AMPLIACIÓN DE MATEMATICAS II

EXAMEN FINAL – 8 DE SEPTIEMBRE DE 1998

PRIMER EJERCICIO

A) 1) Obtener la expresión de la transformada de Laplace de la derivada f' de una función f, justificando los pasos dados.

2) Dada la transformada $\mathcal{L}\{\sin a\mathbf{t}\} = \dfrac{a}{\mathbf{s}^2 + a^2}$

calcular $\mathcal{L}\{\cos a\mathbf{t}\}$ utilizando el resultado del aparado anterior.

3) Obtener la expresión de la transformada de Laplace de una primitiva P de la función f. ¿De qué primitiva se trata?

4) Calcular $\mathcal{L}\{\sin a\mathbf{t}\}$ utilizando los resultados de los apartados 2) y 3).

(3.5 puntos)

B) Calcular tan(π/12) del siguiente modo: primero, escribiendo en forma binómica el punto del primer cuadrante de módulo 2 y argumento π/6; a continuación, buscando su raíz cuadrada $x + i\,y$ en el primer cuadrante operando en forma binómica. Justificar los pasos dados.

(1.5 puntos)

C) En el enunciado de este apartado, para ser totalmente precisos, a la función exponencial compleja (unívoca / univaluada / uniforme) la denotaremos exp(z), reservando la notación e^z para la "función" multívoca /multivaluada / multiforme. Así:

1) Definir $z_1^{z_2}$ (multivaluado: base compleja elevada a exponente complejo).
2) Definir raíces n-ésimas de un número complejo z.

Caso particular:

3) Para $z_1 = e$, $z_2 = 1/4$, calcular los anteriores valores $z_1^{z_2} = e^{1/4}$ (multivaluado).
4) ¿Coinciden dichos valores $e^{1/4}$ (multivaluado) con las cuatro raíces cuartas de e?
5) Calcular exp(1/4).
6) ¿Es exp(1/4) uno de los valores $e^{1/4}$ (multivaluado)?

En general, siendo $z = x + i\,y$:

7) Expresar e^z (multivaluado) en términos de x, y y un entero arbitrario k.
8) Expresar exp(z) en términos de x, y.
9) ¿Es siempre exp(z) uno de los valores de e^z (multiforme)? En caso afirmativo, demostrarlo; en caso negativo, dar un contraejemplo.
10) Con $n \in \mathrm{N}$, ¿coinciden siempre los valores $z^{1/n}$ (función multiforme) con las n raíces enésimas de z? En caso afirmativo, demostrarlo; en caso negativo, dar un contraejemplo.

(5 puntos)

Tiempo : 70 minutos

AMPLIACIÓN DE MATEMATICAS II

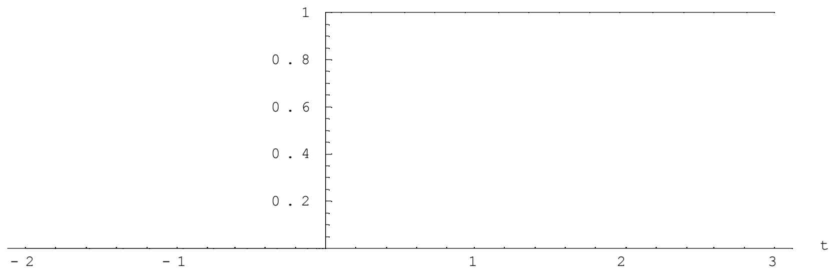
EXAMEN FINAL-8 DE SEPTIEMBRE DE 1998

SEGUNDO EJERCICIO

A) Se consideran las funciones:

$$f_1(t) = e^{-|t|}\left(H(t+1) - H(t-1)\right)$$
$$f_2(t) = e^{-|t|}\left(H(t) - H(t-1)\right)$$

donde $H(t)$ indica la función escalón (o función de Heaviside) centrada en el origen, cuya representación gráfica es:



Se pide: 1) Representar gráficamente $g_1(t)$ (=extensión periódica de $f_1(t)$ en (-1,1]) y $g_2(t)$ (=extensión periódica de $f_2(t)$ en (0,1]). Representar también los valores en los puntos de discontinuidad.

(1.5 puntos)

2) Calcular los desarrollos en serie de Fourier de $g_1(t)$ y $g_2(t)$.

Nota :
$$\int e^{at}\cos(bt)dt = \frac{e^{at}\left(a\cos(bt) + b\sin(bt)\right)}{a^2+b^2} + C$$
$$\int e^{at}\sin(bt)dt = \frac{e^{at}\left(-b\cos(bt) + a\sin(bt)\right)}{a^2+b^2} + C$$

(2 puntos)

3) Representar gráficamente las sumas $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ de los desarrollos en serie de Fourier de las funciones $g_1(t)$ y $g_2(t)$ respectivamente, representando también los valores en los puntos de discontinuidad.

(1.5 puntos)

B) Dada la función $f(t) = e^{-|t|}$

1) Calcular $F(w)$, transformada de Fourier de $f(t)$.
2) Representar gráficamente la parte real y la parte imaginaria de $F(w)$.

(4 puntos)

Tiempo : 50 minutos

AMPLIACIÓN DE MATEMATICAS II

EXAMEN FINAL-8 DE SEPTIEMBRE DE 1998

TERCER EJERCICIO

A) Aplicando el teorema de los residuos, calcular, en sentido positivo:

1) $\oint_{|z|=1} \frac{z}{e^z - 1} dz$ 2) $\oint_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z}} dz$

(2 puntos)

B) 1) Aplicando la fórmula integral de Cauchy, calcular, en sentido positivo:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz \quad \forall \mathrm{a} \in \mathrm{R}$$

(1 punto)

2) Parametrizar la integral anterior mediante $z = e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta < 2\pi$ para calcular

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta) d\theta$$

(1.5 puntos)

C) Calcular de dos formas diferentes la siguiente integral en sentido positivo :

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}$$

(2 puntos)

D) Dada la función $f(z) = \frac{z^3 - z^2 + 1}{z^2 - 1}$

obtener los distintos desarrollos en serie de Laurent en potencias de (z-1), indicando, analítica y gráficamente, su región de convergencia.

(3.5 puntos)

Tiempo : 60 minutos