MATEMATIKA GEHIPENA II

AZTERKETA FINALA-1998ko IRAILAREN 8a

<u>LEHENENGO ARIKETA</u>

A) 1) f funtzioaren f' deribatuaren Laplace transformatuaren adierazpena lor ezazu, emandako urratsak zurituz.

2) $\mathcal{L}\{\sin a\,\boldsymbol{t}\} = \dfrac{a}{\boldsymbol{s}^2 + a^2}$ transformatua emanda,

$\mathcal{L}\{\cos a\,\boldsymbol{t}\}$ kalkula, aurreko ataleko emaitza erabiliz.

3) f funtzioaren P jatorriko baten Laplace transformatuaren adierazpena lor ezazu. Zein jatorriko da?

4) $\mathcal{L}\{\sin a\,\boldsymbol{t}\}$ kalkula, 2) eta 3) ataletako emaitzak erabiliz.

(3.5 puntu)

B) tan(π/12) ondoko prozedura honetaz kalkula: lehenik, 2 moduluko eta π/6 argumentuko lehenengo koadranteko puntua era binomikotan idatz; ondoren, eta era binomikotan eraginez, $x+i\,y$ bere lehenengo koadranteko bi-erroa bilatuz, tan(π/12)-ren balioa aurki ezazu. Emandako urratsak zuri itzazu.

(1.5 puntu)

C) Atal honetako enuntziatuan, erabat zehatzak izatearren, funtzio esponentzial konplexua (unibokoa / baliobakarra / uniformea) exp(z) izendatuko dugu, e^z idazkera "funtzio" multiboko /balioanitz / multiformerako gordeko dugun artean. Honela:

1. $z_1^{z_2}$ defini ezazu (balioanitza: oinarri konplexua ber berretzaile konplexua).
2. z zenbaki konplexuaren n-erroak defini.

<u>Kasu partikularra:</u>

3. $z_1 = e$, $z_2 = 1/4$ zenbakietarako, aurreko $z_1^{z_2} = e^{1/4}$ balioak kalkula (balioanitza).
4. Bat al datoz $e^{1/4}$ balio horiek (balioanitza) e zenbakiaren lau lau-erroekin?
5. exp(1/4) kalkula (baliobakarra).
6. exp(1/4) balioa $e^{1/4}$ (balioanitza) balioetako bat ote da?

<u>Oro har</u>, $z = x + i\,y$ izanik:

7. e^z (balioanitza) x, y-ren eta k hautazko zenbaki oso baten funtziotan idatz.
8. exp(z) x, y-ren funtziotan idatz.
9. exp(z) balioa e^z (balioanitza) balioetako bat al da beti? Baiezkoan, froga ezazu; ezezkoan, kontraadibide bat eman.
10. $n \in$ N izanik, beti al datoz bat $z^{1/n}$ balioak (funtzio multiformea) z-ren n n-erroekin? Baiezkoan, froga ezazu; ezezkoan, kontraadibide bat eman.

(5 puntu)

Astia : 70 minutu

MATEMATIKA GEHIPENA II

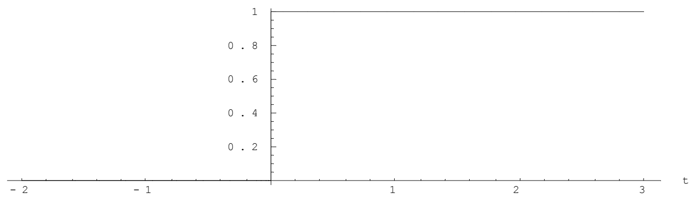
AZTERKETA FINALA-1998ko IRAILAREN 8a

<u>BIGARREN ARIKETA</u>

A) Honako bi funtzio hauek aintzakotzat harturik,

$$f_1(t) = e^{-|t|}\left(H(t+1) - H(t-1)\right)$$
$$f_2(t) = e^{-|t|}\left(H(t) - H(t-1)\right)$$

non $H(t)$-k jatorrian zentratutako maila funtzioa (edo Heaviside funtzioa) adierazten duen, zeinaren adierazpen grafikoa hurrengo hau baita:



Ondorengoak eskatzen dira:

1. $f_1(t)$ren (-1,1]ko luzapen periodikoa den $g_1(t)$ funtzioa, eta $f_2(t)$ren (0,1]ko luzapen periodikoa den $g_2(t)$ funtzioak grafikoki adieraztea, etenuneetako balioak adieraziz.
(1.5 puntu)

2. $g_1(t)$ eta $g_2(t)$ funtzioen Fourier seriezko garapenak kalkulatzea.

Oharra:
$$\int e^{at}\cos(bt)dt = \frac{e^{at}\left(a\cos(bt) + b\sin(bt)\right)}{a^2+b^2} + K$$
$$\int e^{at}\sin(bt)dt = \frac{e^{at}\left(-b\cos(bt) + a\sin(bt)\right)}{a^2+b^2} + K$$

(*2 puntu*)

3. $g_1(t)$ eta $g_2(t)$ funtzioei dagozkien Fourier seriezko garapenen baturak, $\varphi_1(t)$ eta $\varphi_2(t)$ hurrenez hurren, grafikoki adieraztea, etenuneetako balioak adieraziz.
(*1.5 puntu*)

B) $f(t) = e^{-|t|}$ funtzioa emanik,

1) $F(\omega)$, bere Fourier transformatua, kalkulatzea
2) $F(\omega)$ren zati erreala eta irudikaria grafikoki adieraztea.

(*4 puntu*)

Astia: 50 minutu

MATEMATIKA GEHIPENA II

AZTERKETA FINALA-1998ko IRAILAREN 8a

HIRUGARREN ARIKETA

A) Hondarren teorema aplikatuz, kalkula, zentzu positibotan:

1) $\oint_{|z|=1} \frac{z}{e^z - 1} dz$ 2) $\oint_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z}} dz$

(2 puntu)

B) 1) Cauchyren formula integrala aplikatuz, kalkula, zentzu positibotan:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz \quad \forall a \in \Re .$$

(1 puntu)

2) Aurreko integralean $z = e^{i\theta}$ parametrizazioa ezar ezazu; ondoren, $\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta) d\theta$ kalkula, $0 \le \theta < 2\pi$ izanik

(1.5 puntu)

C) Honako integral hau bi metodo desberdinez kalkula, zentzu positibotan:

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}$$

(2 puntu)

D) $f(z) = \frac{z^3 - z^2 + 1}{z^2 - 1}$ funtzioa emanda, (z-1) berredurazko Laurent serie desberdinak lor itzazu, beren konbergentzia eremua analitikoki eta grafikoki adieraziz.

(3.5 puntu)

Astia: 60 minutu