AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 28/JUNIO/05

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

A) Resolver la siguiente integral, aplicando los teoremas de Cauchy:

$$\oint_C \frac{e^{nz}-e^{-nz}}{z^n}dz \quad , \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \quad (n \neq 0) \\ C: z = e^{i\theta} \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

B) Hallar los valores del máximo y mínimo de $|f(z)|$ en $|z| \leq 2$, siendo $f(z) = \frac{z^2-2z+1}{e^z}$

C) Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ el desarrollo en serie de Taylor de $f(z) = \frac{z^2-1}{1+\cos(\pi z)}$ en un entorno del origen. Se pide:

1. Calcular los coeficientes a_0 , a_1 y a_2.
2. Clasificar las singularidades de f(z).
3. Hallar el radio de convergencia de la serie.
4. Calcular

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{1+\cos(\pi z)}dz$$

D) Demostrar la fórmula para calcular :

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_0} f(z)dz$$

Siendo f una función con un polo simple en z_0 , y C_0 un arco de circunferencia de radio r con centro en z_0 correspondiente a un ángulo α.

Tiempo : 1 h.

(Después de este ejercicio habrá un descanso de 10 minutos)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 28/JUNIO/05

SEGUNDO EJERCICIO

A) Dada una señal, representada matemáticamente por una función f(t), se denomina "contenido en energía de la señal" a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

Se considera la señal representada por $f(t) = \dfrac{sen(3t)}{t}$. Calcular, utilizando la transformada de Fourier, su contenido en energía. Enunciar las propiedades de la transformada de Fourier utilizadas así como los teoremas aplicados.

(4 puntos)

B) Contestar **razonadamente** si las siguientes cuestiones son verdaderas o falsas:

1. Si una raíz cuarta de z es z_1, también son raíces cuartas los complejos iz_1 , $-z_1$ y $-iz_1$.
2. El valor de $z = 1^{1+i}$ es 1.
3. La función $f(z) = x^3 - i\left(y-1\right)^3$ es analítica en z = i.
4. Siendo $u(x,y) = x \cdot y^2$, puede obtenerse una función v(x,y) tal que f(z) = u(x,y) + i v(x,y) sea entera.

(2 puntos)

C) De una función entera, f(z) = u + i v, se sabe que $u + v = x^2 - y^2 - 2xy$ y que f(i) = 1 – 2 i. Hallar las funciones u(x,y) y v(x,y) y expresar f(z) en función de z.

(2 puntos)

D) Resolver la ecuación : $\operatorname{sen}(z) - \cos(z) = i$

(2 puntos)

Tiempo : 1 h.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 28/JUNIO/05

TERCER EJERCICIO

A) Representar gráficamente la función periódica f(x), de menor periodo posible **T**, que coincide con $y(x)=x^2+1$ en el intervalo (0,a) y tiene como desarrollo en serie de Fourier :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} sen\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)x\right]$$

¿Cuáles son los valores de **T** y **a**?

¿Qué valores toman f(x) e y(x) para x= 2, 5 y 47 ?

Plantear la integral correspondiente al cálculo de b_{2n+1} explicitando la función subintegral y los límites de integración.

4 puntos

B) Resolver la siguiente ecuación diferencial, aplicando la transformada de Laplace:

$$y''+2y'+5y=e^{-t}\cdot sen(t)\ ,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

3 puntos

C) C1) Definir la convolución de funciones y enunciar el teorema de convolución para la transformada de Laplace.

C2) Calcular la siguiente transformada inversa aplicando el teorema de convolución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]$$

3 puntos

NOTA:

$$\mathcal{L}\left[sen(at)\right]=\frac{a}{s^2+a^2}\quad \forall s>0\ ;\ \mathcal{L}\left[\cos(at)\right]=\frac{s}{s^2+a^2}\quad \forall s>0$$

Tiempo : 1 h.