Ampliación de Matemáticas. Ingeniería Industrial, 2º curso
13 de junio de 2006. Convocatoria ordinaria.

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% **de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes**.

PRIMER EJERCICIO

1. (a) Hallar analítica y gráficamente los puntos en los que la función

$$f(z) = \frac{\sqrt{z+2\pi}}{\operatorname{sen} z - \cos z}$$

no es analítica.

   (b) Sean z_1 y z_2 las dos singularidades aisladas de f con menor componente real. Indicar razonadamente cuántos desarrollos distintos admite f en serie de potencias de $(z - z_i)$ para cada $i = 1, 2$.

3.5 puntos

2. (a) Desarrollar la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{(z-1)^3}$$

en serie de potencias de $(z - 1)$.

   (b) Indicar la región en la que es válido dicho desarrollo.

   (c) Determinar el tipo de singularidad de f en $z = 1$.

3 puntos

3. Sea $z = x + iy$ un número complejo no nulo, y sea $\alpha = \frac{\bar{z}}{z}$. Se pide:

   (a) Expresar el módulo y el argumento de α en función del argumento de z, y en función de x e y.

   (b) Indicar gráficamente el **lugar geométrico** que describe el afijo de α cuando el afijo de z recorre el arco de circunferencia $\{e^{it} \ : \ 0 \le t \le \pi/2\}$.

   (c) Indicar razonadamente cuál sería la respuesta al apartado b) si el afijo de z recorriese el arco de circunferencia $\{3e^{it} \ : \ 0 \le t \le \pi/2\}$.

3.5 puntos

TIEMPO: 1 HORA.

Ampliación de Matemáticas. Ingeniería Industrial, 2º curso
13 de junio de 2006 - Convocatoria ordinaria

SEGUNDO EJERCICIO

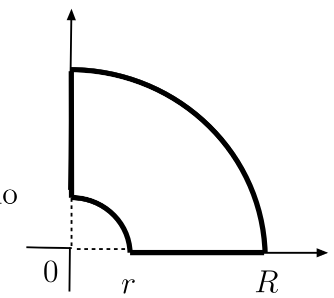
1. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un cero de orden 3 de las funciones analíticas f y g. Calcular el residuo
$$\mathrm{Res}\left[\frac{f''}{g}, z_0\right]$$
en términos de los coeficientes de los desarrollos de Taylor de f y g en z_0.

3.5 puntos

2. Obtener y discutir el valor de la integral
$$I_a = \int_{|z-i|=2} \frac{e^z}{z^2+a^2}\, dz$$
en función del parámetro real $a > 0$ sabiendo que $a \neq 1, 3$.

3 puntos

3. (a) Calcular el valor de la integral impropia
$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x}\, dx,$$
integrando la función $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ sobre el contorno que se indica a la derecha.



(b) A partir del resultado anterior, calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

3.5 puntos

TIEMPO: 50 MINUTOS.

Ampliación de Matemáticas. Ingeniería Industrial, 2º curso
13 de junio de 2006 - Convocatoria ordinaria

TERCER EJERCICIO

1. Obtener, sin hacer ninguna integral, el desarrollo en serie de Fourier de:

$$f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x$$

¿Cuál es su periodo mínimo? **1.5 puntos**

2. Sea $f_T(x)$ la extensión periódica de periodo $T = 4$ de:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{2+x} & -2 \leq x \leq -1 \\ -e^{-x} & -1 \leq x < 0 \\ e^{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{2-x} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Representar gráficamente $f_T(x)$ en el intervalo $[-4, 4]$.

(b) ¿Se puede asegurar, sin realizar ningún cálculo, que algunos coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son nulos? ¿Cuáles? Razonar la respuesta.

(c) Completar la siguiente tabla, siendo $\varphi_T(x)$ el desarrollo en serie de Fourier:

x	0	1	2	27	2006
$f_T(x)$					
$\varphi_T(x)$					

2 puntos

3. (a) Sea $F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$ la transformada de Fourier de la función $f(t)$. Deducir $\mathscr{F}[e^{ibt} \cdot f(t)]$.

(b) Sabiendo que $\mathscr{F}\left[\dfrac{1}{t^2 + c^2}\right] = \dfrac{\pi}{c} e^{-c|\omega|}$, $c \in \mathbb{R}^+$, se pide:

i. Hallar $\mathscr{F}\left[\dfrac{e^{ibt}}{t^2 + a^2}\right]$ y $\mathscr{F}\left[\dfrac{\cos(bt)}{t^2 + a^2}\right]$.

ii. A partir de los resultados anteriores, obtener el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2 + 1} dt$.

3.5 puntos

4. Sea $y' - y = f(t)$, con $f(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$. Hallar la solución particular $y(t)$ que verifica $y(0) = 0$ mediante la transformada de Laplace, y representarla gráficamente.

3 puntos

TIEMPO: 1 HORA 10 MINUTOS.