MATEMATIKA GEHIPENA

2002-6-3ko AZTERKETA

OHARRA: zati honetan lortuko den nota Matematika Gehipena ikasgaiko azken notaren 75% izango da. Ikasgaia gainditzeko zati bakoitzean 4 edo nota handiago bat lortu behar da.

LEHENENGO ARIKETA

A) $f(z)=\dfrac{7z-2}{z\cdot(z+1)\cdot(z-2)}$ funtzioa emanik:

1. Bila itzazu (z + 1) berredurazko Laurent seriez gara daitekeen konbergentzi eremu ezberdinak.

2. Horien guztien artean, kalkula ezazu $1<|z+1|<3$ eraztunean balio duen garapena.

3. Lortu diren emaitzetatik abiatuz, kalkula ezazu

$$\oint_C \frac{7z-2}{z\cdot(z-2)\cdot(z+1)^{n+2}}\,dz$$

integralaren balioa *C* $1<|z+1|<3$ eremuan edukita dagoen edozein kurba itxi bakun izanik, erabilitako arrazoibide teorikoak azalduz.

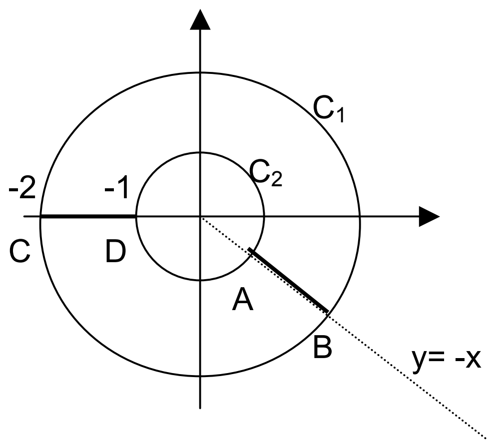
(4 puntu)

B) Kalkula ezazu, hondarrak eta poloak gaiko teoria erabiliz eta emandako urrats guztiak zuzen azalduz, ondoko integral hau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(ix)}{(x^2+1)\cdot(x^2-1)}\,dx$$

(4 puntu)

C) $\oint \dfrac{z}{\bar{z}}\,dz$ integralaren balioa kalkula irudiko mugaldearen gainean.



(2 puntu)

Astia: 1 ordu

MATEMATIKA GEHIPENA

2002-6-3ko AZTERKETA

BIGARREN ARIKETA

A1) $f(t) = e^{-t} \cdot \mathrm{H}(t-2)$ funtzioa emanda, grafikoki adieraz eta bere Laplace transformatua kalkula ezazu.

A2) $y'' + 3y' + 2y = e^{-t} \cdot H(t-2)$ ekuazio diferentziala emanik, $y(0) = 0$ eta $y'(0) = 1$ hastapen baldintzekin batera, ondokoak eskatzen dira :

i) Bi atalei Laplace transformatua aplikatzea, eta $Y(s) = \mathrm{L}[y(t)]$ bakantzea.

ii) Ekuazioaren *y*(*t*) ebazpen partikularra lortzea.

A3) Enuntzia itzazu era orokor eta oso batez aurreko bi ataletan aplikatu dituzun Laplace transformatuaren propietateak.

Oharra: behar diren Laplace transformatu guztiak $\mathrm{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$ harremanetik atera daitezke, Laplace transformatuaren propietateak aplikatuz.

(7 puntu)

B) Bitez *f*(*t*) = *t*, eta *g*(*t*) berarekin [0, 2π) tartean bat datorren 2π periododoko luzapen periodikoa. *g*(*t*)ren Fourier seriezko garapena hauxe da :

$$S(t) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nt)$$

1. Azal ezazu zergatik duen lortu den seriezko garapenak sinuak gehi konstante bat.

2. Arrazoituz, taula honetako balioak bete:

t	0	π	2π	18π	21π
f(*t*)					
g(*t*)					
S(*t*)					

3. Irudika itzazu, hiru grafiko ezberdinetan, *g*(*t*), *f*(*t*) eta *S*(*t*) [-6π, 6π] tartean.

4. Kalkula ezazu, *S*(*t*) garapenetik abiatuz, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ zenbakizko seriea.

(3 puntu)

Astia: 1 ordu

MATEMATIKA GEHIPENA

2002-6-3ko AZTERKETA

HIRUGARREN ARIKETA

A) $$f(z)=\frac{1}{1-\mathrm{Log}(1-4z^2)}+\frac{1}{\sin(z)+i}$$

funtzioaren puntu singularrak irudika itzazu $Log\, z = L\rho + i\cdot\theta$, $\theta\in[2\pi,4\pi)$ izanik.

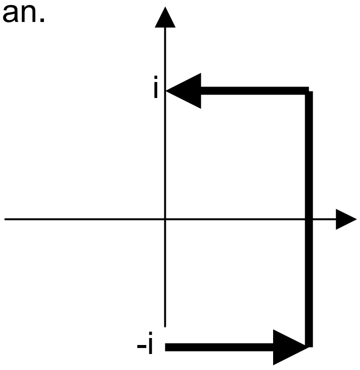
(3 puntu)

B) $z_0 = 1+i$ puntua $f(z) = \mathrm{Log}\ z = \mathrm{L}\rho + i\theta$ funtzioaren puntu singularra da, $\theta \in [\pi/4, 9\pi/4)$ hartzen bada. Zergatik ez da funtzioa analitikoa puntu honetan? Froga ezazu.

(2 puntu)

C) $f(z)=\dfrac{e^{1/(x+iy)}}{(ix-y)^2}$ funtzioa emanda, $z = x + iy$ izanik, ondokoak eskatzen dira:

1. Puntu singularrak kalkula.
2. $\int_C f(z)\,dz$ arrazoituz kalkula, C irudiko mugaldea izanik. Emaitza era binomikotan eman.



(2.5 puntu)

D) Funtzio periodiko baten Fourier seriearen

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{i\omega_n t}$$

era konplexua lor ezazu, era trigonometrikotik abiaturik, eta c_n koefizienteak kalkulatuz.

(2.5 puntu)

Astia: 1 ordu