AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 13/SEPTIEMBRE/05

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

A1) Definir la transformada de Laplace de una función f(t) y enunciar las condiciones que debe cumplir f(t) para que exista su transformada.

A2) Sea $f(t)=\begin{cases} 3 & 0<t<6 \\ e^{-2t} & 6<t \end{cases}$, se pide:

1º.- Calcular $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ mediante la definición.

2º.- Calcular $\mathcal{L}\left[H(t)\right]$ siendo H(t) la función escalón: $H(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$

3º.- Definir f(t) utilizando la función escalón.

4º.- Calcular $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ a partir de la definición del apdo. anterior y utilizando propiedades de la transformada de Laplace.

5º. Enunciar las propiedades de la Transformada de Laplace utilizadas en el apdo. anterior.

(5 puntos)

B) Siendo H(t) la función escalón, se pide:

1º.- Representar gráficamente las funciones: $\begin{cases} f(t)=H\left(\cos(t)\right) \\ y(t)=sen(t)\cdot f(t) \end{cases}$

2º.- Desarrollar en serie de Fourier la función y(t)

(3 puntos)

C) C) Obtener la expresión analítica, y representar gráficamente, la función : $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{sen^2(\omega)}{\omega^2}\cdot e^{-i\omega}\right]$ a partir de la transformada de la función pulso rectangular : $\Pi_T(t)=\begin{cases} 1 & |t|<T/2 \\ 0 & |t|>T/2 \end{cases}$,

$\mathcal{F}\left[\Pi_T(t)\right]=2\dfrac{sen(\omega T/2)}{\omega}$ indicando las propiedades de la transformada de Fourier que se hayan utilizado.

(5 puntos)

D) Resolver la siguiente ecuación, dando el resultado en forma binómica:

$$(1+z)^5=(1-z)^5$$

(2 puntos)

Tiempo : 1 h. 30 m.

(Después de este ejercicio habrá un descanso de 10 minutos)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 13/SEPTIEMBRE/05

SEGUNDO EJERCICIO

A1) Enunciar el teorema de Laurent

A2) Desarrollar en potencias de (z-1) la siguiente función indicando el círculo de convergencia.

$$f(z) = \cos^2\left(\frac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)^2}\right)$$

A3) A partir de los apartados anteriores, calcular la integral;

$$\oint_{|z-1|=2} (z-1)^7 \cdot \cos^2\left(\frac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)^2}\right) dz$$

(4 puntos)

B) **Utilizando los teoremas de Cauchy**, calcular:

$$\oint_{|z|=1} \frac{Sh(n \cdot z)}{z^n} dz \ , \ \ n \in \mathbb{Z}$$

(3.5 puntos)

C) Hallar el Valor Principal de Cauchy de :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \cdot sen(3x) \cdot \cos(3x)}{(x^2+1)(x-1)} dx$$

(3.5 puntos)

D) Calcular el valor medio de la parte imaginaria de :

$$f(z) = i \cdot (z^2 - z)$$

sobre la circunferencia : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$.

(2 puntos)

E) Siendo z = x+i y, determinar la relación entre x e y para que el módulo de cos(z) sea igual a 1.

(2 puntos)

Tiempo 1 h. 30 m.