AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
20 DE JUNIO DE 2008

- ***EJERCICIO 1***

A1) Representar gráficamente en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ los siguientes desarrollos, de menor periodo posible, y que coincidan con $f(x) = \sin x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$, expresando en cada caso el período:

1. $\varphi_1(x)$: desarrollo en serie de senos y cosenos.
2. $\varphi_2(x)$: “ “ “ “ cosenos.
3. $\varphi_3(x)$: “ “ “ “ senos impares.
4. $\varphi_4(x)$: “ “ “ “ cosenos impares

(2 puntos)

A2) Deducir razonadamente, sin efectuar cálculos, $\varphi_3(x)$.

(1 punto)

A3) Obtener los coeficientes de Euler y el desarrollo en serie correspondientes a $\varphi_4(x)$.

(1.5 puntos)

B) Sean $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ y la función

$$F(s) = \frac{1}{e^{as}(s+b)s} + \frac{b}{(s+a)^2}.$$

Calcular $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ para todos los posibles valores de $b \in \mathbb{R}$.

(3 puntos)

C) Dada la función $f(z) = (z+1+2i)^2$, calcular en qué puntos de la región $|z| \leq 2\sqrt{5}$ alcanza $|f(z)|$ sus valores máximo y mínimo.

(2.5 puntos)

TIEMPO: 1 hora

Nota: **A la vuelta de la hoja se encuentra el Ejercicio 2**

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
20 DE JUNIO DE 2008

- ***EJERCICIO 2***

A1) Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$ y $G(\omega)=\mathcal{F}\left[g(t)\right]$. Usando $\mathcal{F}\left[\overline{g(t)}\right]=\overline{G(-\omega)}$, demostrar la siguiente igualdad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\overline{g(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot\overline{G(\omega)}d\omega$$

(1.5 puntos)

¿Qué teorema se deduce de esta igualdad? Enunciarlo y deducirlo.

(0.5 puntos)

A2) Calcular la transformada de Fourier de la función $f_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & t\notin[a,b].\end{cases}$, $\mathcal{F}\left[f_{[a,b]}(t)\right]=F_{[a,b]}(\omega)$.

(1 punto)

A3) Expresar, en forma binómica, $\left|F_{[0,A]}(\omega)\right|^2$ y el producto $F_{[0,2]}(\omega)\cdot\overline{F_{[1,3]}(\omega)}$, siendo $A,\omega\in\mathbb{R}$.

(1.25 puntos)

A4) Utilizando los apartados anteriores, calcular las siguientes integrales:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(5x)}{x^2}dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{\cos(x)-\cos(3x)}{x^2}dx$$

(1.25 puntos)

B) Demostrar que toda función entera f que cumple $\operatorname{Re}(f(z))=\operatorname{Im}(f(z))\ \ \forall z\in\mathbb{C}$ es constante.

(1 punto)

C) Hallar, gráfica y analíticamente, los puntos singulares de la función

$$f(z)=\frac{\sqrt{i\cdot z^2+z}}{z^6-2z^3+1},$$

tomando, para la raíz, la rama correspondiente a $\theta\in[\pi/2,5\pi/2)$.

(1.75 puntos)

D) Hallar todas las soluciones $z\in\mathbb{C}$ de la ecuación:

$$4\cdot\sin z=\frac{(1-i)e^{2iz}}{\cos z},$$

(1.75 puntos)

TIEMPO: 1 hora

Nota: tras la realización del ejercicio 2 habrá un descanso de 10 minutos.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
20 DE JUNIO DE 2008

- ***EJERCICIO 3***

A) Calcular la siguiente integral:

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \left(\frac{z^2}{e^{\pi z}-1} + z^3 \cdot e^{\frac{1}{z^2}} + \mathrm{Log}(z+3) \right) dz$$

(2.5 puntos)

B) Sea la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 2}{x+1}$. Se pide,

B1) Sin desarrollar en serie, determinar el mayor intervalo abierto en el que la serie de Taylor de $f(x)$ en potencias de $(x-1)$ converge.

(1 punto)

B2) Utilizando ahora el desarrollo en serie de f, hallar el valor de $f''(1)$ y $f^{25)}(1)$.

(1.5 puntos)

C) Sea $a \in \mathbb{C}$, y sea $f(z) = \dfrac{\sin(z-a)}{h(z)}$, donde $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$ es una función entera que cumple $h(a) = h'(a) = h''(a) = 0$ y $h'''(a) \neq 0$. Se pide:

C1) Clasificar el tipo de singularidad que tiene $f(z)$ en $z = a$.

(0.75 puntos)

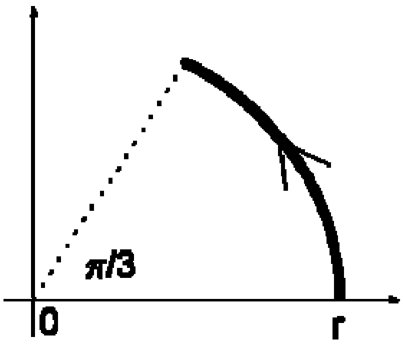
C2) Calcular el residuo $\mathrm{Res}[f(z), a]$ en función de los coeficientes c_n.

(1.5 puntos)

C3) Expresar $\mathrm{Res}[f(z), a]$ en función de las derivadas de h evaluadas en a.

(0.25 puntos)

D) Sea C_r el arco regular marcado con trazo grueso en la figura:



Calcular el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2 - (1+i)z} dz \quad \text{y} \quad \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2 - (1+i)z} dz$$

Enunciar el teorema utilizado para el cálculo del segundo límite.

(2.5 puntos)

TIEMPO: 1 hora