AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – EXAMEN FINAL
20 DE SEPTIEMBRE DE 2002

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

En cada uno de los ejercicios se deberá explicar correctamente los pasos.

EJERCICIO 1º

A) 1º.- Hallar la forma compleja de la serie de Fourier de

$$f(t)=\begin{cases} 0\ , & -1<t\le 0 \\ 1\ , & 0<t\le 1 \end{cases} \quad , \quad con \quad f(t+2)=f(t)$$

2º.- A partir del resultado anterior, obtener la forma real de dicha serie (forma trigonométrica)

(3 puntos)

B) B1) Enunciar el teorema de Convolución en el tiempo para la transformada de Fourier.

B2) Sean

$$f(t)=\begin{cases} e^{t} & t\le 0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \text{ y } g(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-t} & t\ge 0 \end{cases} \text{ , se pide:}$$

1º.- Calcular $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$, y $G(\omega)=\mathcal{F}\left[g(t)\right]$

2º.- Calcular la convolución de f y g : h(t) = f(t)*g(t).

3º.- Calcular $H(\omega)=\mathcal{F}\left[h(t)\right]$, en primer lugar directamente, y a continuación, mediante el teorema de convolución.

Nota: $\int_0^{\infty} e^{at}\cdot sen(bt)dt=\dfrac{b}{a^2+b^2}$; $\int_0^{\infty} e^{at}\cdot \cos(bt)dt=\dfrac{-a}{a^2+b^2}$

(7 puntos)

Tiempo : 50 minutos

EJERCICIO 2º

A) Calcular los afijos de los tres vértices A, B, y C de un triángulo isósceles sabiendo que :

- Los afijos de los vértices A, B del lado desigual son las raíces de la ecuación :

$$x^2-(4+4i)\,x+10i=0$$

- La longitud de la altura correspondiente al vértice C es el doble de la longitud del lado AB.
- El vértice C es el de menor componente imaginaria.

Nota : Realizar los cálculos utilizando únicamente operaciones elementales con números complejos.

(3.5 puntos)

B) Hallar una cota superior del módulo de la integral :

$$\int_C \frac{Log(z)}{z^2-1}dz$$

siendo C el arco de circunferencia de radio R , con R < 1, y centro el origen que va desde el punto cuyo argumento es 0 hasta el punto cuyo argumento es 75º.

(3.5 puntos)

C) Dada la función f(z) = $(z+1+2i)^2$, ¿En qué puntos de la región | z | ≤ 2√5 alcanza los valores máximo y mínimo | f(z) | ?

(3 puntos)

Tiempo : 1 hora.

Después de estos dos ejercicios habrá un descanso de 15 minutos y a continuación un tercer ejercicio.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – EXAMEN FINAL
20 DE SEPTIEMBRE DE 2002

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

En cada uno de los ejercicios se deberá explicar correctamente los pasos.

EJERCICIO 3º

A) Hallar $\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]$, siendo $F(\omega)=\dfrac{sen(a\omega)}{\omega^2+1}$, con a > 0 y t > a.

Indicar las propiedades utilizadas.

(3.5 puntos)

B) Desarrollar en serie de potencias de z , $f(z)=\dfrac{1}{e^z}+sen^2\left(\dfrac{1}{2z}\right)$, indicando la región de validez del desarrollo.

(2.5 puntos)

C) Calcular : $\oint_C \dfrac{1}{(e^z-i)^3}dz$, siendo C : $\left|z-\dfrac{5\pi i}{2}\right|=1$.

(4 puntos)

Tiempo : 1 hora 10 minutos.