AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
7 DE JUNIO DE 2010

- ***EJERCICIO 1***

1) Calcular el valor de la integral:

$$I_n = \oint_{|z|=n} \frac{e^z}{(z-1)^{n-4}\cdot(z-3)^{n-5}\cdot(z-5)^{n-6}}\,dz$$

para los valores $n = 2, 4$ y 6.

(2.5 puntos)

2) Sean las funciones:

$$f(z) = 8\pi^2 z\left(z-\frac{1}{2}\right)^2, \qquad g(z) = 1-\cos(4\pi z), \qquad h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Se pide:

a) Desarrollar $g(z)$ en potencias de z y en potencias de $\left(z+\frac{1}{2}\right)$, indicando en cada caso el campo de convergencia;
b) Clasificar las singularidades de $h(z)$;
c) Calcular el valor de la integral $\oint_C h(z)\,dz$, siendo C el contorno dado por $|z| = 3/4$;
d) Indicar qué tipo de singularidad presenta $h'(z)$ en el punto $z = -1/2$;
e) Calcular $\mathrm{Res}[h'(z), -1/2]$;
f) Indicar qué tipo de singularidad presenta $\dfrac{h(z)}{h''(z)}$ en el punto $z = -1/2$.

(5 puntos)

3.- Calcular el valor principal de Cauchy de la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\cdot\cos x}{x(x-i)}\,dx.$$

(2.5 puntos)

TIEMPO: 1 hora

- ***EJERCICIO 2***

1.- 1.1) Enunciar el teorema de convolución para la transformada de Fourier.
1.2) Sea la función $f(t) = e^{-t}\cdot H(t)$. Se pide:
1.2.1) Calcular $f * f$ y su transformada de Fourier.
1.2.2) Calcular $f * f * f$ y su transformada de Fourier.

(3.5 puntos)

2.- Resolver la siguiente ecuación diferencial mediante la transformada de Laplace:

$$y''+2y'+y = e^{-t} \text{ con } y(1) = \frac{3}{2e}, \quad y'(1) = \frac{1}{2e}.$$

(3.5 puntos)

TIEMPO: 40 minutos

Nota: tras la realización del ejercicio 2 habrá un descanso de 10 minutos.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
7 DE JUNIO DE 2010

EJERCICIO 3

1.- Demostrar el siguiente resultado teórico: si $f = u + i \cdot v$ es derivable en $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$, entonces $f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0, y_0)$.

Nota: *No se podrán usar para este ejercicio las ecuaciones de Cauchy-Riemann, dado que el resultado que se está pidiendo se utiliza, precisamente, para deducir dichas fórmulas.* **(2 puntos)**

2.- Representar gráficamente los siguientes subconjuntos de puntos del plano complejo:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi \right\}$$

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z + 3 - i) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z^2) \leq \pi \right\}$$

(2 puntos)

3.- Hallar y representar gráficamente los puntos singulares de la siguiente función:

$$f(z) = \sqrt{iz^2 - 2} + \frac{1}{\tan(z^2)}$$

(3 puntos)

TIEMPO: 40 minutos

- ***EJERCICIO 4***

Se considera la función $f(x) = e^{-x}$. Se pide:

a) Representar gráficamente en el intervalo [-8, 8], $\varphi_1(x)$, desarrollo en serie de senos y cosenos de menor periodo posible que coincide con $f(x)$ en el intervalo (0 , 2). Indicar, sin realizar los cálculos, las fórmulas finales para obtener los coeficientes del desarrollo.

b) Repetir el apdo. a) para el caso de $\varphi_2(x)$, desarrollo en serie de senos.

c) Idem. para el caso de $\varphi_3(x)$, desarrollo en serie de cosenos.

d) Idem. para el caso de $\varphi_4(x)$, desarrollo en serie de cosenos impares.

e) Idem. para el caso de $\varphi_5(x)$, desarrollo en serie de senos impares.

f) Calcular $\varphi_1(x)$.

g) A partir del resultado anterior calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2\pi^2}$.

h) Completar la siguiente tabla:

	0	3	38
$\varphi_1(x)$			
$\varphi_3(x)$			
$\varphi_5(x)$			

Nota:

$$\int e^{-x} \cdot \cos(ax)dx = \frac{e^{-x}}{1 + a^2}\left(a \cdot \sin(ax) - \cos(ax)\right)$$

$$\int e^{-x} \cdot \sin(ax)dx = -\frac{e^{-x}}{1 + a^2}\left(a \cdot \cos(ax) + \sin(ax)\right)$$

6 puntos

TIEMPO: 40 minutos