AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
8 DE FEBRERO DE 2007

- ***EJERCICIO 1***

A) Hallar todas las funciones f(z) = u(x,y) + i v(x,y) analíticas sabiendo que su parte real es: $u(x,y)=x^2+x\cdot y+1+\varphi(y)$ *con* $\varphi(0)=2$. Expresar f(z) en función de z y explicitar v(x,y) y φ(y).

(3.5 puntos)

B) Hallar los puntos singulares de

$$f(z)=\frac{(-z^2+3)^{1/2}}{\frac{1}{2}L(2)+\frac{\pi}{4}i-Log(z-i)}+\frac{1}{\cos(iz)-e^z}$$

Y representarlos gráficamente.

(4 puntos)

C) 1º.- Deducir la parte real y la parte imaginaria de la función f(z) = cos(z).

2º.- Demostrar que : $\left|\cos(z)\right|^2=\cos^2(x)+Sh^2(y)$

(2.5 puntos)

Tiempo : 45 m.

- ***EJERCICIO 2***

A) Sea $z_0=\sqrt{3}+i$, y llamemos z_k a los puntos simétricos de z_0 con respecto a las semirrectas $r_k=\left\{z\in\mathbb{C}/\ \ \operatorname{Arg} z=(k-2)\pi/4\right\}$ para $k=1,2,3$ y 4, respectivamente. Se pide:

1º.- Representar gráficamente el pentágono de vértices z_0,z_1,z_2,z_3 y z_4, detallando las coordenadas de dichos vértices.

2º.- Mediante operaciones con números complejos, hallar un número $\omega\in\mathbb{C}$ de manera que z_3,z_4 y ω formen un triángulo que cumple:

(i) $\operatorname{Im}\omega\geq\max\left\{\operatorname{Im} z_3,\operatorname{Im} z_4\right\}$;

(ii) $|\omega-z_3|=|\omega-z_4|$;

(iii) La altura con respecto a ω mide el doble que el lado opuesto a ω.

(7 puntos)

B) Demostrar que si $f=u+iv$ es derivable en $z=x+iy$, entonces

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

(3 puntos)

Tiempo 45m.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
8 DE FEBRERO DE 2007

- ***EJERCICIO 3***

A) **Enunciar y demostrar** la propiedad de desplazamiento en tiempo para la transformada de Fourier.

Sea $F\left[\omega\right]=\dfrac{4sen\left(2\omega\right)}{\omega}\cdot\cos\left(\omega\right)$. Se pide:

1º.- Calcular y representar gráficamente $f\left(t\right)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]$.

2º.- $\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(\omega)\right]^2 d\omega$

3º.- $\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega$

(4 puntos)

B) Sea la función:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 1 & 1<t<3\\ 0 & t>3\end{cases}$$, se pide:

1º.- $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$. 2º.- $h(t)=f(t)*f(t)$. 3º.- $H(\omega)=\mathcal{F}\left[h(t)\right]$

(3.5 puntos)

C) Sea F(s) la transformada de Laplace de f(t) y

$$h(t)=\int_0^t f(x)\cdot sen\left[3(t-x)\right]\cdot x^3 dx .$$

Hallar $H(s)=\mathcal{L}\left[h(t)\right]$ indicando las propiedades y teoremas de la transformada de Laplace utilizados.

(2.5 puntos)
Tiempo 45m.

Solución

A) 1º.- $f(t)=\Pi_4(t+1)+\Pi_4(t-1)$

2º.- $\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(\omega)\right]^2 d\omega=24\pi$

3º.- $\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega=4\pi$

B) 1º.- $F(\omega)=e^{-i2\omega}2\dfrac{sen\omega}{\omega}$

2º.- $$h(t)=f(t)*f(t)=\begin{cases}0 & t<2\\ t-2 & 2<t<4\\ 6-t & 4<t<6\\ 0 & t>6\end{cases}$$

3º.- $H(\omega)=e^{-i4\omega}4\dfrac{sen^2\omega}{\omega^2}$

C) $H(s)=\dfrac{-3F'''(s)}{s^2+9}$

Se ha aplicado la propiedad de la transformada: $\dfrac{d^n F(s)}{ds^n} = \mathcal{L}\left[(-1)^n t^n f(t)\right]$, y el teorema de convolución.

- ***EJERCICIO 4***

Se considera la función $f(x) = x^2$, y se pide:

A) Representar gráficamente (en un intervalo de longitud mínima de dos periodos) los siguientes desarrollos, de menor periodo posible, y que coincidan con f(x) en el intervalo $(0, \pi)$:

1. $\varphi_1(x)$: desarrollo en serie de senos y cosenos.
2. $\varphi_2(x)$: “ “ “ “ senos.
3. $\varphi_3(x)$: “ “ “ “ cosenos.
4. $\varphi_4(x)$: “ “ “ “ senos pares.
5. $\varphi_5(x)$: “ “ “ “ senos impares.
6. $\varphi_6(x)$: “ “ “ “ cosenos pares.
7. $\varphi_7(x)$: “ “ “ “ cosenos impares.

Razonar en qué puntos del intervalo $\left[-\pi, 5\pi\right]$ toman el mismo valor los desarrollos :

(i) $\varphi_2(x)$ y $\varphi_5(x)$. (ii) $\varphi_1(x)$ y $\varphi_3(x)$. (iii) $\varphi_2(x)$ y $\varphi_7(x)$.

(4 puntos)

B) Plantear las fórmulas de Euler para el cálculo de los coeficientes, sin resolver ninguna integral, para $\varphi_3(x)$ y $\varphi_7(x)$, indicando los términos que se anulan.

(1.5 puntos)

C) Calcular $\varphi_2(x)$.

(3 puntos)

D) A partir del resultado anterior y sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$, calcular : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

(1.5 puntos)

Nota:

$$\int x^2 \cdot \cos(nx) dx = \frac{2x \cdot \cos(nx)}{n^2} + C$$

$$\int x^2 \cdot sen(nx) dx = \frac{(2 - n^2 x^2) \cdot \cos(nx)}{n^3} + C$$

Tiempo 45m.

Solución

A) - Los desarrollos $\varphi_2(x)$ y $\varphi_5(x)$ toman el mismo valor en los puntos pertenecientes a :

$$\boxed{(-\pi, \pi) \cup \{2\pi\} \cup (3\pi, 5\pi)}$$

- Los desarrollos $\varphi_1(x)$ y $\varphi_3(x)$ toman el mismo valor en los puntos pertenecientes a :

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
8 DE FEBRERO DE 2007

$$\boxed{(0,\pi)\cup\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}\cup(2\pi,3\pi)\cup\left\{\frac{7\pi}{2}\right\}\cup(4\pi,5\pi)}$$

- Los desarrollos $\varphi_2(x)$ y $\varphi_7(x)$ toman el mismo valor en los puntos pertenecientes a :

$$\boxed{[0,2\pi]\cup\{3\pi\}\cup[4\pi,5\pi]}$$

B) - $\varphi_3(x)\ :\ T=2\pi\quad ,b_n=0\ ,\ a_n=\dfrac{4}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx$

- $\varphi_7(x)\ :\ T=4\pi\quad ,b_n=0\ ,\ a_{2n}=0\ ,\ a_n=\dfrac{8}{4\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos\big((2n+1)x\big)dx$

C) $\varphi_2(x)=-\pi\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2nx)}{n}+\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{(2n+1)^3}+\frac{\pi^2}{(2n+1)}\right)sen\big((2n+1)x\big)$

D) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$