AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
5 DE SEPTIEMBRE DE 2008

EJERCICIO 2

A) A1) Representar gráficamente en el intervalo $[0, 2\pi]$ los siguientes desarrollos, de menor periodo posible, y que coincidan con $f(x) = \cos x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$, expresando en cada caso el período:

1. $\varphi_1(x)$: desarrollo en serie de senos y cosenos.
2. $\varphi_2(x)$: desarrollo en serie de cosenos.
3. $\varphi_3(x)$: desarrollo en serie de senos.

¿Cuál es el desarrollo en serie de Fourier con más términos nulos que coincide con f(x) en intervalo $\left[0, \pi/2\right]$? ¿Qué periodo o periodos son válidos para este desarrollo?

(2 puntos)

A2) Calcular los coeficientes de Euler y el desarrollo en serie correspondientes a $\varphi_2(x)$.

Nota:

$$\int_0^a \cos x \cdot \cos(b \cdot x) dx = \frac{b \cdot \cos a \cdot \sin(b \cdot a) - \cos(b \cdot a) \cdot \sin a}{b^2 - 1},$$

$$\int_0^a \cos x \cdot \sin(b \cdot x) dx = \frac{b - b \cdot \cos a \cdot \cos(b \cdot a) - \sin(b \cdot a) \cdot \sin a}{b^2 - 1}$$

(1 punto)

B) Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = -y(t) + H(t-a)$$
$$y'(t) = -x(t) + H(t-a)$$

con las condiciones iniciales x(0) = 0, y(0) =0, siendo H(t-a) la función escalón con salto unidad en t=a, con a > 0. Obtener la solución aplicando la transformada de Laplace, indicando las propiedades y teoremas de la transformada de Laplace utilizados en cada paso.

(3 puntos)

NOTA: LOS APARTADOS (C) y (D) SE ENCUENTRAN A LA VUELTA DE LA HOJA

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
5 DE SEPTIEMBRE DE 2008

C) C1) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ y $,F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$ su transformada de Fourier. Deducir razonadamente, en función de $F(\omega)$, las transformadas de Fourier de $\overline{f(t)}$ y de $f(t-t_0)$.

(1 puntos)

C2) Sea la función pulso rectangular: $\Pi_T(t)=\begin{cases}0 & |t|>T/2\\ 1 & |t|<T/2\end{cases}$, calcular su transformada de Fourier a partir de la definición.

(1 punto)

C3) Sea $g(t)=g_r(t)+i\cdot g_i(t)$, $g_r(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & a<t<3a\\ 0 & t>3a\end{cases}$, $g_i(t)=\begin{cases}0 & t<-3a\\ 1 & -3a<t<-a\\ 0 & t>-a\end{cases}$, con $a>0$.

i. Representar gráficamente las partes real e imaginaria de g(t) y definirlas en términos de la función pulso rectangular.

ii. Obtener razonadamente las transformadas de $g(t)$ y $\overline{g(t)}$, a partir de los resultados de los dos apartados anteriores, Expresar en forma binómica y obtener el módulo de las dos transformadas que se acaban de calcular.

(3 puntos)

D) Hallar, gráfica y analíticamente, los puntos singulares de la función

$$f(z)=\frac{Log\left(i\cdot z^2+z\right)}{z^8-2z^4+1},$$

tomando, la determinación de la función logaritmo correspondiente a $\theta\in[-\pi/2,3\pi/2)$.

(2 puntos)

TIEMPO: 1 hora 20 minutos

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
5 DE SEPTIEMBRE DE 2008

EJERCICIO 1

A) Dadas las funciones de variable compleja:

$$f(x+i\cdot y)=x^3-2x^2-3xy^2+2y^2+3+i\cdot(-y^3+3x^2y-4xy)$$

$$g(x+i\cdot y)=x^2+x+y^2-i\cdot y$$

Hallar las expresiones de f y g en función de z.

(2 puntos)

B) Sea $a\in\mathbb{C}$ y $f(z)=\dfrac{1-\cos(z-a)}{h(z)}$ donde $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ es una función entera que cumple:

$$\begin{cases} h(a)=h'(a)=h''(a)=h'''(a)=0 \\ h^{iv)}(a)\neq 0 \end{cases}$$

Se pide:

i. Clasificar el tipo de singularidad que la función tiene en z = a.
ii. Calcular $\operatorname{Res}[f(z),a]$ en función de los coeficientes c_n.
iii. Expresar $\operatorname{Res}[f(z),a]$ en función de las derivadas de *h* evaluadas en z = a.

(3 puntos)

C) Sea $f(z) = \dfrac{\tan(z/2)}{z^2-\pi^2/4}$, y sea Γ la frontera del cuadrado de vértices A, B, C y D de modo que los afijos de A y B son imaginarios puros y conjugados entre sí, siendo $C=x+i\cdot y$, donde y es estrictamente positivo y $0<x<2\pi$, siendo x distinto de $\pi/2$ y π. Se pide:

i. Obtener analítica y gráficamente los puntos singulares de f(z).
ii. Calcular $\oint_\Gamma f(z)dz$, en todos los casos posibles en función de la abscisa de C, utilizando los teoremas de Cauchy cuando sea posible aplicarlos.

(4 puntos)

D) Dada la función $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z^2-2z+1)^2}$

i. 1º.- ¿Cuántos desarrollos en potencias de $(z-2)$ admite?. Indicar el tipo del desarrollo y la región de convergencia.
   2º.- Obtener el desarrollo válido en z = 0.
ii. Enunciar el teorema de Laurent.
iii. Aplicar el teorema de Laurent juntamente con el desarrollo obtenido en el apartado i) para calcular las integrales:

$$I_1=\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-2)^5}$$

$$I_2=\oint_C f(z)(z-2)^7\,dz$$

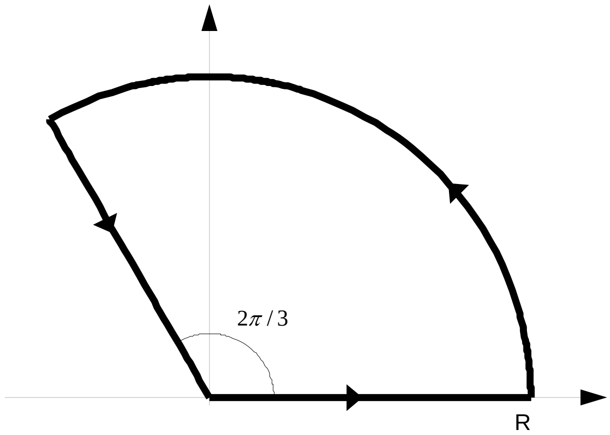
siendo $C:|z-2|=3$.

(4 puntos)

NOTA: EL APARTADO (E) SE ENCUENTRA A LA VUELTA DE LA HOJA

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
5 DE SEPTIEMBRE DE 2008

E) Calcular las siguientes integrales: $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ y $I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$. Utilizar para I_2 el siguiente contorno :



(4 puntos)

TIEMPO: 1 hora 45 minutos
Nota: tras la realización de este ejercicio habrá un descanso de 10 minutos.