AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
22 DE ENERO DE 2009

- ***EJERCICIO 1***

A) Sean $0 < a < b$. Calcular la expresión analítica de $f(t) = (\Pi_{2a} * \Pi_{2b})(t)$, y representarla gráficamente.

(2 puntos)

B) Deducir la expresión de la transformada de Fourier de Π_{2a} y calcular la transformada de Fourier de $f_1(t) = (\Pi_2 * \Pi_4)(t)$.

(1 punto)

C) A partir de los resultados anteriores, calcular el valor de la integral $\int_0^\infty \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x}{x^3}\,dx$

(2.5 puntos)

D) Sea $\varphi(t)$ una función periódica de período 4 que coincida con $f_2(t) = (\Pi_2 * \Pi_2)(t)$ en el intervalo $[-2, 2]$. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de $\varphi(t)$, teniendo en cuenta el mayor número de simplificaciones posibles, y representarlo gráficamente.

(2.5 puntos)

E) Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

(1 punto)

F) Evaluar $\varphi(t)$ y $f_2(t)$ en los puntos $t = -1/3$ y $t = 725/3$

(1 punto)

Tiempo : 1 hora.

NOTA:

$$\int x\sin(\alpha x)\,dx = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2} - \frac{x\cos(\alpha x)}{\alpha} + K, \qquad \int x\cos(\alpha x)\,dx = \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{x\sin(\alpha x)}{\alpha} + K$$

- ***EJERCICIO 2***

A1) Deducir la expresión binómica de la función compleja $\cos z$, y demostrar que el módulo de $\cos z$ no es una función acotada.

(2.5 puntos)

A2) Hallar y representar analítica y gráficamente las singularidades de la función:

$$f(z) = \frac{1}{(1-\cos(iz+1))\cdot(e^z + e^{-iz})\cdot z^{1/3}} + \mathrm{Log}(i(z^2+1)),$$

Considerando la determinación del argumento $\frac{5\pi}{2} < \theta \le \frac{9\pi}{2}$.

(4.5 puntos)

B) Calcular la expresión en función de z de la función analítica $f(z)$, sabiendo que

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(f(x+iy)) = e^x(y\cos y + x\sin y) + y + 1 \\ \mathrm{Re}[f(0)] = 1 \end{cases}.$$

Obtener, también, la expresión de $\mathrm{Re}(f(x+iy))$ en función de x e y.

(3 puntos)

Tiempo : 1 hora.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
22 DE ENERO DE 2009

- ***EJERCICIO 3***

A) Dada la ecuación $z^3+5-\sqrt{2}\,i=0$, se pide:

A1) Sabiendo que una de las soluciones es $z_1=(1+\sqrt{2}\,i)$, representar gráficamente, **sin calcularlas**, todas las soluciones de la ecuación.

(1 punto)

A2) Hallar la expresión de las otras dos raíces z_2 y z_3 en forma binómica de la manera más sencilla posible.

(1.5 puntos)

A3) Sea C la circunferencia que pasa por los afijos de las tres soluciones de la ecuación, y sea Q el cuadrado circunscrito a C que pasa por z_1. Calcular en forma binómica los vértices de Q de mayor y menor componente imaginaria.

(2.5 puntos)

B1) Sea $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$. Demostrar:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\cdot F(s)-f(0),$$

enunciando las hipótesis necesarias.

(1.5 puntos)

B2) Aplicando el apartado anterior, obtener la fórmula correspondiente a $\mathcal{L}\{f''(t)\}$.

(1 punto)

B3) Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t)+y(t)=2e^t$$
$$\begin{cases} y(\pi/4)=e^{\pi/4} \\ y'(\pi/4)=e^{\pi/4}+\sqrt{2} \end{cases}$$

(2.5 puntos)

Tiempo : 1 hora.