

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 18/SEPTIEMBRE/04

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

A) A1) Definir analítica y gráficamente el pulso rectangular unitario, centrado en el origen y de duración T.

A2) Sea $f(t)$ la extensión periódica que coincide con el pulso rectangular del apartado anterior en el intervalo $[-T, T]$. Se pide:

1º.- Hallar el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$.

2º.- Hallar la transformada de Fourier del pulso rectangular del apdo. A1.

3º.- Hallar la transformada de Fourier de la función $g(t) = \frac{\text{sen}(at)}{at}$ $a \in \mathbb{R}$.

4º.- Hallar la suma de la serie: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

5º.- Calcular : $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2(at)}{a^2 t^2} dt$ $a \in \mathbb{R}$.

(8.5 Puntos)

B) Determinar el dominio de analiticidad de :

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + \sqrt{3}y - i\sqrt{3}x - i)^5}$$

(3 Puntos)

C) Resolver la ecuación:

$$\text{tg } z = \frac{1}{\sqrt{3} - 2i}$$

(3.5 Puntos)

Tiempo: 1h.30m.

Nota: Después de este ejercicio habrá un descanso de 10 minutos y un segundo ejercicio.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 18/SEPTIEMBRE/04

SEGUNDO EJERCICIO

A) A1) Enunciar el teorema integral (o fórmula integral) de Cauchy y el teorema relativo a las sucesivas derivadas de una función analítica.

A2) Sea $f(z) = \frac{\cos z}{(z - \pi/2)^3}$. Desarrollar $f(z)$ en un entorno reducido de $z_0 = \pi/2$, y

contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

1º.- ¿De qué tipo es la serie resultante?

2º.- ¿Cuál es su región de convergencia?

3º.- ¿De qué tipo es la singularidad de $f(z)$ en z_0 ?

A3) Calcular, aplicando los teoremas del apdo. A1) la siguiente integral:

$$\oint_{|z-\pi/2|=1} f(z) dz$$

Comprobar el resultado anterior aplicando el teorema de los residuos.

(8 Puntos)

B) Hallar una cota superior de:

$$\left| \oint_{|z|=2} \frac{\text{Log } z}{z^2} dz \right|$$

tomando la siguiente determinación de la función logaritmo :

$$\text{Log}(z) = \text{Log}|z| + i \cdot \text{Arg}(z) \quad , \quad -\pi/2 < \text{Arg}(z) \leq 3\pi/2$$

(2 Puntos)

C) Calcular razonadamente, indicando los teoremas que se aplican:

$$\oint_{|z|=2} \frac{|z| \cdot e^z}{z^2} dz$$

(2 Puntos)

D) Calcular :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \cdot \cos 2x}{(x+2)} dx$$

(3 Puntos)

Tiempo : 1h.30m.