



MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI OHIKOA  
2007ko ekainak 12

• 2. ARIKETA

A) Izan bitez  $f(z)$  aldagai konplexuko funtzio konplexu bat,  $C$  mugalde itxi bat eta  $z_0$  zenbaki konplexu bat,  $C$ -ren gainean ez dagoena. Baldin  $f$ -k,  $C$ -k eta  $z_0$ -k baldintza batzuk betetzen badituzte, berma dezakegu ondorengo betetzen dela:

$$\oint_C \frac{f''(z)}{z-z_0} dz = 2 \oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)^3} dz.$$

Enuntzia itzazu baldintza horiek eta froga ezazu berdintza.

**(2.5 puntu)**

B) Izan bitez  $f(z) = \frac{1}{2z-3}$  eta  $g(z) = \frac{1}{(2z-3)^4}$  funtzioak. Eskatzen da:

B1) Gara itzazu biak  $(z-3)$  berreduratan, garapenak  $z = -3$  puntuan baliozkoak izanik.

B2) Aurreko ataletik abiatutik, kalkula ezazu  $\oint_{|z-3|=3} \left( \frac{z-3}{2z-3} \right)^4 dz$ .

**(2.5 puntu)**

C) Kontsidera itzazu  $f(z) = (e^{1/z} - 1)e^z$  eta  $g(z) = \frac{z(z-2)}{\sin^3(\pi z)}$  funtzioak. Eskatzen da:

C1) Sailkatu bi funtzioen singularitasunak;

C2) Kalkula itzazu  $\text{Res}[f(z), 0]$  eta  $\text{Res}[g(z), 2]$  hondarrak.

**(2.5 puntu)**

D) Kalkula ezazu ondorengo integral inpropioaren Cauchy Balio Nagusia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \cos^2 x - 1}{(x-i)} dx$$

**(2.5 puntu)**

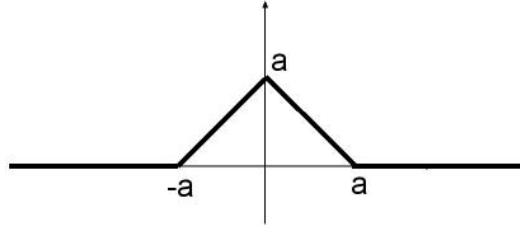
**DENBORA: Ordu 1**

**Oharra: 2. ariketa egin ondoren, 10 minutuko atsedena egongo da.**

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI OHIKOA  
2007ko ekainak 12

**3. ARIKETA**

A1) Kontsideratu  $\Pi_a(t)$  funtzioa,  $t = 0$  puntuan zentratu eta  $a > 0$  iraupeneko pulstu laukizuzena. Konboluzioaren azterketa grafikoa aplikatuz, ondoriozta ezazu  $f = \Pi_a * \Pi_a$  funtzioaren grafikoa ondorengo pulstu triangeluarra dela:



**(2 puntu)**

A2) Pulstu laukizuzenaren Fourier transformatua erabiliz, eta aurreko ataleko emaitza kontuan hartuz, kalkula ezazu analitiko eta grafikoki  $\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} e^{-i\omega} \right]$ , erabiltzen diren Fourier transformatuaren propietateak aipatuz.

**(3 puntu)**

A3) Aurreko atalak erabiliz, kalkula ezazu  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 \omega}{\omega^3} e^{-i\omega} d\omega$ .

**(1.5 puntu)**

B) Bedi 4 periodoko funtzioa  $f(t)$ ,  $[-2, 2]$  tartean  $\Pi_2(t)$  funtzioarekin bat datorrena, eta bedi  $\varphi(t)$  bere Fourier serie garapena. Eskatzen da:

- B1) Kalkulurik egin gabe, aurrean  $\varphi(t)$  garapeneko zeintzu gai diren nuluak.
- B2) Lor ezazu esplizituki  $\varphi(t)$  garapena.

**(3.5 puntu)**

**DENBORA: Ordu 1**