

MATEMATIKA GEHIPENA– LEHEN AZTERKETA PARTZIAL  
2007ko otsailak 8

• **1. ARIKETA**

A) Aurki itzazu  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  funtzio analitiko guztiak,  $f$ -ren zati erreala  $u(x, y) = x^2 + x \cdot y + 1 + \varphi(y)$  eta  $\varphi(0) = 2$  dela jakinik. Eman ezazu  $f(z)$ -ren adierazpena  $z$ -ren funtziotan, eta adieraz ezazu esplizituki  $v(x, y)$  eta  $\varphi(y)$ .

(3.5 puntu)

B) Aurki eta adieraz itzazu grafikoki ondorengo funtzioaren singularitasun guztiak.

$$f(z) = \frac{(-z^2 + 3)^{1/2}}{\frac{1}{2}L(2) + \frac{\pi}{4}i - \text{Log}(z - i)} + \frac{1}{\cos(iz) - e^z}.$$

(4 puntu)

C) 1º.- Ondorioztatu  $f(z) = \cos z$  funtzioaren zati erreala eta irudikaria.

2º.- Froga ezazu  $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \text{Sh}^2(y)$  dela.

(2.5 puntu)

Denbora : 45 minutu.

• **2. ARIKETA**

A) Izan bedi  $z_0 = \sqrt{3} + i$ , eta izan bitez  $z_k$  puntuak,  $z_0$  puntuaren simetrikoak

$r_k = \{z \in \mathbb{C} / \text{Arg } z = (k - 2)\pi / 4\}$  zuzenerdiekiko, hurrenez hurren, non  $k = 1, 2, 3$  eta 4 diren.

Eskatzen da:

1º.- Marraz ezazu  $z_0, z_1, z_2, z_3$  eta  $z_4$  erpinen definituriko pentagonoaren adierazpen grafikoa, erpinen koordinatuak esplizituki adieraziz.

2º.- Zenbaki konplexuren eragiketak erabiliz, aurki ezazu  $\omega \in \mathbb{C}$  halako moduan non  $z_3, z_4$  eta  $\omega$  zenbaki konplexuek triangulu bat osatzen duten, ondorengo propietateak betetzen direlarik:

(i)  $\text{Im } \omega \geq \max \{ \text{Im } z_3, \text{Im } z_4 \}$ ;

(ii)  $|\omega - z_3| = |\omega - z_4|$ ;

(iii)  $\omega$  erpinarekiko altuerak  $\omega$ -ren aurreko aldeak baino luzera bikoitza du.

(7 puntu)

B) Froga ezazu

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

dela  $f = u + iv$  deribagarria bada  $z = x + iy$  puntuan.

(3 puntu)

Denbora: 45 minutu.

MATEMATIKA GEHIPENA– LEHEN AZTERKETA PARTZIAL  
2007ko otsailak 8

• **3.ARIKETA**

A) **Enuntzia eta froga ezazu** denborazko traslazioaren propietatea Fourier transformaturako.

Bedi  $F[\omega] = \frac{4\sin(2\omega)}{\omega} \cdot \cos(\omega)$ . Eskatzen da:

1º.- Kalkula eta adieraz ezazu grafikoki:  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ .

2º.- Kalkula ezazu  $\int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega)]^2 d\omega$ .

3º.- Kalkula ezazu  $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$ .

( 4 puntu)

B) Kontsideratu ondorengo funtzioa:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}, \text{ eskatzen da:}$$

1º.-  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ .      2º.-  $h(t) = f(t) * f(t)$ .      3º.-  $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$

(3.5 puntu)

C) Bedi  $F(s)$ ,  $f(t)$  funtzioaren Laplace-ren transformatua, eta bedi

$$h(t) = \int_0^t f(x) \cdot \sin[3(t-x)] \cdot x^3 dx.$$

Aurki ezazu  $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ , erabilitako Laplace-ren transformatuari buruzko teorema eta propietateak aipatuz.

(2.5 puntu)

Denbora: 45 minutu.

• **4. ARIKETA**

Kontsideratu  $f(x) = x^2$  funtzioa. Eskatzen da:

A) Lor ezazu ondorengo garapenen adierazpen grafikoa (gutxienez, bi periodotako luzerako tarte batean) ahalik eta periodo txikienekoak direlarik eta  $(0, \pi)$  tartean  $f(x)$  funtzioarekin bat datozela jakinik:

1.  $\varphi_1(x)$  : sinu eta kosinuzko serie garapena.
2.  $\varphi_2(x)$  : sinuzko serie garapena.
3.  $\varphi_3(x)$  : kosinuzko serie garapena
4.  $\varphi_4(x)$  : sinu bikoitizko serie garapena.
5.  $\varphi_5(x)$  : sinu bakoitizko serie garapena
6.  $\varphi_6(x)$  : kosinu bikoitizko serie garapena.
7.  $\varphi_7(x)$  : kosinu bakoitizko serie garapena.

**Arrazoitu**  $[-\pi, 5\pi]$  tarteko zeintzu puntutan hartzen dituzten balio berdinak:

- (i)  $\varphi_2(x)$  eta  $\varphi_3(x)$  garapenek.
- (ii)  $\varphi_1(x)$  eta  $\varphi_3(x)$  garapenek.
- (iii)  $\varphi_2(x)$  eta  $\varphi_7(x)$  garapenek.

(4 puntu)

MATEMATIKA GEHIPENA– LEHEN AZTERKETA PARTZIAL  
2007ko otsailak 8

B) Plantea itzazu Euler-en formulak  $\varphi_3(x)$  eta  $\varphi_7(x)$  serieen koefizienteetarako, integralik ebatzi gabe eta nuluak diren koefizienteak adieraziz. (1.5 puntu)

C) Kalkula ezazu  $\varphi_2(x)$ . (3 puntu)

D) Aurreko emaitzatik abiataturik, eta  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$  dela jakinik, kalkula ezazu  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ . (1.5 puntu)

**Oharra:**

$$\int x^2 \cdot \cos(nx) dx = \frac{2x \cdot \cos(nx)}{n^2} + C$$

$$\int x^2 \cdot \sin(nx) dx = \frac{(2 - n^2 x^2) \cdot \cos(nx)}{n^3} + C$$

Denbora: 45 minutu.