consiste en encontrar n funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_n(t)$ (o en notación vectorial, una función vectorial $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$) que sea solución del sistema y cumpla una determinada condición inicial $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

El problema de condiciones iniciales lo escribiremos de forma similar a como lo hacíamos para ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \end{cases}$$

8.2.3. Reducción de sistemas de orden superior a sistemas de primer orden

En el estudio de sistemas nos podemos restringir a los sistemas de primer orden. Esto es debido a que cualquier sistema de orden superior es equivalente a uno de primer orden.

Cuando decimos que dos sistemas son equivalentes nos referimos a que las soluciones de uno de ellos conduce a las del otro y recíprocamente. Quizá la forma más simple de comprender esta idea es utilizando un ejemplo

Ejemplo 8.3 Consideremos la siguiente ecuación de tercer orden

$$x''' + xx'' = \cos t. \tag{8.5}$$

Podemos ver esta ecuación como un sistema de dimensión 1 y orden 3. Vamos a encontrar un sistema de primer orden que es equivalente a esta ecuación. Para ello introducimos nuevas variables: $x_1 = x$, $x_2 = x'$ y $x_3 = x''$. Notemos que hay una componente de $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ por cada derivada de x hasta un orden una unidad menor de la que aparece en el ecuación. Formamos entonces el siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -x_1x_3 + \cos t \end{aligned} \tag{8.6}$$

Está claro que si $x = x(t)$ es una solución de la ecuación (8.5) entonces el conjunto de funciones $x_1 = x(t)$, $x_2 = x'(t)$ y $x_3 = x''(t)$ son soluciones del sistema (8.6).

Veamos que el recíproco también es cierto. Sean $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ y $x_3 = x_3(t)$ soluciones del sistema (8.6). Veamos que $x = x_1(t)$ es solución de la ecuación (8.5). En efecto, tendríamos

$$x' = x_1'(t) = x_2(t) \quad \text{y} \quad x'' = x_1''(t) = x_2'(t) = x_3(t),$$

de modo que $x''' = x_3'(t) = -x_1x_3 + \cos t = -xx'' + \cos t$. Por lo tanto $x = x_1(t)$ es solución de la ecuación (8.5). Es decir, los sistemas (8.5) y (8.6) son equivalentes.

Obsérvese que cada solución de la ecuación es la primera componente de una solución del sistema, y que cada solución del sistema se obtiene de una solución de la ecuación derivando tantas veces como el orden de la ecuación menos 1.

De forma general podemos proceder de la misma manera: dada una ecuación de orden n:

$$x^{(n)} = f(t, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{8.7}$$

introducimos nuevas variables dependientes para x y cada una de sus derivadas hasta la de orden $n-1$:

$$x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'',\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}.$$

De esta forma $x_1' = x' = x_2$, $x_2' = x'' = x_3$, etc. El sistema que obtenemos es

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2\\
&x_2' = x_3\\
&\vdots\\
&x_{n-1}' = x_n\\
&x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

que es un sistema de dimensión n pero de primer orden. Para usar notación vectorial ponemos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ siendo $F_1(t, \boldsymbol{x}) = x_2$, $F_2(t, \boldsymbol{x}) = x_3$,... $F_{n-1}(t, \boldsymbol{x}) = x_n$ y $F_n(t, \boldsymbol{x}) = f(t, \boldsymbol{x})$. De esta forma el sistema resultante se puede escribir abreviadamente como

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}). \tag{8.8}$$

Se demuestra, como en el ejemplo que si $x = x(t)$ es solución de la ecuación (8.7) entonces $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ es solución del sistema (8.8). Y recíprocamente, si $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ es solución del sistema (8.8), entonces $x = x_1(t)$ es solución de la ecuación (8.7).

En cuanto al problema de condiciones iniciales, hemos visto que para el sistema (8.8) tenemos que especificar un vector de condiciones iniciales $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Esto equivale a especificar en la ecuación (8.7) n condiciones iniciales: una para x en t_0 y una para cada una de sus derivadas hasta la de orden $n-1$, todas ellas en t_0. Es decir, el problema de condiciones iniciales relativo a una ecuación diferencial de orden n sería

$$\begin{aligned}
&x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})\\
&x(t_0) = x_1^0, x'(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0.
\end{aligned}$$

Finalmente, si tenemos, no sólo una ecuación sino un sistema de ecuaciones de orden p, reducimos cada ecuación del sistema a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Una última observación. El motivo de reducir una ecuación o sistema de ecuaciones de órden superior a un sistema de primer orden viene motivado no sólo por el hecho de que, de esta forma, podemos reducir el estudio de sistemas a los de primer orden. También tiene una importancia de tipo práctico: los procedimientos para resolver sistemas numéricamente, que es casi la única forma de resolverlos, exigen, todos o casi todos, que el sistema sea de primer orden. Por lo tanto, para poder aplicarlos, lo primero que hay que hacer es reescribir la ecuación o sistema que tengamos como un sistema de primer orden.

8.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Si cada una de las funciones $f_1, \ldots, f_n$ en el sistema (8.4) son lineales, entonces el sistema se dice que es **lineal**.

La forma general de un sistema lineal de n ecuaciones de primer orden es

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{array}\right. \tag{8.9}$$

Así los sistemas

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = 3x_1 - 5x_2 \\ x_2' = -2x_1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x' = -2ty \\ y' = 3e^t x + 4\cos t \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} u_1' = -\cos(t)u_1 - \frac{5}{t}u_2 \\ u_2' = u_1 - \operatorname{sen}(t)u_2 + \sqrt{t} \end{array}\right.$$

son lineales, mientras que los sistemas

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 3xy - 5y \\ y' = -2x \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x_1' = -2x_2 \\ x_2' = 3x_1^2 + 4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} u_1' = -\cos(tu_1) \\ u_2' = u_1 - \sin(t) \end{array}\right.$$

no lo son.

Si cada una de las funciones $b_1(t)$, $b_2(t)$,..., $b_n(t)$ son idénticamente cero, entonces el sistema se dice que es **homogéneo** y en caso contrario, **no homogéneo**.

Los sistemas lineales son los más simples entre todos los sistemas de primer orden, pero incluso éstos son muy difíciles de resolver analíticamente. Suficientemente difíciles son los sistema lineales con coeficientes constantes; es decir, aquellos en los que las funciones $a_{ij}(t)$ son funciones constantes. Éstos son los únicos que podremos resolver analíticamente.

Lo mismo que sucede con los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, la notación matricial es útil a fin de simplificar la exposición y destacar las propiedades de estos sistemas. En este punto si no se está suficientemente familiarizado con la teoría básica de matrices, conviene estudiar o repasar el Anexo sobre matrices

Tal y como hemos hecho en la sección anterior para sistemas en general, llamaremos $\boldsymbol{x}(t)$ al vector (función vectorial):

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

de forma que

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

es el vector derivada de $\boldsymbol{x}(t)$. Y si ponemos

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

entonces el sistema (8.9) se puede escribir abreviadamente

$$\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t),$$

y si es homogéneo (i.e. el vector $\boldsymbol{b}(t) = 0$) entonces

$$\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t).$$

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 + \cos t \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 + t^2 \end{aligned}$$

se puede escribir en notación matricial como

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ t^2 \end{pmatrix},$$

de forma que la matriz del sistema es

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(constante, en este caso) y el vector de los términos independientes es

$$\boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Se trata, entonces, de un sistema *no homogéneo*, cuya parte homogénea es

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \tag{8.10}$$

Se puede comprobar, mediante sustitución, que los dos siguientes conjuntos de funciones son soluciones del sistema homogéneo (8.10):

$$x_1(t) = e^{-t}, \quad x_2(t) = -e^{-t},$$
$$y_1(t) = e^{3t}, \quad y_2(t) = e^{3t}.$$

Estos dos conjuntos de soluciones se pueden escribir de forma más compacta usando la notación vectorial

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

En efecto, sustituyendo directamente en (8.10) tendríamos

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Y lo mismo para $\boldsymbol{y}(t)$. Diremos, simplemente, que los vectores $\boldsymbol{x}(t)$ y $\boldsymbol{y}(t)$ son **soluciones** del sistema (8.10).

Al estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales, lo primero que analizamos, como es habitual, es la existencia y unicidad de soluciones. Para sistemas lineales tenemos el siguiente resultado que es más fuerte que el correspondiente para sistemas no lineales:

Teorema 8.4 .- *Si todas las componentes de la matriz $A(t)$ y del vector $b(t)$ son continuas en un intervalo (a, b), entonces para cada $t_0 \in (a, b)$ y para cada vector $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ el sistema*

$$\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

con la condición inicial

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

tiene una única solución definida en el intervalo (a, b).

Este teorema tiene dos partes. La primera de ellas asegura que si las funciones componentes de la matriz $A(t)$ y del vector $\boldsymbol{b}(t)$ son continuas entonces existe una función vectorial $\boldsymbol{x}(t)$, definida en el intervalo donde son continuas las funciones componentes de $A(t)$ y $\boldsymbol{b}(t)$, tal que $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ y $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Hay una diferencia importante entre este resultado y los anteriores teoremas de existencia de soluciones que hemos visto hasta ahora: el campo de existencia de las soluciones no se restringe a un, posiblemente, pequeño entorno de t_0 sino que puede ser muy amplio, tanto como el campo donde $A(t)$ y $\boldsymbol{b}(t)$ son continuas. Así, si el sistema es de coeficientes constantes y homogéneo, las soluciones están definidas en toda la recta real porque las funciones constantes son siempre continuas.

La segunda parte del teorema dice que la solución del problema de condiciones iniciales es única. La unicidad significa que si $\boldsymbol{x}(t)$ e $\boldsymbol{y}(t)$ son dos funciones vectoriales que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales y la misma condición inicial, entonces $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$ para todo t.

Nuestro objetivo es diseñar un método para encontrar todas las soluciones de los sistemas diferenciales lineales. Una vez logrado, lo aplicaremos a la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes. Para ello necesitamos estudiar las propiedades más importantes de los sistemas lineales.

8.4. Propiedades de los sistemas lineales homogéneos

Nos centramos, por simplicidad, en los sistemas lineales de dimensión 2, aunque las ideas que vamos a desarrollar son válidas para sistemas de cualquier dimensión. Los resultados generales los enunciaremos para sistemas de dimensión n.

Los sistemas lineales de dimensión dos son de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + b_2(t) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \tag{8.11}$$

siendo

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}.$$

A estos sistemas también se les llama **sistemas planos** (o planares, según autores).

La primera propiedad que observamos de los sistemas lineales es que las soluciones de estos sistemas cumplen el *principio de superposición.* Es decir, si

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema (8.11) y a y b son números reales entonces $a\boldsymbol{u}(t) + b\boldsymbol{v}(t)$ también es solución del sistema (8.11). Hay una forma en matemáticas de expresar esta idea:

Proposición 8.5 .- *Las soluciones del sistema lineal $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ forman un espacio vectorial.*

Se trata, en realidad, de un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones continuas, pero esto no tiene, aquí, ninguna importancia.

Veamos que para los sistemas planos, en efecto funciona el principio de superposición: sea $\boldsymbol{w}(t) = a\boldsymbol{u}(t) + b\boldsymbol{v}(t)$, y veamos que $\boldsymbol{w}'(t) = A(t)\boldsymbol{w}(t)$:

$$\boldsymbol{w}'(t) = a\boldsymbol{u}'(t) + b\boldsymbol{v}'(t) = aA(t)\boldsymbol{u}(t) + bA(t)\boldsymbol{v}(t) = A(t)(a\boldsymbol{u}(t) + b\boldsymbol{v}(t)) = A(t)\boldsymbol{w}(t)$$

La función vectorial $\boldsymbol{w}(t) = a\boldsymbol{u}(t) + b\boldsymbol{v}(t)$ se dice que es una combinación lineal de las funciones $\boldsymbol{u}(t)$ y $\boldsymbol{v}(t)$. Así pues, el principio de superposición dice que *cualquier combinación lineal de soluciones de un sistema lineal homogéneo es también una solución del sistema.*

El principio de superposición es una propiedad de los sistemas lineales que no es verdadera en general para sistemas no lineales. Por ejemplo, si consideramos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 \\ x_2' = x_1 x_2 \end{cases}$$

entonces

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema porque

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_1 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo que

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_1 u_2 \end{pmatrix}.$$

También la función vectorial $\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución del sistema. Sin embargo, $\boldsymbol{w}(t) = 2\boldsymbol{u}(t) + 0\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} \\ 0 \end{pmatrix}$ no es solución del sistema. En efecto

$$\boldsymbol{w}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hemos visto que si $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t)$ son soluciones del sistema plano $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ entonces cualquier combinación lineal de ellas también lo es. ¿Será posible expresar todas las soluciones del sistema como combinación de dos de ellas solamente? Consideremos un ejemplo:

Ejemplo 8.6 .- Dado el sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

comprobar que $\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema y probar que cualquier otra solución es combinación lineal de estas dos.

En realidad ya hemos visto que $\boldsymbol{x}_1(t)$ y $\boldsymbol{x}_2(t)$ son soluciones (ver sistema (8.10)). Veamos ahora que si $\boldsymbol{x}(t)$ es una solución del sistema, entonces $\boldsymbol{x}(t)$ es una combinación lineal de $\boldsymbol{x}_1(t)$ y $\boldsymbol{x}_2(t)$. Es decir, vamos a ver que existen unos números c_1 y c_2 tales que $\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t)$ para todo t. Encontrar estos números c_1 y c_2 para un valor de t concreto es muy fácil. Por ejemplo, si supiéramos el valor de $\boldsymbol{x}(t)$ en $t = 0$, digamos

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

podríamos encontrar enseguida valores para c_1 y c_2 de modo que $\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{x}_1(0) + c_2\boldsymbol{x}_2(0)$. En efecto, como $\boldsymbol{x}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tendríamos que

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{x}_1(0) + c_2\boldsymbol{x}_2(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 + c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = c_1 + c_2 \\ -1 = -c_1 + c_2 \end{cases}.$$

Sólo hay que resolver este sencillo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Pero este sistema no siempre tiene solución, ello depende de que la matriz de los coeficientes tenga determinante distinto de cero. Éste es el caso en este ejemplo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

de modo que el sistema tiene solución y además es única. En concreto $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$.

Debemos observar dos cosas:

- Si el valor de $\boldsymbol{x}$ en $t = 0$ fuera otro, digamos $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$, entonces el sistema lineal a resolver sería
$$\begin{cases} x_1^0 = c_1 + c_2 \\ x_2^0 = -c_1 + c_2 \end{cases} \tag{8.12}$$
que también tendría solución porque la existencia o no de soluciones de este sistema no depende de los términos independientes sino de la matriz de los coeficientes.

- La matriz de los coeficientes depende exclusivamente de las funciones solución dadas: $\boldsymbol{x}_1(t)$ y $\boldsymbol{x}_2(t)$. Es, en efecto, la matriz cuyas columnas son $\boldsymbol{x}_1(0)$ y $\boldsymbol{x}_2(0)$:
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(0) & \boldsymbol{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resumiendo, hemos visto hasta ahora que si la matriz $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(0) & \boldsymbol{x}_2(0)\end{pmatrix}$ tiene determinante distinto de cero -o lo que es lo mismo, si los vectores $\boldsymbol{x}_1(0)$ y $\boldsymbol{x}_2(0)$ son linealmente independientes (ver Anexo sobre matrices si no se recuerda lo que significa este concepto)-, entonces se pueden encontrar números c_1 y c_2 de modo que $\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{x}_1(0) + c_2\boldsymbol{x}_2(0)$. Pero lo que nosotros pretendemos es mucho más ambicioso: pretendemos encontrar unos números c_1 y c_2 tales que $\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t)$ para todo t y no sólo para $t = 0$. Claro que de existir tales números, éstos deberían ser los hallados al resolver el sistema $\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{x}_1(0) + c_2\boldsymbol{x}_2(0)$ (que es el sistema (8.12)) porque este sistema tiene una única solución. Debemos probar, entonces, que si c_1 y c_2 son los números para los que $\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{x}_1(0) + c_2\boldsymbol{x}_2(0)$ entonces $\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t)$ para todo t. Esto parece una tarea difícil pero no lo es tanto porque hay una propiedad fundamental de $\boldsymbol{x}(t)$ que todavía no hemos utilizado: es solución del sistema $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$. Además es la solución de este sistema que cumple la condición inicial $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{pmatrix}$. Ahora bien, si ponemos $\boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t)$ con c_1 y c_2 los números que solucionan el sistema (8.12), tenemos que, por el principio de superposición $\boldsymbol{y}(t)$ es solución del sistema $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ y cumple que $\boldsymbol{y}(0) = c_1\boldsymbol{x}_1(0) + c_2\boldsymbol{x}_2(0) = \boldsymbol{x}(0)$. Es decir, $\boldsymbol{y}(t)$ es una solución del sistema que cumple la misma condición inicial que $\boldsymbol{x}(t)$. El teorema de unicidad nos dice que esto sólo es posible si $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$. Como $\boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t)$ concluímos que $\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t)$ para todo t.

En el caso considerado más arriba, en el que $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, habíamos encontrado que los números c_1 y c_2 para los que $\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{x}_1(0) + c_2\boldsymbol{x}_2(0)$ eran $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$. Por lo tanto, la única solución del sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

que cumple la condición inicial $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x}(t) = 2\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{x}_2(t) = \begin{pmatrix}2e^{-t} + e^{3t}\\-2e^{-t} + e^{3t}\end{pmatrix}$.

Definición 8.7 .- *Si $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ son exactamente n soluciones del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ tales que cualquier otra solución del sistema, $\boldsymbol{x}(t)$, se puede poner como combinación lineal de ellas, se dice que forman un* ***sistema fundamental de soluciones*** *del sistema.*

En el ejemplo anterior, las soluciones

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{pmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}_2(t) = \begin{pmatrix}e^{3t}\\e^{3t}\end{pmatrix}$$

forman un sistema fundamental de soluciones del sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

A la vista de este ejemplo y todo su desarrollo podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 8.8 .- *Si $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ son n soluciones de un sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ definido en el intervalo (a, b), entonces forman un sistema fundamental de soluciones si y sólo si los vectores $\boldsymbol{x}_1(t_0), \boldsymbol{x}_2(t_0), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t_0)$ son linealmente independientes para algún $t_0 \in (a, b)$. Es decir, si y sólo si $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(t_0) & \boldsymbol{x}_2(t_0) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(t_0)\end{pmatrix} \neq 0$ para algún $t_0 \in (a, b)$.*

En realidad, en el ejemplo de más arriba ya se han dado las ideas básicas para obtener una demostración formal de esta Proposición para el caso $n = 2$. El caso general es similar.

Veremos más adelante que todo sistema lineal homogéneo de dimensión n admite un sistema fundamental de n soluciones. Este hecho, junto a la Proposición 8.8, se puede enunciar matemáticamente de la siguiente forma

Teorema 8.9 .- *El conjunto de soluciones de un sistema n-dimensional lineal homogéneo de primer orden $\boldsymbol{x}' = A(t)x$ forma un espacio vectorial de dimensión n.*

Si $\{\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)\}$ es un tal sistema, a la matriz

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(t) & \boldsymbol{x}_2(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(t)\end{pmatrix}$$

cuyas columnas son los vectores solución, se le llama **matriz fundamental de soluciones**. Podemos observar que

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1'(t) & \boldsymbol{x}_2'(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_n'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A(t)\boldsymbol{x}_1(t) & A(t)\boldsymbol{x}_2(t) & \cdots & A(t)\boldsymbol{x}_n(t)\end{pmatrix} = A(t)\boldsymbol{X}(t),$$

donde hemos hecho uso de la siguiente propiedad del producto de matrices: si expresamos la matriz B en función de sus columnas: $B = \begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$, entonces las columnas de la matriz producto AB so Ab_1, Ab_2,. . . , Ab_n; es decir,

$$AB = \begin{pmatrix}Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n\end{pmatrix}.$$

Como conclusión de todo este proceso tenemos el siguiente teorema

Teorema 8.10 .- *Una matriz $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1(t) & \boldsymbol{x}_2(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(t)\end{pmatrix}$ es una matriz fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ de dimensión n en el intervalo (a, b) si y sólo si cumple las dos siguientes propiedades:*

(i) $\boldsymbol{X}'(t) = A(t)\boldsymbol{X}(t)$

(ii) $\det \boldsymbol{X}(t_0) \neq 0$ *para algún* $t_0 \in (a, b)$.

La primera condición indica que los vectores $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$, $\ldots$, $\boldsymbol{x}_n(t)$ (las columnas de $\boldsymbol{X}(t)$) son solución del sistema $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$. Y la segunda significa que estos vectores son linealmente independientes en (a, b). Es decir, el conjunto $\{\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)\}$ forma un sistema fundamental de soluciones del sistema $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$.

Este Teorema nos indica el camino que debemos seguir para obtener la solución general del sistema homogéneo $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$:

1. Encontrar n soluciones del sistema $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$. Equivalentemente, encontrar una matriz de n soluciones.

2. Comprobar que son linealmente independientes; es decir, que si (a, b) es el intervalo en el que está definido el sistema entonces $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t_0) & \boldsymbol{x}_2(t_0) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(t_0) \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{X}(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in (a, b)$.

3. Escribir la solución general del sistema como combinación lineal de las soluciones encontradas. Es decir, la solución general del sistema sería

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

   siendo c_1, c_2,$\ldots$, c_n constantes arbitrarias.

Si observamos que

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) & \boldsymbol{x}_2(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c}$$

con

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

la solución general del sistema se podría escribir, en notación matricial, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c}.$$

Ejemplo 8.11 .- Dado el sistema $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, comprobar que las funciones vectoriales

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen} t \\ e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}$$

forman un sistema fundamental de soluciones, escribir la solución general del sistema y hallar la única solución del sistema que cumple la condición inicial $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

En primer lugar hay que observar que la matriz del sistema $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ es continua en toda la recta real, de modo que el intervalo de defineión del sistema es $(-\infty, +\infty)$. A continuación tenemos que comprobar que $\boldsymbol{x}_1(t)$ y $\boldsymbol{x}_2(t)$ son soluciones del sistema:

$$\boldsymbol{x}_1'(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \\ -2e^t \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} A(t)\boldsymbol{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \\ -2e^t \operatorname{sen} t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}_2'(t) = \begin{pmatrix} e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) \\ 22e^t \cos t \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} A(t)\boldsymbol{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen} t \\ e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) \\ 2e^t \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\det(\boldsymbol{x}_1(t)\ \boldsymbol{x}_2(t)) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \operatorname{sen} t \\ e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) \end{pmatrix} = e^t(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = e^t$$

Así pues $\det(\boldsymbol{x}_1(0)\ \boldsymbol{x}_2(0)) = e^0 = 1 \neq 0$. esto significa que $\boldsymbol{x}_1(t)$ y $\boldsymbol{x}_2(t)$ son linealmente independientes y forman un sistema fundamental de soluciones. Equivalentemente, la matriz

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) & \boldsymbol{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \operatorname{sen} t \\ e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones.

La solución general del sistema será

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) &= c_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen} t \\ e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \operatorname{sen} t \\ c_1 e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) + c_2 e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nótese que si pusiéramos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} e^t\cos t & e^t\operatorname{sen} t\\ e^t(\cos t-\operatorname{sen} t) & e^t(\operatorname{sen} t+\cos t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\\ &= \begin{pmatrix} c_1e^t\cos t+c_2e^t\operatorname{sen} t\\ c_1e^t(\cos t-\operatorname{sen} t)+c_2e^t(\cos t+\operatorname{sen} t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

obtendríamos el mismo resultado.

Finalmente, la solución que cumple la condición inicial $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ será la que se obtiene imponiendo esta condición en la solución general:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\cdot 1+c_2\cdot 0\\ c_1\cdot 1+c_2\cdot 1\end{pmatrix}.$$

Así $c_1=2$ y $c_2=1$ y la solución pedida será

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}e^t(2\cos t+\operatorname{sen} t)\\ e^t(3\cos t-\operatorname{sen} t)\end{pmatrix}.$$

O, escrito en función de las componentes $\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}x_1(t)&=e^t(2\cos t+\operatorname{sen} t)\\ x_2(t)&=e^t(3\cos t-\operatorname{sen} t).\end{aligned}$$

En conclusión: para hallar la solución general de cualquier sistema lineal homogéneo hay que diseñar un método para calcular n soluciones que sean linealmete independientes, o equivalentemente, una matriz fundamental de soluciones. Este es el objetivo de la siguiente lección para los sistemas lineales con ceficientes constantes; los únicos para los que, como ya hemos dicho, tenemos métodos analíticos generales de resolución. Para su estudio necesitamos algunos preparativos de Álgebra Lineal que presentamos en la próxima sección.

8.5. Valores y vectores propios de matrices

En esta sección se hace uso de algunos conceptos básicos de Álgebra Lineal tales como las operaciones con matrices y vectores y, en especial, la teoría relacionada con la resolución de sistemas homogéneos de ecuaciones (algebraicas) lineales; en particular, los conceptos de rango y determinante de una matriz son básico. Quienes no estén familiarizados con estos conceptos o quieran repasarlos, pueden hacerlo en el Anexo sobre Matrices.

De ahora en adelante representaremos por I_n la matriz identidad. Es decir

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

Comenzamos con la definición de valor y vector propio de una matriz.

Definición 8.12 .- *Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice que el número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es un* **valor propio** *de A si existe un vector $\boldsymbol{v} \neq 0$ tal que $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. A este vector, $\boldsymbol{v}$, se le llama* **vector propio** *de A asociado al valor propio λ.*

Un ejemplo puede clarificar el significado de esta definición:

Ejemplo 8.13 .- Compruébese que $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Debemos comprobar que hay un número λ (real o complejo) tal que $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Para ello multiplicamos A por $\boldsymbol{v}$:

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Y como $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$A\boldsymbol{v} = (-2)\boldsymbol{v},$$

de modo que $\lambda = -2$ hace que $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

Una pregunta natural es si toda matriz cuadrada tiene valores y vectores propios. Para responder a esta cuestión observamos que la condición $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ es equivalente a $(\lambda\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v}) = 0$. O, también, sacando $\boldsymbol{v}$ factor común:

$$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{v} = 0. \tag{8.13}$$

Para cada valor de λ, (8.13) es un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas: las componentes del vector $\boldsymbol{v}$. Esto se puede ver con más claridad si desarrollamos la ecuación (8.13):

$$\begin{array}{rcccccccl} (\lambda - a_{11})\, v_1 & - & a_{12}v_2 & - & \cdots & - & a_{1n}v_n & = & 0 \\ -a_{21}v_1 & + & (\lambda - a_{22})\, v_2 & - & \cdots & - & a_{2n}v_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}v_1 & - & a_{n2}v_2 & - & \cdots & + & (\lambda - a_{mn})\, v_n & = & 0 \end{array} \tag{8.14}$$

Por ser un sistema homogéneo hay siempre un solución obvia (o trivial): $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$. Pero para que $\boldsymbol{v}$ sea un vector propio, por definición, debe ser distinto de cero. Así pues, la solución trivial no nos sirve.

Ahora bien, se sabe que un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución no trivial si y sólo si, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero. Así, para hallar una solución $\boldsymbol{v}$ distinta de cero de la ecuación (8.14) se debe cumplir

$$\det(\lambda I_n - A) = 0 \tag{8.15}$$

Al desarrollar el $\det(\lambda I_n - A)$ obtenemos un polinomio de grado n del que tenemos que obtener los λ que lo hacen cero; es decir, sus raíces, que deben ser n, igual al grado del polinomio, aunque puede haber raíces repetidas. Una vez obtenidas estas n raíces, digamos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, podemos obtener, para cada una de las que no están repetidas, un vector propio sin más que resolver el sistema (8.13). Clarifiquemos este proceso con un ejemplo.

Ejemplo 8.14 .- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

se pide calcular sus valores propios y para cada uno de ellos un vector propio asociado.

Debemos calcular el $\det(\lambda I_3 - A)$ e igualarlo a 0:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Llamamos $p(\lambda)$ a este polinomio:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{8.16}$$

A continuación debemos calcular los valores de λ que hacen cero esta ecuación; es decir las raíces de $p(\lambda)$. En este caso hay una raíz entera que se puede hallar por la regla de Ruffini, que es $\lambda_1 = 1$. En efecto

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$

Una vez obtenida la primera raíz, dividimos $p(\lambda)$ por $\lambda - 1$ y obtenemos el polinomio $\lambda^2 - \lambda - 6$ cuyas raíces son $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$.

Vamos a calcular un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$. Para calcular un vector propio $\boldsymbol{v}$ asociado a $\lambda_1 = 1$ debemos resolver el sistema

$$(\lambda_1 I_3 - A)\boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_2 - 4v_3 = 0 \\ -3v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -2v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \end{array} \right.$$

Este es un simple sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Como ya sabemos que la matriz del sistema tiene determinante igual a cero, el sistema tiene infinitas soluciones que se pueden expresar en función de una o dos variable según que la matriz del sistema tenga rango 1 ó 2. Ahora bien, si nos fijamos en las dos primeras ecuaciones observamos que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{8.17}$$

de modo que $\operatorname{rang}(\lambda_1 I_3 - A) = 2$. Esto significa que el subespacio de soluciones del sistema $(\lambda_1 I_3 - A)\boldsymbol{v} = 0$ es 1: el número de incógnitas menos el rango de la matriz de los coeficientes. Esto significa que dos de las incógnitas se pueden poner en función de una tercera. Para elegir ésta escogemos una submatriz de tamaño 2×2 (el rango de la matriz del sistema $\lambda_1 I_3 - A$) cuyo determinante sea distinto de cero. De hecho, ya hemos seleccionado tal submatriz, (8.17), al calcular el rango de $\lambda_1 I_3 - A$. Esta submatriz corresponde a las incógnitas $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ y a las ecuaciones primera y segunda. Por consiguiente, la solución general del sistema la podemos obtener despejando estas dos incógnitas en función de la tercera, $\boldsymbol{v}_3$, haciéndolo en el subsistema correspondiente a la submatriz seleccionada; i.e. en el correspondiente a las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{array}{l} v_2 = 4v_3 \\ 3v_1 + v_2 = v_3 \end{array}$$

De aquí obtenemos que $v_2 = 4v_3$ y $v_1 = -v_3$. La solución general del sistema $(\lambda_1 I_3 - A)\boldsymbol{v} = 0$ será

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_3 \\ 4v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Hay, en efecto, infinitas soluciones: una para cada posible valor de v_3. Cualquiera distinta de cero nos sirve porque nos piden **un** vector propio. Por ejemplo, dando a v_3 el valor 1 y sustituyendo: $v_1 = -1$ y $v_2 = 4$. Así pues un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$ sería

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Procedemos de la misma forma con $\lambda_2 = 3$. Planteamos el sistema

$$(\lambda_2 I_3 - A)\boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow (3I_3 - A)\boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2v_1 + v_2 - 4v_3 = 0 \\ -3v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ -2v_1 - v_2 + 4v_3 = 0 \end{array} \right.$$

Hallamos el rango de la matriz del sistema $3I_3 - A$. Para ello miramos a ver si hay una submatriz de orden 2 que sea no singular; i. e. con determinante distinto de cero. Hay varias, una de ellas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es 5. Así que $\operatorname{rang}(3I_3 - A) = 2$ y la dimensión del espacio de soluciones es 1. Usando la submatriz elegida, podemos despejar las incógnitas v_2 y v_3 en función de v_1:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2 + v_3 = 3v_1 \\ -v_2 + 4v_3 = 2v_1 \end{array} \right.$$

De aquí sacamos que $v_3 = v_1$ y $v_2 = 2v_1$. La solución general del sistema será

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Y dando a v_1 un valor distinto de cero, por ejemplo $v_1 = 1$, obtenemos un vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$:

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para obtener un vector propio asociado al tercer valor propio, $\lambda_3 = -2$, procederíamos de la misma forma.

En el ejemplo que acabamos de ver se aprecia que el método para obtener los valores propios y un vector propio asociado a cada uno de ellos es rutinario y se puede concretar de la siguiente forma: Dada la matriz A, de tamaño $n \times n$

1. Se calcula $\det(\lambda I_n - A)$ que es un polinomio de grado n mónico (i.e. el coeficiente del monomio λ^n es 1). A este polinomio se le llama **polinomio característico** de A.

2. Se calculan las raíces del polinomio caracerístico. Esto no es una tarea fácil en la práctica salvo para $n \leq 2$. Si el polinomio resulta tener raíces enteras, éstas se pueden obtener por tanteo o el método de Ruffini. Una vez obtenida una de tales raíces, digamos λ_0, se puede reducir el grado del polinomio característico dividiéndolo por $(\lambda - \lambda_0)$. Y continuar de esta forma mientras haya raíces enteras. Por lo general, se deben emplear métodos numéricos y ayuda de un ordenador para hallar las raíces del polinomio característico. El programa `Factoris` del sistema WIMS que se encuentra en `http://wims.unice.fr/wims/` es muy útil y fácil de usar. No se debe olvidar pinchar en `Menu of options` para seleccionar $\mathbb{C}$ como base de la factorización de los polinomios.

3. El polinomio característico tiene n raíces porque es de grado n, aunque éstas pueden ser complejas. Por ejemplo, si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
su polinomio característico es
$$\det(\lambda I_n - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$$
siendo $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria. Leáse el Anexo sobre números complejos si no se está familiarizado con ellos. Si hay raíces complejas todas las operaciones posteriores hay que hacerlas usando aritmética compleja.

   También puede suceder que entre las n raíces del polinomio característico haya valores repetidos. Si un número, digamos λ_i, aparece m_i veces como raíz del polinomio característico, se dice que λ_i es una raíz de multiplicidad m_i. Teniendo en cuenta que las raíces del polinomio característico son los valores propios de A, también se dice que λ_i es un valor propio de A de **multiplicidad algebraica** m_i. Es decir, la multiplicidad algebraica de un valor propio es su multiplicidad como raíz del polinomio característico: el número de veces que aparece como raíz de éste. Por ejemplo, el polinomio característico de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & -5 & 4 \\ -4 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
es
$$p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1$$
que se factoriza (usando `Factoris`) de la siguiente forma:
$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^3.$$

Por lo tanto A tiene dos valores propios distintos $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. El primero aperece 3 veces como raíz de $p(\lambda)$, así que su multiplicidad algebraica es 3. El segundo aparece solamente una vez; su multiplicidad algebraica es 1.

4. Para cada uno de los distintos valores propios se pueden calcular vectores propios. Para ello, si λ_0 es un valor propio del que se quieren calcular vectores propios, se plantea el sistema $(\lambda_0 I_n - A)\boldsymbol{v} = 0$. A este sistema se le llama **sistema característico** de A asociado o relativo al valor propio λ_0.

   El sistema característico es un sistema lineal homogéneo que es compatible (i.e. tiene solución distinta de la trivial porque $\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$) e indeterminado porque tiene infinitas soluciones. Cada una de ellas es un vector propio de A asociado al valor propio λ_0. Todos estos vectores propios junto con el vector 0, que es la solución trivial del sistema característico, forman un subespacio vectorial de vectores de n componentes. Es el espacio de soluciones del sistema característico, también llamado **subespacio propio** de A asociado al valor propio λ_0. La dimensión de este subespacio (esto es, el número de soluciones linealmente independientes del sistema característico) es $n - \operatorname{rang}(\lambda_0 I_n - A)$. A este número también se le llama **multiplicidad geométrica** de λ_0 como valor propio de A. **Hay tantos vectores propios linealmente independientes asociados a λ_0 como su multiplicidad geométrica**.

5. Para hallar tantos vectores propios linealmente independientes asociados a un valor propio λ_0 como su multiplicidad geométrica(es decir, para hallar una base del subespacio propio), se resuelve el sistema característico de la forma habitual:

   (i) Se calcula el rango de la matriz del sistema buscando una submatriz cuadrada de máximo tamaño con determinante distinto de cero. Supongamos $\operatorname{rang}(\lambda_0 I_n - A) = r$, lo que significa que la dimensión del espacio de soluciones es $n - r$.

   (ii) Utilizando la submatriz encontrada, se despejan las correspondientes r incógnitas en función de las restantes $n - r$.

   (iii) Se resuelve el correspondiente sistema compatible determinado $r \times r$ obteniendo la solución general del sistema que dependerá de $n - r$ incógnitas.

   (iv) Se dan valores apropiados a las $n - r$ incógnitas para obtener $n - r$ vectores linealmente independientes.

El siguiente ejemplo puede ilustrar todo el proceso anterior

Ejemplo 8.15 .- Hallar los valores propios y una base del correspondiente subespacio propio para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos su polinomio característico

$$\det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -4 & \lambda - 4 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)^3$$

Así que A sólo tiene un valor propio $\lambda = 2$ de multiplicidad algebraica 3. Vamos calcular tantos valores propios linealmente independientes como sea posible. Planteamos el sistema característico:

$$(\lambda I_3 - A)\boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow (2I_3 - A)\boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Se ve enseguida que sólo hay una columna que es linealmente independiente en $2I_3 - A$: la primera o la segunda. Por lo tanto, sólo podemos encontrar submatrices de tamaño 1×1 con determinante distinto de cero. (Esto también se puede ver planteando las 6 submatrices posibles de tamaño 2×2 y comprobando que sus determinantes son cero). Una de tales submatrices de tamaño 1×1 distintas de cero es, por ejemplo, la formada por el elemento en la posición $(1, 1)$: 2. Así

$$\operatorname{rang}(2I_3 - A) = 1$$

y la dimensión del espacio propio de A asociado a $\lambda = 2$ (o la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$) es 2. Debe haber dos vectores propios asociados a $\lambda = 2$ que son linealmente independientes. Calculémoslos utilizando la submatriz elegida. Despejamos v_1 en función de v_2 y v_3 en la primera ecuación:

$$2v_1 = -v_2$$

(v_3 no aparece en este caso porque está afectado por el coeficiente 0). La solución general del sistema característico será

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_2/2 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Ahora debemos dar valores a v_2 y v_3 para conseguir dos vectores linealmente independientes. Hay una forma de hacerlo que funciona bien: $v_2 = 1$, $v_3 = 0$ y al revés: $v_2 = 0$, $v_3 = 1$. De hecho lo que hay que hacer es escoger dos vectores de la forma

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

que sean linealmente independientes. La elección hecha corresponde a los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, una base del subespacio propio será:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo hemos visto que la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 2$ es 2 mientras que la algebraica es 3. Esto no es una casualidad, es verdad siempre que **la multiplicidad algebraica es mayor o igual que la multiplicidad geométrica**. Esta propiedad que la asumiremos sin demostración resultará ser my importante a la hora de hallar las soluciones de los sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes, que es para lo que estamos introduciendo todos estos conceptos.

Observaciones 8.16 .- Una consecuencia de la propiedad acerca de la desigualdad de las multiplicidades es que si λ_0 es un valor propio de A y su multiplicidad algebraica es 1, entonces, como la multiplicidad geométrica no puede ser mayor que la algebraica, y tampoco puede ser cero porque λ es valor propio y por lo tanto el sistema característico correspondiente siempre tiene solución no trivial, debe resultar que la multiplicidad geométrica del valor propio también es 1. Así, para valores propios simples (de multiplicidad algebraica 1) los correspondientes subespacios propios siempre son de dimensión 1; nunca habrá dos vectores propios linealmente independientes asociados a dicho valor propio.

Observaciones 8.17 .- (a) Con el programa `Matrix Calculator` de WIMS se pueden calcular rápidamente valores y vectores propios de matrices con total facilidad. Conviene utilizarlopara comprobar que los resultados que se obtienen a mano son correctos.

(b) Los programas `Factoris` y `Solucionador de sistemas lineales` facilitan muchísimo la tarea de calcular valores y vectores propios de matrices.

He aquí un ejemplo del modo correcto de proceder ante un problema tipo:

Ejemplo 8.18 .- Calcular los valores propios y bases de los subespacios propios para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & -5 & 4 \\ -4 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz ya ha aparecido anteriormente y hemos dicho que su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda + 1.$$

Veamos cómo calcularlo con ayuda de WIMS desde el principio. Al entrar en la página principal de WIMS, `http://wims.unice.fr/wims/`, escogemos la opción `Online calculators and plotters` o su equivalente en francés `Outils de calcul et de graphisme en ligne`. Y en la nueva página, una vez seleccionado el lenguaje castellano, pinchamos en `Matrix calculator`. Siguiendo las instrucciones que allí vienen escribimos la matriz A y seleccionamos `characteristic polynomial`. Comprobamos que el resto de opciones no están marcados y pinchamos en `Show` obteniendo:

$$\text{characteristic polynomial} = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$$

de modo que el polinomio característico es $p(\lambda)$.

A continuación calculamos sus raíces utilizando el programa `Factoris`. Para ello volvemos al menú de calculadores en línea y lo seleccionamos. Introducimos el polinomio en el cuadro correspondiente en la siguiente forma

```
x^4-2*x^3+2*x+1
```

Pinchamos en `Menu Options` y seleccionamos $\mathbb{C}$ como base para la factorización de polinomios. A continuación pinchamos en `factor` para hallar las raíces del polinomio. Obtenemos

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x + (1{,}0 + 0{,}0i))(x + (-1{,}0 + 0{,}0i))(x + (-1{,}0 + 0{,}0i))(x + (-1{,}0 + 0{,}0i))$$

Esto significa que las raíces son

$$\lambda_1 = 1 + 0 \cdot i = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1 + 0 \cdot i = -1,$$

la primera 3 veces. Por lo tanto $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad algebraica $q_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$ tiene multiplicidad algebraica $q_2 = 1$.

Calculamos vectores propios (tantos como podamos) para el valor propio $\lambda_1 = 1$. Para ello seleccionamos el calculador `Solucionador de sistemas lineales`. Y allí el `método matricial`. En el cuadro correspondiente a la matriz A escribimos la matriz

$$\lambda_1 I_4 - A = I_4 - A = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -10 & 6 & -4 \\ 4 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(Esto se puede automatizar usando el programa `Matrix calculator`, merece la pena estudiarlo cuando se va a realizar muchas veces). Escribimos en el cuadro correspondiente a la matriz B el vector cero

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y pinchamos en `resolver el sistema`. El programa escribe el sistema de forma explícita y a continuación pone

Este sistema tiene infinitas soluciones, las cuales son (con parámetros r_i): $\{x_1 = (r_2 + r_1)/2, x_2 = -r_1, x_3 = r_2, x_4 = r_1\}$.

Utilizando nuestra notación esto significa que la solución general del sistema $(\lambda_1 I_4 - A)\boldsymbol{v} = 0$ es

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} (v_2 + v_1)/2 \\ -v_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

Así pues, las soluciones dependen de dos parámetros v_1 y v_2. O lo que es lo mismo el subespacio de soluciones del sistema $(\lambda_1 I_4 - A)\boldsymbol{v} = 0$ es de dimensión 2. Podíamos haberlo sabido de antemano si, usando `Matrix calculator`, calculamos el rang$(\lambda_1 I_4 - A)$ (rango es rank en inglés). Habríamos visto que éste es 2, por lo que la dimensión del subespacio propio es $n - \text{rang}(\lambda_1 I_4 - A) = 4 - 2 = 2$. Entonces la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ es 2 y para conseguir dos vectores linealmente independientes; i.e., una base del subespacio propio, hay que dar valores apropiados a v_1 y v_2: debemos escoger dos vectores de la forma

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

que sean linealmente independientes. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así, sustituyendo en (8.18), obtendríamos los vectores propios

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si hacemos lo mismo con el valor propio $\lambda_2 = -1$, obtenemos que la dimensión del subespcio propio correspondiente es 1 y que la solución general del sistema característico $(\lambda_2 I_4 - A)\boldsymbol{v} =$ es

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \\ -2v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $v_1 = -1$ obtenemos un vector propio que genera todo el subespacio propio:

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos comprobar si estos resultados coinciden con los que proporciona `Matrix calculator` directamente. Escribiendo la matriz A original y seleccionando `Eigenvalues and eigenvectors`, y pinchando en `Show` obtenemos la siguiente tabla

Value	Multiplicity	Vector
-1	1	$(1, 0, 2, -1)$
1	3	$(1, 0, 2, 0), (0, 1, 1, -1)$

Casi todo coincide: los valores propios coinciden, el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$ es el mismo que el obtenido por nosotros. Lo mismo pasa con uno de los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$, pero el otro no. Esto no debe asustarnos. En realidad, los vectores propios que da el programa y los que obtenemos nosotros no tienen por qué coincidir: recordemos que nosotros obtenemos la solución general del sistema característico y después **elegimos** como queremos los parámetros. Dos personas diferentes pueden dar valores diferentes y ambas obtener respuetas correctas. Lo mismo pasa con el ordenador. Para estar seguros de que nuestro resultado es correcto, basta comprobar que el vector obtenido por nosotros

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y el dado por el programa `Matrix calculator`:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son vectores que corresponden a dar valores concretos a los parámetros de la solución general:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} (v_2 + v_1)/2 \\ -v_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

El nuestro corresponde a la elección: $v_1 = 2$ y $v_2 = 0$. Y el del programa a la elección $v_1 = -1$ y $v_2 = 1$. Por lo tanto ambas respuestas son correctas.