MATEMATIKA GEHIPENA II –2000-01-31ko AZTERKETA

LEHENENGO ARIKETA

A)

$$f(t)=\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(H(t)-H(t-2\pi)\right)$$

funtzioa emanik, non $H(t)$ jatorrian zentratutako maila (edo Heaviside) funtzioa den, bere adierazpen analitikoa

$$H(t)=\begin{cases}0 & \text{baldin } t<0 \text{ bada}\\ 1 & \text{baldin } t\geq 0 \text{ bada}\end{cases}$$

izanik, honako hauek eskatzen dira:

1) $f_i(t)$ funtzio berria, $f(t)$ren $(0,2\pi)$ luzapen ***bakoitia*** periodiko bihurtuz lortzen dena, grafikoki adieraztea. Bere periodoa adieraz ezazu.

(2 puntu)

2) $f_i(t)$ funtzioaren Fourier seriezko garapena.

- **Oharra**:

$$\left.\begin{aligned}\int\cos(at)\cos(bt)dt&=\frac{(a+b)\sin((a-b)t)+(a-b)\sin((a+b)t)}{2(a^2-b^2)}+K\\ \int\cos(at)\sin(bt)dt&=\frac{(a+b)\cos((a-b)t)+(a-b)\cos((a+b)t)}{2(a^2-b^2)}+K\end{aligned}\right\},\ a^2\neq b^2$$

(2 puntu)

B)

$$g(t)=\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(H(t+\pi)-H(t-\pi)\right)$$

funtzioa emanik, honakoak eskatzen dira:

1) $G(\omega)$, bere Fourier transformatua, kalkulatzea

(2,5 puntu)

2) Parsevalen teorema enuntziatzea.

(1 puntu)

3) Delako teorema hau $g(t)$ eta $G(\omega)$ funtzioei aplikatuz,

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos^2(\pi\omega)}{\left(1-4\omega^2\right)^2}d\omega$$

integralaren balioa kalkulatzea.

(2,5 puntu)

Astia: 45 minutu

MATEMATIKA GEHIPENA II –2000-01-31ko AZTERKETA

BIGARREN ARIKETA

A) Logaritmoaren **balio nagusia erabiliz**, hurrengo zenbaki konplexu hau era binomikotan adieraz:

$$A = \frac{-i}{1-i}\,\mathrm{Log}\left[\frac{1+i\tan(3a)}{1-i\tan(3a)}\right] \text{ non } a \in (0,\frac{\pi}{2}),\ a \neq \frac{\pi}{6} \text{ den}$$

(3 puntu)

B) ABC triangelu aldekidea (aldeberdina) hartzen da aintzakotzat. A erpina $3a(1+i),\ a > 0,$ zenbaki konplexuaren afixua dela jakinda, beste bi erpinen afixuak kalkula, AB aldea lehenengo koadrantearen erdikariaren gainean dagoela eta bere luzera $2\sqrt{2}$ dela kontutan hartuz. B eta C erpinak zati irudikaririk handiena eta txikiena dutenak dira, hurrenez hurren. Ez erabil zuzen edo zirkunferentziren ekuaziorik.

(3 puntu)

C) Aldagai konplexuko $f(z) = \cos(z)$ funtzioa emanda, ondorengoak eskatzen dira:

1. Zati erreala eta irudikaria ondorioztatzea, eta baita $f(z)$ ren modulua eta zeroak ere.
2. Zein balioren artean aldatzen da $f(z)$ ren modulua?.
3. Zein puntutan da maximoa $f(z)$ ren modulua z puntua $x^2 + 4\pi^2 y^2 \leq 4\pi^2$ ekuazioak emandako planoko eskualdean bada?

(4 puntu)

Astia: 45 minutu

---

15 minutuko ATSEDENALDIA (2 ariketa falta dira)

MATEMATIKA GEHIPENA II –2000-01-31ko AZTERKETA

HIRUGARREN ARIKETA

A) Kalkula, $a \in \Re$ balioaren arabera:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 + e^{\mathrm{i} \cdot \mathrm{x}}}{(x - a \cdot i) \cdot (x + i)} \, dx, \quad \text{(CBN)}$$

(3 puntu)

B) Kalkula $I = \oint_C \frac{e^{i/(z-1)}}{z} dz$, $C: |z| = 2$ izanik (norantza positibotan ibilita).

(3 puntu)

C) $f(at)$ funtzioaren Fourier transformatua $F(\omega)$ren funtziotan **ondoriozta**, ($a \in \Re, a \neq 0$), $F(\omega)$ funtzioa $f(t)$ren transformatua bada.

(2,5 puntu)

D) Bedi *f* z_0 ren ingurune batean analitikoa den funtzio bat. Froga

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_0} f(z) \, dz = 0$$

dela, C_0 z_0 zentruko, ε erradioko eta α angeluko zirkunferentzi arku bat izanik.

(1,5 puntu)

Astia: 50 minutu.

MATEMATIKA GEHIPENA II –2000-01-31ko AZTERKETA

LAUGARREN ARIKETA

A) Honako funtzio honen Laurent garapena lor, $z$ren berreduratan eta $\underline{z = 3/2}$ **puntuan baliozkoa** dena:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z} + \frac{1}{4 - z^2}$$

(2,5 puntu)

B) Kalkula, **urratsak labur justifikatuz**, hurrengo integral hau:

$$I = \oint_{C^-} \left[\bar{z} + \mathrm{Log}(z+1) \right] dz \quad \text{non} \quad C: |z-2| = 1 \text{ den}$$

(norantza negatibotan ibilita). **Balio nagusiak har**.

(2,5 puntu)

C) Kalkula $I = \oint_C \frac{\sinh^2(z)}{z^4}\, dz$, non $C: |z| = 1$ (norantza positibotan ibilita).

(2,5 puntu)

D) $f(z)$ ren z_0 ko hondarra kalkulatzeko erabiltzen den formula **ondoriozta**, z_0 2 ordenako poloa izanik.

(2,5 puntu)

Astia: 50 minutu.