MATEMATIKA GEHIPENA – LEHENENGO ZATIA

2001-6-4ko AZTERKETA

OHARRA: lehen zati honetan lortutako nota Matematika Gehipena ikasgaiko azken notaren %80ari dagokio.

Bigarren zatiari dagokion azterketa (laborategia) gaur arratsaldean izango da, Kalkulu Zentroan.

LEHENENGO ARIKETA

A)

$$f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{(z-2i)^2} + \mathrm{Log}(z)$$

funtzioa emanik,

i) Adieraz ezazu, erantzuna arrazoituz, zenbat **(z-2i)** berredurazko garapen desberdin onartzen dituen, hala nola garapen horiek baliozkoak diren eremuak.

ii) Aurreko garapenetatik, kalkula ezazu (3/2+2i) puntuan baliozkoa dena.

Oharra: balio nagusiak har itzazu.

(3.5 puntu)

B) Kalkula ezazu **arrazoituz**

$$\mathrm{Res}[f(z)\cdot g(z), a]$$

g funzio oso bat izanik (plano konplexu osoan analitikoa) eta f -k a puntuan:

i) polo bakun bat badu, non $\mathrm{Res}[f(z), a] = 5$

ii) *k* ordenako polo bat badu, honako zati nagusi honekin:

$$\frac{1}{z-a} + \frac{1}{(z-a)^2} + ... + \frac{1}{(z-a)^k}$$

(3.5 puntu)

C) Kalkula ezazu **arrazoituz**, **erabilitako propietateak adieraziz,** honako integral hau:

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(b\cdot x)}{(x^2+1)\cdot(x-i)}\, dx \text{, non } b \in \Re$$

(3 puntu)

Astia: 1o 15m

MATEMATIKA GEHIPENA – LEHENENGO ZATIA

2001-6-4ko AZTERKETA

BIGARREN ARIKETA

$f(t) = t\cos(t)$ funtzioa emanik, honakoak eskatzen dira:

A) Irudika ezazu grafikoki [-2 π ,2 π] tartean.

(1 puntu)

B) (- π, π) tartean $f(t)$ rekin bat datorren **Fourier serie** bat lor ezazu.

(1.5 puntu)

Oharra:n arrunta bada:

$$\int t\cos(t)\sin(nt)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{t\cos(n-1)t}{n-1} - \dfrac{t\cos(n+1)t}{n+1} + \dfrac{\sin(n-1)t}{(n-1)^2} + \dfrac{\sin(n+1)t}{(n+1)^2}\right) & n \neq 1 \text{ bada} \\ -\dfrac{1}{4}t\cos(2t) + \dfrac{1}{8}\sin(2t) & n = 1 \text{ bada} \end{cases}$$

$$\int t\cos(t)\cos(nt)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t\sin(n-1)t}{n-1} + \dfrac{t\sin(n+1)t}{n+1} + \dfrac{\cos(n-1)t}{(n-1)^2} + \dfrac{\cos(n+1)t}{(n+1)^2}\right) & \text{si } n \neq 1 \\ \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{1}{4}t\sin(2t) + \dfrac{1}{8}\cos(2t) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

C) Irudika itzazu grafikoki $\varphi_1(t)$, n=1 gaira arteko batura, eta $\varphi(t)$, serieko gai guztien batura; hurrengo taula bete, adierazitako balioetako funtzioen balioez:

	t=0	*t=- π/2*	*t=18 π*
$f(t)$			
$\varphi_1(t)$			
$\varphi(t)$			

(1 puntu)

D) $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$ Dirac Deltaren Fourier transformatuaren adierazpena lor ezazu.

(1 puntu)

E) $g(t) = \cos(t) + \sin(3t)$ funtzioa emanik, bere **Fourier transformatua** kalkula, eta bere zati erreala eta irudikaria irudika itzazu.

(1.5 puntu)

MATEMATIKA GEHIPENA – LEHENENGO ZATIA

2001-6-4ko AZTERKETA

BIGARREN ARIKETA

F) **Laplace transformatua** erabiliz, aska ezazu hurrengo ekuazioan $y(t)$

$$y'(t) + y(t) = \delta(t-2)$$

$y(0)=0$ denean eta $y(0)$ edozein balio denean.

Oharra:

$$\begin{cases} ☹\{\sin(t)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2} & \forall s > 0 \\ ☹\{\cos(t)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} & \forall s > 0 \\ ☹\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a} & \forall s > a \end{cases}$$

(4 puntu)

Astia: 1o

MATEMATIKA GEHIPENA – LEHENENGO ZATIA

2001-6-4ko AZTERKETA

HIRUGARREN ARIKETA

A) Kalkula ezazu **arrazoituz** funtzio honen analitikotasun eremua

$$f(z) = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{z}\right)$$

non

$$\mathrm{Log}(z) = L(\rho) + i \cdot \theta, \quad \theta \in [\pi/4, 9\pi/4]$$

(2.5 puntu)

B) Kalkula ezazu **arrazoituz** honako integral hau, f funtzio oso bat (plano konplexu osoan analitikoa) eta $r \in \Re$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(r \cdot e^{i\theta})}{\sinh^2(e^{i\theta}) + 1}\, d\theta$$

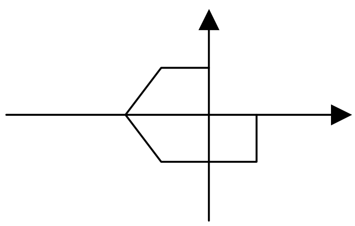
(2.5 puntu)

C) Kalkula ezazu **arrazoituz** honako integral hauek:

i) $$\oint_{|z|=1} \frac{z^2 + \sin(z-\pi) + z^3 \cdot \mathrm{Log}(z)}{z^4}\, dz$$

Oharra: balio nagusiak har itzazu.

ii) $\int_C \frac{1}{z}\, dz$, *C* irudiko mugaldea izanik:



(2.5 puntu)

D) Bila ezazu/itzazu **arrazoituz**

$$\mathrm{Im}[f'(z)] = 2 \cdot y$$

betetzen duen funtzio analitikoa (edo funtzio analitikoak), gainera $f(0) = 0$ egiaztatzen delarik.

(2.5 puntu)

Astia: 1o