AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS-PRIMERA PARTE-

EXAMEN 4/JUNIO/01

NOTA: La nota obtenida en esta primera parte se corresponde con el 80% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas.

El examen correspondiente a la segunda parte (laboratorio) se realizará esta tarde en el Centro de Cálculo.

PRIMER EJERCICIO

A) Dada la función:

$$f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{(z-2i)^2} + Log(z)$$

i) Indicar, justificando la respuesta, cuántos desarrollos distintos en potencias de **(z-2i)** admite dicha función, así como los dominios en que son válidos dichos desarrollos.

ii) De los desarrollos anteriores calcular el desarrollo válido en el punto (3/2+2i).

Nota: considerar valores principales.

(3.5 puntos)

B) Calcular **razonadamente**

$$\operatorname{Res}[f(z)\cdot g(z), a]$$

siendo g una función entera (analítica en todo el plano complejo) y f tiene en a:

i) un polo simple, con $\operatorname{Res}[f(z), a] = 5$

ii) un polo de orden k, con parte principal:

$$\frac{1}{z-a} + \frac{1}{(z-a)^2} + \dots + \frac{1}{(z-a)^k}$$

(3.5 puntos)

C) Calcular **razonadamente**, **indicando las propiedades utilizadas**, la siguiente integral:

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(b\cdot x)}{(x^2+1)\cdot(x-i)}\, dx, \text{ con } b \in \Re$$

(3 puntos)

Tiempo: 1h 15m

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS-PRIMERA PARTE-

EXAMEN 4/JUNIO/01

SEGUNDO EJERCICIO

Dada la función $f(t) = t\cos(t)$, se pide:

A) Representarla gráficamente en el intervalo [-2π,2π].

(1 punto)

B) Obtener una **serie de Fourier** que coincida con $f(t)$ en el intervalo (-π,π).

(1.5 puntos)

Nota:para n natural:

$$\int t\cos(t)\operatorname{sen}(nt)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{t\cos(n-1)t}{n-1} - \dfrac{t\cos(n+1)t}{n+1} + \dfrac{\operatorname{sen}(n-1)t}{(n-1)^2} + \dfrac{\operatorname{sen}(n+1)t}{(n+1)^2}\right) & \text{si } n \neq 1 \\ -\dfrac{1}{4}t\cos(2t) + \dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

$$\int t\cos(t)\cos(nt)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t\operatorname{sen}(n-1)t}{n-1} + \dfrac{t\operatorname{sen}(n+1)t}{n+1} + \dfrac{\cos(n-1)t}{(n-1)^2} + \dfrac{\cos(n+1)t}{(n+1)^2}\right) & \text{si } n \neq 1 \\ \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t) + \dfrac{1}{8}\cos(2t) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

C) Representar gráficamente $\varphi_1(t)$, la suma de la serie hasta el término n=1, y $\varphi(t)$, la suma de todos los términos de la serie; rellenar la siguiente tabla con los valores de las funciones en los puntos indicados:

	t=0	*t=- π/2*	*t=18 π*
$f(t)$			
$\varphi_1(t)$			
$\varphi(t)$			

(1 punto)

D) Obtener la expresión de la transformada de Fourier de la función Delta de Dirac $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$.

(1 punto)

E) Dada la función $g(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(3t)$, calcular su **transformada de Fourier** y representar su parte real e imaginaria.

(1.5 puntos)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS-PRIMERA PARTE-

EXAMEN 4/JUNIO/01

SEGUNDO EJERCICIO

F) Utilizando la **transformada de Laplace**, resolver $y(t)$ en la ecuación:

$$y'(t) + y(t) = \delta(t-2)$$

para $y(0)=0$ y para $y(0)$ cualquiera.

Nota:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(t)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2} & \forall s > 0 \\ \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} & \forall s > 0 \\ \mathcal{L}\{H_a(t)\} = \dfrac{e^{-as}}{s} & \forall s > 0 \end{cases}$$

(4 puntos)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS-PRIMERA PARTE-

EXAMEN 4/JUNIO/01

TERCER EJERCICIO

A) Calcular **razonadamente** el dominio de analiticidad de la función

$$f(z) = Log\left(\frac{1}{z}\right)$$

siendo

$$Log(z) = L(\rho) + i \cdot \theta, \quad \theta \in [\pi/4, 9\pi/4]$$

(2.5 puntos)

B) Calcular **razonadamente** la siguiente integral, siendo f una función entera (analítica en todo el plano complejo) y $r \in \Re$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(r \cdot e^{i\theta})}{Sh^2(e^{i\theta}) + 1} \, d\theta$$

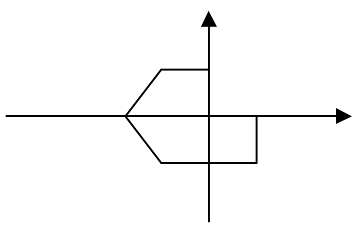
(2.5 puntos)

C) Calcular **razonadamente** las siguientes integrales:

i) $$\oint_{|z|=1} \frac{z^2 + sen(z-\pi) + z^3 \cdot Log(z)}{z^4} dz$$

Nota: considerar valores principales.

ii) $\int_C \frac{1}{z} \, dz$, siendo C el contorno de la figura:



(2.5 puntos)

D) Hallar **razonadamente** la función analítica (o las funciones analíticas) tal que

$$\text{Im}[f'(z)] = 2 \cdot y$$

verificando que $f(0) = 0$.

(2.5 puntos)

Tiempo: 1h