AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
3 DE FEBRERO DE 2006

- ***EJERCICIO 3***

A) Se considera la ecuación diferencial : $y' + y = g(t)$ que tiene como solución particular $y_1(t)$ tal que: $\mathcal{L}\left[e^t \cdot y_1(t)\right] = \dfrac{9}{s^3 - 6s^2 + 9s}$. Se pide hallar:

1º.- $Y_1(s)$. 2º.- $y_1(t)$. 3º.- $G(s)$. 4º.- $g(t)$.

(3.5 puntos)

B) **Enunciar y demostrar** el teorema de convolución en el dominio del tiempo para la transformada de Fourier.

(3 puntos)

C) Sean las funciones:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ -1 & -1 < t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \quad y \quad g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ sen(\pi t) & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \text{, se pide :}$$

1º.- Definirlas utilizando la función escalón.

2º.- Calcular y representar gráficamente la convolución de estas dos funciones : h(t) = f(t)*g(t).

(3.5 puntos)

Tiempo 45m.

- ***EJERCICIO 4***

A) Sea f(x) una función periódica de periodo T y $\varphi(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\dfrac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\dfrac{2n\pi x}{T}\right)$ su desarrollo en serie de Fourier. ¿Qué simplificaciones se obtienen en cada uno de los siguientes supuestos?. Indicar, en cada caso, las expresiones analíticas para el cálculo de los coeficientes de la serie.

1º.- $\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(x + T/2) = f(x) \end{cases}$. 2º.- $\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(x + T/2) = -f(x) \end{cases}$

3º.- $\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ f(x + T/2) = f(x) \end{cases}$ 4º.- $\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ f(x + T/2) = -f(x) \end{cases}$

Representar gráficamente, en cada caso, una función que verifique las condiciones dadas.

(3 puntos)

B) B1) Utilizando los resultados del apartado anterior, obtener un desarrollo $\varphi_1(x)$, en serie de senos, que coincida en [0, c] con la función

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le c/2 \\ c - x & c/2 \le x \le c \end{cases}$$

B2) Tomando el mínimo período posible, obtener un desarrollo $\varphi_2(x)$ en serie de cosenos que coincida con f(x) en [0, c].

B3) Usando la simetría de la función, indicar qué términos del desarrollo obtenido en B2) podemos prever que se anulan. Razonar la respuesta y plantear las integrales correspondientes a los términos que no se anulan, explicitando analíticamente el integrando.

B4) Calcular, a partir de los resultados anteriores, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-2}$

Nota: $\int x \cdot sen(ax)dx = \dfrac{sen(ax)}{a^2} - \dfrac{x \cdot \cos(ax)}{a} + C$; $\int x \cdot \cos(ax)dx = \dfrac{\cos(ax)}{a^2} + \dfrac{x \cdot sen(ax)}{a} + C$

(7 puntos)

Tiempo 45m.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
3 DE FEBRERO DE 2006

- ***EJERCICIO 1***

A) Los afijos de las raíces z_1 y z_2 de la ecuación : $z^2-(3+4i)\cdot z+(-1+7i)=0$, son el centro y el punto medio del lado $\overline{AB}$ de un hexágono regular respectivamente. Hallar los afijos de los vértices A y B, sabiendo que $\operatorname{Im}(z_1)<\operatorname{Im}(z_2)$.

(6 puntos)

B) Sea $u(x,y)=a\,x^2+b\,y^2-x \quad con \quad a\in\mathbb{N}\ (\ a\neq 0\ )\ \ y\ \ b\in\mathbb{Z}$.

1º.- Hallar la relación entre a y b para que u(x,y) sea la parte real de una función entera.

2º.- Considerando el menor valor posible de a, hallar todas las funciones v(x,y) armónicas conjugadas de u(x,y).

(4puntos)

Tiempo : 45 m.

- ***EJERCICIO 2***

A) Sean $f(z)=x^3-3x\,y^2+i\left(3x^2y-y^3\right) \quad y \quad g(z)=-x^2+y^2+2x\,y\,i$. Hallar el mayor dominio de analiticidad de $Log\left[f(z)\right] \quad y \quad Log\left[g(z)\right]$.

(5 puntos)

B) B1) Deducir la expresión logarítmica de w = ArgSh(z).

B2) Resolver la siguiente ecuación : Sh(z) = Sh(iz)

(5 puntos)

Tiempo 45m.