

TEMA 7: EL RIESGO EN LA SELECCIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN: CRITERIOS DE DECISIÓN.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN: OBJETIVOS Y CONTENIDO DE LA LECCIÓN.....	3
1.1. OBJETIVOS.....	3
1.2. CONTENIDO.....	3
2. LIMITACIONES DEL VAN EN LA VALORACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN EN CONDICIONES DE RIESGO.....	4
3. LA ESPERANZA MATEMÁTICA DEL VAN.....	5
3.1. LA ESPERANZA MATEMÁTICA COMO CRITERIO DE DECISIÓN.....	5
3.2. LIMITACIONES Y APLICABILIDAD DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA.....	7
4. LA UTILIDAD ESPERADA DEL VAN.....	9
4.1. EL EQUIVALENTE MONETARIO CIERTO.....	9
4.2. FUNCIONES DE UTILIDAD, ACTITUD DEL DECISOR ANTE EL RIESGO.....	9
4.3. APLICACIÓN Y CÁLCULO DE LA UTILIDAD ESPERADA.....	12
4.4. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL CRITERIO DE LA UTILIDAD ESPERADA.....	14
5. LA REGLA MEDIA-VARIANZA.....	15
5.1. CARACTERÍSTICAS Y APLICACIÓN DE LA REGLA MEDIA-VARIANZA.....	15
5.2. VENTAJAS E INCONVENIENTES.....	16
6. EL AJUSTE AL RIESGO DEL TIPO DE ACTUALIZACIÓN.....	17
6.1. CONCEPTO.....	17
6.2. CÁLCULO DEL TIPO AJUSTADO A RIESGO.....	17
7. LA REDUCCIÓN A CERTEZA DE LOS FLUJOS NETOS DE CAJA.....	20
7.1. PLANTEAMIENTO.....	20
8. CASO PRÁCTICO.....	23
9. CONCLUSIONES.....	29
BIBLIOGRAFÍA.....	30

1. INTRODUCCIÓN: OBJETIVOS Y CONTENIDO DE LA LECCIÓN.

1.1. OBJETIVOS.

En condiciones normales, las situaciones de certeza no se producen o se producen en contadas ocasiones, siendo más habituales las situaciones de no-certeza. En este sentido, no podemos darnos por satisfechos en una asignatura de valoración de inversiones si no damos un paso más, viendo otros modelos de análisis y selección de proyectos, más complejos pero también más realistas. En este sentido, una idea básica que se debe tener clara es que si la mayoría de los decisores presentan aversión al riesgo, es decir, si prefieren ante un mismo nivel de riqueza esperado, aquel proyecto que presente un menor riesgo, deberemos penalizar la rentabilidad obtenida en función del riesgo que suponga llevar a cabo dicho proyecto.

Con este tema se persigue un objetivo general que se puede descomponer en tres subobjetivos distintos.

El objetivo general es inculcar al alumno los conocimientos necesarios para que sea capaz de desarrollar criterios de selección de proyectos de inversión aplicables en condiciones de riesgo. Para entroncar estos modelos de valoración de inversiones en situaciones de riesgo, con el tema 4, referido a los procedimientos clásicos de selección de proyectos de inversión en condiciones de certeza, comenzamos la lección recordando las limitaciones del VAN, haciendo especial hincapié en los inconvenientes que tiene el VAN para valorar los proyectos de inversión arriesgados.

Entre los subobjetivos cognoscitivos que se le plantean al alumno se pueden destacar los siguientes:

- Reconocer las distintas alternativas que se le presentan para recoger el riesgo a la hora de valorar la aceptación de un proyecto de inversión.
- Comprender los efectos que tienen las características subjetivas y objetivas del decisor-inversor sobre la valoración y selección de inversiones.
- Reflexionar sobre la dificultad que existe en la práctica a la hora de aplicar algunos de los criterios idóneos desde un punto de vista teórico, debido a la necesidad de especificar ciertos parámetros no observables.
- Desarrollar técnicas que sean capaces de combinar la adecuación teórica de un modelo, con su aplicabilidad práctica a la hora de seleccionar un proyecto de inversión.

1.2. CONTENIDO.

En el tema anterior se han presentado las medidas más habituales a la hora de cuantificar el riesgo de los proyectos de inversión –varianza, desviación típica, coeficiente de variación del VAN o del TIR, análisis de sensibilidad–, así como las diferentes naturalezas de riesgo que se pueden analizar –absoluto o relativo; económico o financiero–. Una vez que el alumno es capaz de medir el riesgo de un proyecto de inversión, estará en condiciones de estudiar los principales criterios de decisión que se pueden emplear a la hora de resolver sobre la conveniencia o no de poner en marcha un proyecto de inversión, cuando la empresa se mueve en un entorno de no certeza.

Cuando el individuo presenta aversión al riesgo, no podrá decidir únicamente basándose en el VAN esperado, sino que deberá tener en consideración algún criterio que recoja el riesgo que asume. La forma más correcta de recoger el riesgo incorporado en un proyecto de inversión es a través de la función de utilidad. La función de utilidad es una expresión que recoge el grado de satisfacción que recibe el individuo asociado a una alternativa de inversión. En función del grado de aversión al riesgo y de la medida de riesgo que mejor se adapte a cada individuo, la utilidad que le proporciona un proyecto será mayor o menor. Esta metodología se enfrenta a la dificultad de su puesta en práctica, como consecuencia de lo problemático que resulta la construcción de esta función para cada decisor, sobre todo teniendo en cuenta que la decisión de invertir en la mayoría de las ocasiones es una decisión de carácter colectivo.

Por ello, se han de buscar otro tipo de criterios que sean más factibles de aplicar en la práctica. Estos criterios son fundamentalmente: (1) la esperanza matemática del VAN; (2) la regla media-varianza; (3) el ajuste al riesgo del tipo de actualización; (4) la reducción a certeza de los flujos de netos de caja.

La lección se estructura en nueve epígrafes. En primer lugar se recogen las limitaciones del VAN como criterio de selección de proyectos de inversión en condiciones de riesgo, mostrando la necesidad de desarrollar propuestas nuevas de valoración. En el segundo epígrafe se introduce el concepto de esperanza matemática del VAN. Este criterio presenta la ventaja de su simplicidad, pero su gran inconveniente es que no toma en consideración el riesgo inherente a los proyectos de inversión, razón por la cual, únicamente es aplicable cuando el decisor es neutral al riesgo o en circunstancias excepcionales.

Sin embargo si suponemos que el decisor es adverso al riesgo deberemos acudir a otros criterios. Así el segundo criterio analizado, Epígrafe 3, es el de la utilidad esperada del VAN. Desde un punto de vista teórico es el criterio más correcto, pero presenta el gran inconveniente de que su puesta en práctica es muy complicada, debido a la necesidad de definir una función de utilidad para los decisores. En los Epígrafes 4, 5, y 6 los criterios analizados son la regla media-varianza, el ajuste al riesgo del tipo de actualización y la reducción a certeza de los flujos netos de caja, respectivamente. Estos modelos de decisión están basados en cierta medida en el criterio de la utilidad esperada del VAN, pero a diferencia de éste, su aplicación en la práctica resulta mucho más sencilla, dado que no es necesario calcular la función de utilidad de los decisores.

El criterio media-varianza establece comparaciones a través de binomios rentabilidad-riesgo, lo que permite desechar proyectos menos eficientes. Tanto el criterio de ajuste al riesgo del tipo de actualización como el de reducción a certeza de los flujos netos de caja penalizan el VAN que genera el proyecto, bien incrementando la rentabilidad mínima exigida a la inversión sobre la base de su riesgo, bien reduciendo los rendimientos obtenidos.

Por último, en el octavo Epígrafe, tratando de acercar al alumno a la realidad, y buscando aclarar algunas de las dudas que han podido surgir a lo largo del tema, se desarrolla un caso práctico que pretende aunar teoría y práctica. La lección finaliza con la presentación de las conclusiones.

2. LIMITACIONES DEL VAN EN LA VALORACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN EN CONDICIONES DE RIESGO.

El VAN, como criterio de selección de proyectos de inversión, presenta muchas ventajas, ya vistas en el Tema 4 del programa de Dirección Financiera II:

1. Proporciona un criterio de aceptación o rechazo, y por tanto, una regla para el decisor.
2. Utiliza la actualización, es decir, considera el distinto valor del dinero a lo largo del tiempo, homogeneizando, de esta forma, los flujos de dinero que se producen en distintos períodos.
3. Tiene la propiedad aditiva; si consideramos varios proyectos de inversión independientes, el VAN conjunto de todos ellos es igual a la suma de sus VAN: $VAN_{(1+2+\dots+m)} = VAN_1 + VAN_2 + \dots + VAN_m$. Al recoger el valor que añade a la empresa en términos absolutos, tenemos la certeza que el valor añadido por dos proyectos será la suma de lo que añade cada uno de ellos considerado por separado.
4. Como ya hemos visto, este criterio coincide con el objetivo financiero de la empresa; todo proyecto cuyo VAN es positivo incrementa el valor de la empresa.

Sin embargo, el VAN no se puede considerar un modelo de selección de inversiones correcto para su uso en escenarios con riesgo, debido a que no incorpora este factor. Esto se debe a que el VAN es un modelo determinista. Las distintas magnitudes utilizadas son consideradas como perfectamente conocidas. Sin embargo, ello constituye, en la mayor parte de los casos, una hipótesis altamente simplificadora de la propia realidad económica. El futuro u horizonte económico de las inversiones difícilmente puede conocerse con precisión, pues una serie de fac-

tores o agentes externos incontrolables condicionan e influyen en los resultados del mismo. Las empresas nunca -o casi nunca- se mueven en el campo de la certidumbre.

En cuanto a la terminología utilizada, se puede hablar de inversiones “con riesgo” cuando las probabilidades de los posibles estados de sus magnitudes se conocen, y de inversiones “con incertidumbre” cuando tales probabilidades¹ no se conocen. Suárez (1998; pp. 123-124), considera, no obstante, que “modernamente las situaciones de total incertidumbre son tan irreales como las situaciones con información perfecta. La rehabilitación de la probabilidad “subjética” o “a priori” ha hecho desaparecer... las situaciones de total incertidumbre”. Por todo esto, en la presente lección nos centraremos única y exclusivamente en los proyectos de inversión con riesgo, y nunca en condiciones de incertidumbre estricta.

3. LA ESPERANZA MATEMÁTICA DEL VAN.

3.1. LA ESPERANZA MATEMÁTICA COMO CRITERIO DE DECISIÓN.

Como hemos comentado, las situaciones de certeza, en las cuales se puede pronosticar con seguridad los flujos de caja que será capaz de generar un determinado proyecto, corresponden a circunstancias alejadas de la realidad, o al menos, no son muy corrientes.

Por tanto, si consideramos que la mayoría de los proyectos de inversión son arriesgados, las variables aleatorias a tener en cuenta son las siguientes:

- El desembolso inicial (A) y los flujos netos de caja (Q_t).
- El tipo de actualización (k).
- La duración del proyecto (n).

En consecuencia, la rentabilidad de un proyecto de inversión, medida por ejemplo a través del VAN, es también una variable aleatoria. La consecuencia de la incertidumbre asociada al análisis de los proyectos de inversión provoca que los criterios empleados en condiciones de certeza no sean válidos y, por tanto, tenemos la necesidad de definir nuevos criterios de análisis y selección de inversiones que se adecuen a las condiciones de no certeza.

En situaciones de no certeza, un criterio de decisión racional intentará maximizar la esperanza matemática de la ganancia. El sujeto decisor elegirá aquella línea de acción que le proporcione la máxima esperanza matemática de beneficio. Concretamente, el inversor preferirá en primer término aquellas inversiones con un VAN esperado mayor. Sin embargo, al hacer esta elección se corre el riesgo de que ocurra un suceso distinto del esperado, obteniendo un resultado no deseado. Ello significaría que se habría materializado el riesgo incurrido al tomar la decisión. El criterio de la esperanza matemática, como muy bien dice Lambin (1969), “no puede aplicarse más que a los fenómenos sometidos a la ley de los grandes números, ya que es solamente en razón del carácter reiterativo del fenómeno estudiado por lo que el centro de decisión tiene la seguridad de ver su ganancia media converger hacia el valor medio esperado”. “Esto hace que dicho criterio tenga a veces un valor práctico bastante limitado, ya que la mayoría de los problemas económicos no presentan ese carácter reiterativo” (Suárez, 1998; p.125).

La esperanza matemática del VAN no es sino el momento centrado respecto del origen de orden uno de dicha variable aleatoria. Si conocemos la distribución de probabilidades del VAN, la expresión de la esperanza matemática, $E(\text{VAN})$, será:

- Si la distribución de probabilidades es discreta:

$$E(\text{VAN}) = \sum_{i=1}^m \text{VAN}_i \times \text{Prob}_i$$

¹ Véase al respecto la obra de Knight (1945).

siendo:

VAN_i: El valor del VAN si se produce el estado de la naturaleza "i"

Prob_i: La probabilidad de que se produce el estado de la naturaleza "i"

- Si la distribución de probabilidades es continua²:

$$E(\text{VAN}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{VAN} \times \varphi(\text{VAN}) \times d\text{VAN}$$

Siendo:

VAN, la función del VAN.

$\varphi(\text{VAN})$, la función de densidad del VAN.

Según este procedimiento, la conveniencia de poner en marcha un proyecto de inversión se determina en los mismos términos establecidos en condiciones de certeza. Se aceptarán todos aquellos proyectos cuya esperanza matemática del VAN sea positiva, $E(\text{VAN}) > 0$, rechazándose aquellos que tengan una esperanza matemática negativa, $E(\text{VAN}) \leq 0$.

$$E(\text{VAN}) > 0 \Rightarrow \text{Proyecto Aceptable}$$

Por otra parte, serán preferibles aquellos proyectos que tengan un mayor valor esperado del VAN, mostrándonos indiferentes ante proyectos cuyo valor esperado sea igual.

Ilustrémoslo con un ejemplo. Sea un proyecto de inversión arriesgado con la siguiente distribución de probabilidades del VAN:

Resultados posibles	Prob (VAN _i)
VAN ₁ -300	0,18
VAN ₂ 400	0,12
VAN ₃ 450	0,35
VAN ₄ 1.600	0,35

El valor esperado o esperanza matemática del VAN es:

$$E(\text{VAN}) = (-300) \times 0,18 + 400 \times 0,12 + 450 \times 0,35 + 1.600 \times 0,35 = 711 \text{ u.m.}$$

En este caso, el proyecto sería aceptable ya que tiene un valor positivo.

Si no conocemos la distribución de probabilidades del VAN, pero conocemos las distribuciones de probabilidad del desembolso inicial y de los flujos netos de caja, podemos expresar la esperanza matemática del VAN de la siguiente forma:

$$E(\text{VAN}) = -E(A) + \sum_{t=1}^n \frac{E(Q_t)}{(1+k)^t}$$

² Las expresiones utilizadas en el resto del tema suponen, por simplicidad, distribuciones de probabilidad discretas.

En este caso estamos suponiendo que el horizonte temporal (n) es conocido con certeza.

Veamos un ejemplo de cálculo del valor esperado del VAN suponiendo conocida la distribución de probabilidad de los flujos netos de caja.

La dirección financiera de una empresa está analizando un proyecto de inversión con 3 años de vida y un desembolso inicial de 45.000 u.m. Los flujos netos de caja no se pueden conocer con exactitud, pero sí es posible determinar la distribución de probabilidad asociada a cada uno de ellos. Los posibles valores posibles de dichas magnitudes y sus probabilidades son los siguientes:

Año 1		Año 2		Año 3	
Q ₁	Probabilidades	Q ₂	Probabilidades	Q ₃	Probabilidades
10.000	0,05	18.000	0,10	25.000	0,03
12.000	0,10	20.000	0,17	28.000	0,17
14.000	0,35	22.000	0,23	31.000	0,30
16.000	0,35	24.000	0,23	34.000	0,30
18.000	0,10	26.000	0,17	37.000	0,17
20.000	0,05	28.000	0,10	40.000	0,03

En este caso los valores esperados de los flujos de caja son:

$$A = 45.000 \text{ u.m.}$$

$$E(Q_1) = 10.000 \times 0,05 + 12.000 \times 0,10 + 14.000 \times 0,35 + 16.000 \times 0,35 + 18.000 \times 0,10 + 20.000 \times 0,05 = 15.000 \text{ u.m.}$$

$$E(Q_2) = 18.000 \times 0,10 + 20.000 \times 0,17 + 22.000 \times 0,23 + 24.000 \times 0,23 + 26.000 \times 0,17 + 28.000 \times 0,10 = 23.000 \text{ u.m.}$$

$$E(Q_3) = 25.000 \times 0,03 + 28.000 \times 0,17 + 31.000 \times 0,30 + 34.000 \times 0,30 + 37.000 \times 0,17 + 40.000 \times 0,03 = 32.500 \text{ u.m.}$$

Si el tipo de actualización k tiene un valor del 7%

$$E(\text{VAN}) = -45.000 + \frac{15.000}{(1,07)} + \frac{23.000}{(1,07)^2} + \frac{32.500}{(1,07)^3} = 15.638 \text{ u.m.}$$

$E(\text{VAN}) = 15.683 > 0$, por tanto la inversión es aceptable.

3.2. LIMITACIONES Y APLICABILIDAD DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA.

Las principales características que presenta este procedimiento son:

- La complejidad de la distribución de probabilidades del VAN se reduce a un sólo parámetro, una única unidad de medida, con lo cual se pierde gran parte de la información que ofrece la distribución de probabilidades, ganándose sin embargo en simplicidad.
- No se tiene en cuenta el riesgo inherente al proyecto de inversión. El criterio se basa exclusivamente en la rentabilidad esperada del proyecto y no se fija en la variabilidad que presenta esta rentabilidad, es

decir, en el riesgo. Esto representa un grave inconveniente, que se repetirá en todos aquellos métodos de selección que se basen en estimaciones de valores esperados ya que “generalmente, las decisiones de inversión se refieren a situaciones únicas y no repetibles. Por tanto, si el criterio se basa *a priori* en muy pocas experiencias, el valor esperado, como base para la toma de decisiones no tiene mucho sentido” (Durán, 1992; p. 475).

Al trabajar en un ambiente de riesgo, el decisor no sólo debería tener en cuenta el valor esperado del VAN, sino también el riesgo asociado al mismo. El inversor puede preferir una inversión con un VAN esperado menor, si el riesgo que lleva asociado es también menor.

La elección final dependerá, en definitiva, de la actitud frente al riesgo del inversor que, como veremos, vendrá descrita por su función de utilidad. En principio una conducta racional del decisor le llevará siempre a maximizar la esperanza de ganancia y a minimizar el riesgo³.

Supongamos, por ejemplo, una empresa a la que se le presenta la posibilidad de invertir 20 millones de euros en dos proyectos alternativos. Se encuentra con que ambos proyectos, arriesgados, tienen el mismo VAN esperado, $E(VAN) = 5$ u.m., y una distribución de probabilidades normal, aunque con distinta forma, como se aprecia en el Gráfico 1.

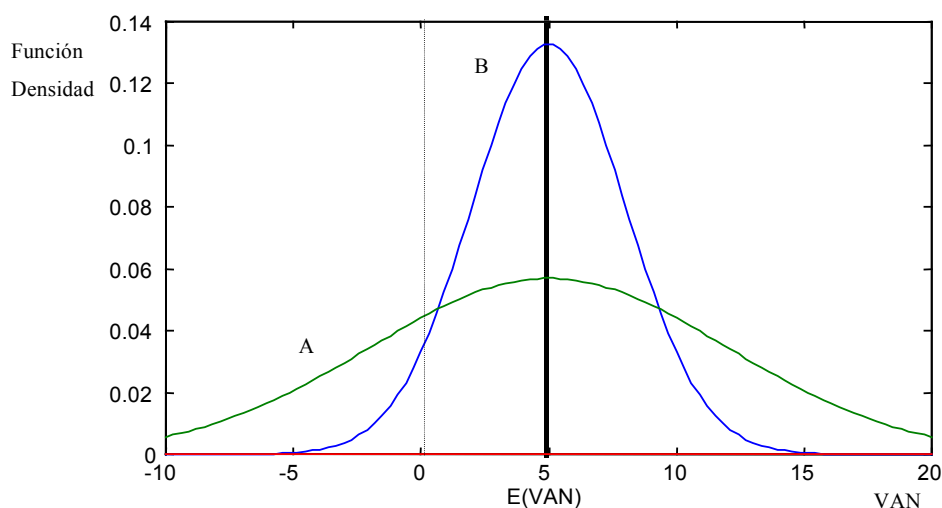


Gráfico 1. Distribución de probabilidades del VAN de dos proyectos de inversión arriesgados.

Siguiendo el criterio del VAN esperado, ambos proyectos son equivalentes. Pero si el decisor es adverso al riesgo, está claro que elegirá el proyecto B, dado que su dispersión es menor, y la probabilidad de pérdida también. Si el decisor es propenso al riesgo, elegirá el proyecto A.

Existen dos circunstancias en las cuales la aplicación de este criterio es adecuada:

Si la decisión planteada se refiere a situaciones repetitivas a lo largo del tiempo e independientes, los resultados obtenidos convergen hacia la media. Si además se da la circunstancia de que la empresa es capaz de hacer frente a la posibilidad más adversa, los proyectos de inversión podrían ser evaluados exclusivamente mediante este criterio. Sin embargo, las decisiones de invertir casi nunca son repetitivas, dado que los proyectos de inversión son, normalmente, singulares, y a veces la empresa no puede hacer frente a la posibilidad más adversa, con lo cual el criterio de la esperanza matemática del VAN no sería correcto.

³ Aunque hemos hecho un análisis del riesgo absoluto, realmente se debería considerar el riesgo relativo.

Este criterio es aplicable por los decisores neutrales al riesgo, es decir, aquellos que valoran por igual, en términos absolutos, los incrementos de riqueza que las disminuciones.

En conclusión, el criterio de la esperanza matemática del VAN tiene un empleo escaso en la valoración de proyectos de inversión arriesgados, por lo que resulta necesario encontrar algún criterio que permita el cálculo de la rentabilidad de los proyectos y que tenga en cuenta el riesgo de los mismos, así como la actitud del decisor ante éste.

4. LA UTILIDAD ESPERADA DEL VAN.

En este apartado examinaremos un criterio o procedimiento de gran interés conceptual, pero de escasa utilidad práctica. Es el mejor desde el punto de vista teórico, pues los demás se fundamentan en él, pero su aplicación en la práctica resulta compleja. No obstante, conviene conocerlo como referencia, como ideal deseable, aunque difícilmente alcanzable.

A la hora de decidir sobre la conveniencia o no de llevar a cabo un proyecto de inversión, tan importante como la rentabilidad esperada y el riesgo asociado al mismo es la actitud que el decisor muestre frente a este último. Téngase en cuenta que la actitud frente al riesgo no es la misma para todas las personas.

4.1. EL EQUIVALENTE MONETARIO CIERTO.

En primer lugar, vamos a definir lo que entendemos por equivalente monetario cierto (EMC), concepto que nos será de utilidad a la hora de entender la regla de decisión a seguir en el criterio de la utilidad esperada.

Se entiende por EMC aquel nivel de riqueza cierto que genera la misma utilidad que la del proyecto de inversión:

$$U(\text{EMC}) = UE(\text{VAN})$$

En condiciones de certeza, un proyecto es aceptable si es capaz de generar un VAN positivo. En situaciones de riesgo, igualmente será aceptable un proyecto que genere un EMC positivo, ya que el EMC es un montante monetario cierto en el que ya se ha descontado el riesgo. Por eso entenderemos como rentables aquellos proyectos de inversión arriesgados cuyo EMC sea mayor que cero, y se ordenarán de mayor a menor EMC

4.2. FUNCIONES DE UTILIDAD, ACTITUD DEL DECISOR ANTE EL RIESGO.

Las características que presentan normalmente las funciones de utilidad de un inversor son:

a) Dado que normalmente se espera que un individuo obtenga mayor utilidad cuanto mayor sea su riqueza, la función de utilidad con respecto a ésta será monótona creciente.

$$\frac{dU}{dW} > 0, \text{ siendo } U \text{ la utilidad y } W \text{ la riqueza.}$$

Es decir, vamos a considerar que se trata de un decisor racional.

b) En relación a su actitud ante el riesgo nos podemos encontrar ante distintas situaciones. Supongamos un decisor al que se le presenta la oportunidad de emprender un proyecto de inversión aleatorio con dos posibles resultados, W_0 y W_1 , con una probabilidad de "p" y "1- p", respectivamente. La riqueza esperada será $E(W) = p W_0 + (1 - p) W_1$. Pero si $U(W_0) = U_0$ y $U(W_1) = U_1$, la utilidad esperada del proyecto será $UE(W) = p U(W_0) + (1 - p) U(W_1)$. Sin embargo, la utilidad de ganar seguro una cantidad igual al nivel de riqueza esperado será $U' = U[p W_0 + (1 - p) W_1]$

b.1) Si suponemos que $U' > UE(W)$, el individuo prefiere un valor seguro a un proyecto arriesgado con una riqueza esperada idéntica, $E(W)$. Se trata de un decisor que presenta aversión ante el riesgo, es

decir, que valora más la pérdida de una cantidad de dinero, que la ganancia de esa misma cantidad. No le gustará arriesgarse, por tanto, la utilidad marginal será decreciente, $\frac{d^2U}{dW^2} < 0$ ⁴.

Supongamos, para que resulte más ilustrativo, que puede obtener una riqueza de W_1 o W_2 con una probabilidad del 50%. El valor medio será justo la mitad. Este proyecto arriesgado le proporciona dos resultados condicionados que valorados en términos de utilidad serán $U(W_1)$ y $U(W_2)$; la utilidad esperada será la mitad de la suma de ambos resultados. Como se observa en el Gráfico 2, la utilidad esperada de dicho proyecto no coincide con la utilidad del valor esperado.

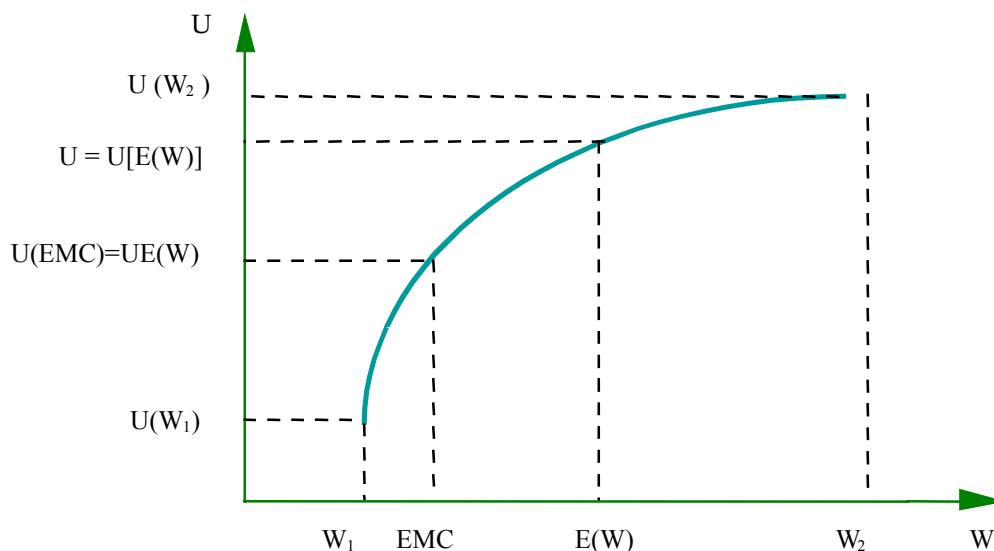


Gráfico 2. Función de utilidad de un decisor adverso frente al riesgo.

Gráficamente puede observarse que para funciones con $\frac{d^2U}{dW^2} < 0$ se produce que:

$$UE(W) = U(EMC) < U[E(W)]$$

y por tanto:

$$EMC < E(W)$$

b.2) La función de utilidad de un decisor propenso al riesgo, igual que la anterior, será creciente, pero cóncava respecto al eje de la utilidad, es decir, este decisor valora más en términos de utilidad la posibilidad de ganancia de una cantidad de dinero que la posibilidad de pérdida de la misma cantidad. Por tanto, para este tipo de decisores la utilidad marginal es creciente, es decir,

$$\frac{d^2U}{dW^2} > 0$$

Si siguiendo con el ejemplo desarrollado para la construcción del Gráfico 3, para un decisor propenso al riesgo tampoco la utilidad esperada del proyecto coincide con la utilidad del valor esperado.

⁴ Evidentemente el grado de aversión al riesgo variará entre distintos decisores. El grado de aversión absoluto de un individuo se mide a través del cociente $U''(W)/U'(W)$. Para profundizar más sobre el tema ver Copeland y Weston (1983).

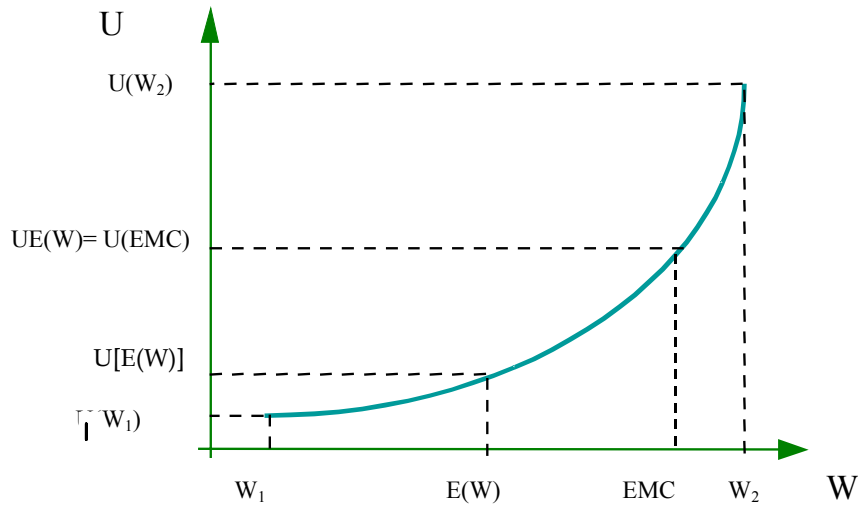


Gráfico 3: Función de utilidad de un decisor propenso frente al riesgo.

Gráficamente podemos observar que para este caso:

$$UE(W) = U(EMC) > U[E(W)]$$

y por tanto:

$$EMC > E(W).$$

b.3) Un decisor neutral frente al riesgo no valora el riesgo en el momento de tomar decisiones, sino que toma como única referencia el nivel de riqueza. Para este tipo de decisores los incrementos o decrementos unitarios del nivel de riqueza suponen la misma variación absoluta en términos de utilidad; es decir, para un individuo neutral frente al riesgo maximizar la utilidad esperada equivale a maximizar la riqueza esperada⁵. La función de utilidad es lineal, por lo que para este tipo de decisores la utilidad marginal es constante, siendo $\frac{d^2U}{dW^2}$ nula.

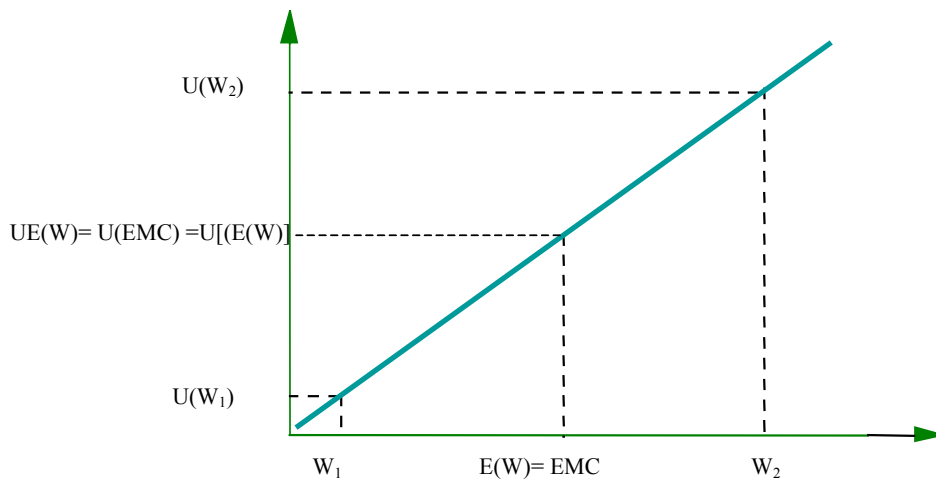


Gráfico 4. Función de utilidad de un decisor neutral frente al riesgo.

⁵ Como hemos comentado anteriormente, el criterio de la esperanza matemática es adecuado para este tipo de decisores.

4.3. APLICACIÓN Y CÁLCULO DE LA UTILIDAD ESPERADA.

El análisis de la aceptabilidad de los proyectos de inversión pasa por sustituir los valores monetarios, correspondientes a los distintos escenarios que pueden producirse, por algo que exprese el efecto que tales valores producen en el decisor, es decir, por la utilidad que al decisor le proporcionan cada uno de los niveles de riqueza que genera el proyecto de inversión condicionados al nivel de riesgo que debe asumir para adquirirlos. Una vez conocido el nivel de satisfacción o utilidad que le proporcionan los distintos resultados posibles, la alternativa a seleccionar será aquella que le proporcione el mayor nivel de utilidad esperada.

El procedimiento a seguir para aplicar el método de la utilidad esperada es el siguiente:

1.- En primer lugar, es necesario obtener la función de utilidad del decisor que relaciona la satisfacción con la riqueza del decisor, o bien, con las variaciones de riqueza de éste. Esta magnitud puede ser, por ejemplo, el incremento de riqueza de la empresa que origina un proyecto cierto, expresado a través del VAN:

$$U(\text{VAN}) = f(R).$$

Estrictamente hablando, las decisiones de inversión en la empresa suelen ser colectivas, ya que implican a diversos niveles decisorios (directivos, técnicos, propietarios, administradores, etc.) y multidimensionales, dado que se consideran, no sólo el incremento de riqueza, sino también otros aspectos, tanto cuantitativos como cualitativos: prestigio, imagen de empresa, cuota de mercado, crecimiento, seguridad, autonomía, etc.

La consecución de una función de utilidad colectiva a partir de funciones de utilidad individuales suele entrañar dificultades teóricas y prácticas, sobre todo en colectivos estructurados como sucede en una empresa. Estas dificultades para su posible aplicación práctica se ven acrecentadas si consideramos funciones de utilidad multidimensionales.

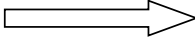
Para simplificar la cuestión vamos a suponer que la función de utilidad es individual⁶ y unidimensional, pues sólo dependerá de la riqueza, conforme a la suposición de que el objetivo financiero de la empresa es maximizar la riqueza de sus propietarios. Existen varias funciones de utilidad con estas características pero la más utilizada por la teoría financiera, debido a sus propiedades, es la función de utilidad tipo von Neumann-Morgenstern. Esta función está basada en que el comportamiento de los decisores sigue unos axiomas, que se pueden resumir diciendo que el decisor tiene preferencias transitivas y que se puede encontrar un valor cierto que le resulte indiferente frente a un valor aleatorio⁷.

2.- Una vez determinada la función de utilidad del decisor, $U(\text{VAN}) = f(R)$, que expresa la valoración por parte de éste de los incrementos de su riqueza, debe ser aplicada al proyecto de inversión.

Si el VAN del proyecto es una variable aleatoria discreta y se conoce la probabilidad de su realización, deberemos sustituir los resultados posibles en dicha función. De este modo tendríamos:

⁶ En muchas ocasiones la decisión final de poner en marcha un proyecto de inversión corresponde a una persona.

⁷ Para un mayor detalle ver Von Neumann-Morgenstern (1953), pp. 15-31.

VAN ₁	Prob(VAN ₁)		U(VAN ₁)	Prob(U(VAN ₁))
VAN ₂	Prob(VAN ₂)	Aplicando f(R)= U(VAN)	U(VAN ₂)	Prob(U(VAN ₂))
VAN ₃	Prob(VAN ₃)		U(VAN ₃)	Prob(U(VAN ₃))
•	•		•	•
•	•		•	•
•	•		•	•
VAN _n	Prob(VAN _n)		U(VAN _n)	Prob(U(VAN _n))

Luego, multiplicando la utilidad de cada valor del VAN [U(VAN_i)] por la probabilidad de que se cumpla dicho valor [Prob(U(VAN_i))], y mediante la suma de los productos, se obtiene la utilidad esperada del VAN del proyecto [UE(VAN)]:

$$UE(VAN) = \sum_{i=1}^m U(VAN_i) \times Prob(VAN_i) .$$

Si la variable aleatoria es continua:

$$UE(VAN) = \int_{-\infty}^{\infty} U(VAN) \times \varphi(VAN) \times d(VAN)$$

Siendo $\varphi(VAN)$ la función de densidad de la distribución de probabilidades del VAN

La UE(VAN) recoge tanto la rentabilidad del proyecto como su riesgo, y la actitud del decisor ante el mismo.

3.- Por último, el criterio de decisión a aplicar es ordenar los proyectos en orden creciente respecto del UE(VAN) y realizar únicamente aquéllos cuya utilidad esperada sea mayor que la utilidad de un incremento nulo de riqueza, ya que exigimos que EMC sea positivo.

$$UE(VAN) > U(0) = U(EMC)$$

Veamos el proceso a través de un ejemplo. Sea un proyecto de inversión arriesgado con la siguiente distribución de probabilidades del VAN:

Resultados posibles	Prob (VAN _i)
VAN ₁ -300	0,18
VAN ₂ 400	0,12
VAN ₃ 450	0,35
VAN ₄ 1.600	0,35

Supongamos que el decisor tiene una función de utilidad como la siguiente:

$$U = f(VAN) = 1 - e^{-\frac{(500+VAN)}{1.000}}$$

Sustituyendo los VAN_i en la función de utilidad, tendríamos:

Resultados posibles	Prob (VAN _i)	U(VAN _i)	U(VAN _i) = VAN _i × Prob(VAN _i)
---------------------	--------------------------	----------------------	---

VAN ₁	-300	0,18	0,1812	0,0326
VAN ₂	400	0,12	0,5934	0,0712
VAN ₃	450	0,35	0,6132	0,2146
VAN ₄	1.600	0,35	0,8775	0,3071
				UE(VAN) = 0,6255 u.u.

La utilidad proporcionada por un incremento de riqueza nulo es:

$$U(0) = 1 - e^{-\frac{500}{1.000}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0,393 \text{ unidades de utilidad (u. u.)}$$

Según el criterio de utilidad esperada el proyecto de inversión es rentable ya que:

$$UE(VAN) = 0,6255 \text{ u.u.} > 0,393 \text{ u.u.} = U(0).$$

De otro modo, calculando el EMC a partir de la igualdad, $UE(VAN) = U(EMC)$, obtenemos:

$$0,60656 = 1 - e^{-\frac{(500+EMC)}{1.000}}$$

por lo que despejando EMC será:

$$EMC = 482,16 \text{ u.m.}$$

Este proyecto de inversión arriesgado es para el decisor equivalente a un proyecto cierto con un VAN = 482,16 u.m., conforme a su actitud ante el riesgo. Como el $EMC > 0$, se comprueba nuevamente que el proyecto es rentable.

Este inversor cambiaría el proyecto de inversión, que genera por término medio una rentabilidad absoluta de 711 u.m., por una cantidad cierta de riqueza igual a 482,16 u.m. El valor esperado de este proyecto es $E(VAN) = 711 \text{ u.m.}$, mayor que el $EMC = 482,16 \text{ u.m.}$ Esto indica que el decisor es adverso al riesgo.

4.4. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL CRITERIO DE LA UTILIDAD ESPERADA.

Las principales ventajas que presenta este criterio de decisión son:

- Considera todo el riesgo del proyecto, es decir, la distribución de probabilidades del VAN del proyecto al completo.
- Podemos suponer que incorpora el riesgo económico e incluso el riesgo financiero, siempre que la forma concreta de la función de utilidad, para cada proyecto, dependa de la riqueza actual del decisor y de la relación entre esa riqueza y el nuevo proyecto; esto es, la función de utilidad puede incorporar el riesgo total en que incurre la empresa por afrontar el proyecto de inversión arriesgado.

En cuanto a sus inconvenientes son:

- Este criterio no se puede aplicar si se desconoce la distribución de probabilidades del VAN del proyecto, la cual, en la práctica, es difícil de definir.
- La decisión de invertir en una empresa es colectiva, la toma un conjunto estructurado de individuos (relacionado jerárquicamente). Construir una función de utilidad para un colectivo jerarquizado es muy difícil.

- La función de utilidad es distinta para cada proyecto, pues las circunstancias de riqueza de la empresa cambian, por lo que este método, para ser operativo, exige un gran coste. Únicamente podríamos suponer constancia de la función de utilidad si las condiciones generales cambiaran muy poco.

Por todo esto, aunque sea interesante desde un punto de vista conceptual, este método ha encontrado escasa aplicación práctica (Levi y Sarnat, 1994; p. 227), a pesar de que se ha empleado en algunas empresas para medir la actitud de sus directivos ante el riesgo.

5. LA REGLA MEDIA-VARIANZA.

5.1. CARACTERÍSTICAS Y APLICACIÓN DE LA REGLA MEDIA-VARIANZA.

“La valoración de inversiones en un contexto arriesgado debe hacerse con base en una medida bidimensional que contemple dos parámetros: $E(VAN)$ y $\sigma^2(VAN)$ ” (Fernández, 1991; p. 419). En este sentido, un criterio que nos puede servir para la selección de proyectos de inversión consiste en suponer que la utilidad esperada de un proyecto - $UE(VAN)$ - puede ser definida únicamente en función del valor esperado y la varianza⁸ del VAN⁹:

$$UE(VAN) = f [E(VAN), \sigma^2(VAN)]$$

Para la utilización del método de la utilidad esperada se requiere conocer toda la distribución de probabilidades; sin embargo, en este método toda la distribución se resume en dos parámetros: la esperanza y la varianza¹⁰.

Al aplicar este método se está suponiendo generalmente que el valor de una función puede quedar determinada a través de estos dos parámetros. De este modo, la utilidad que proporciona el EMC del VAN de un proyecto vendrá determinado por:

$$EMC = \mu - A \sigma^2$$

donde:

$$\mu = E(VAN)$$

A es un indicativo de la actitud del inversor ante el riesgo.

- Si $A > 0$, $EMC < E(VAN) = \mu$; el decisor es adverso al riesgo.
- Si $A = 0$, $EMC = E(VAN) = \mu$; el decisor es neutral al riesgo.
- Si $A < 0$, $EMC > E(VAN) = \mu$; el decisor es propenso al riesgo.

Al igual que con los criterios anteriores, un proyecto de inversión es aceptable si su EMC es positivo y rechazable si es negativo o nulo, dándose prioridad a los proyectos con mayor EMC.

Suponiendo que el inversor: (1) es adverso al riesgo; (2) conoce la rentabilidad esperada y el riesgo del proyecto; y (3) no es capaz de obtener una expresión para el EMC, el criterio de jerarquización es el siguiente:

- Entre dos proyectos de igual $E(VAN)$ y distinta $\sigma^2(VAN)$, se escogerá el de menor σ^2 (se supone que el decisor es adverso al riesgo).

⁸ Se pueden introducir variantes a este criterio considerando otros medidores de riesgo como la desviación típica, el coeficiente de variación, etc.

⁹ Debe considerarse el riesgo relativo del proyecto, y no el riesgo absoluto.

¹⁰ La forma concreta de esta función, $UE = f(\mu, \sigma^2)$, puede variar de un decisor a otro, pero siempre supondremos que es racional, por lo que: $\frac{\partial UE}{\partial \mu} > 0$. Si tomamos como medida del riesgo σ^2 , la $\frac{\partial UE}{\partial \sigma^2}$ será negativa, positiva o nula en función de que el decisor sea adverso, propenso o neutral ante el riesgo, respectivamente.

- Entre dos proyectos de igual σ^2 (VAN) y distinto $E(VAN)$, se elegirá el de mayor $E(VAN)$ (propensión a la rentabilidad).
- Si el proyecto con mayor rentabilidad, $E(VAN)$, presenta un mayor riesgo, $\sigma^2(VAN)$, no se puede tomar una decisión sin conocer con mayor precisión el grado de aversión al riesgo del decisor.

5.2. VENTAJAS E INCONVENIENTES.

La ventaja principal de este método es:

- Con respecto al criterio de la utilidad esperada, la regla media-varianza no requiere conocer toda la distribución de probabilidades completa del VAN, sino únicamente dos momentos: media y varianza (aunque es necesario conocer la actitud del decisor ante el riesgo para poder obrar en consecuencia).

Sus principales inconvenientes son:

- Con respecto al criterio de la utilidad esperada, al utilizar como medida del riesgo únicamente la varianza, en determinados casos (distribuciones asimétricas) se pierde información sobre el riesgo del proyecto. Sólo sería válido si la función de utilidad fuese cuadrática¹¹ o la distribución de los rendimientos fuese normal¹².
- Existen numerosas situaciones en las que no podemos establecer una preferencia entre dos proyectos, ya que el que proporciona una mayor rentabilidad supone asumir también un mayor riesgo, por lo que en muchas ocasiones únicamente sólo sirve para desechar aquellas inversiones menos rentables. Por ejemplo, supongamos dos proyectos, A y B, que precisan una inversión inicial similar de 20 millones de euros. El proyecto A tiene un valor esperado superior, $E(VAN_A) = 10$ u.m., mientras que el proyecto B tiene una $E(VAN_B) = 5$ u.m. La distribución de probabilidad del VAN de ambos proyectos es la siguiente:

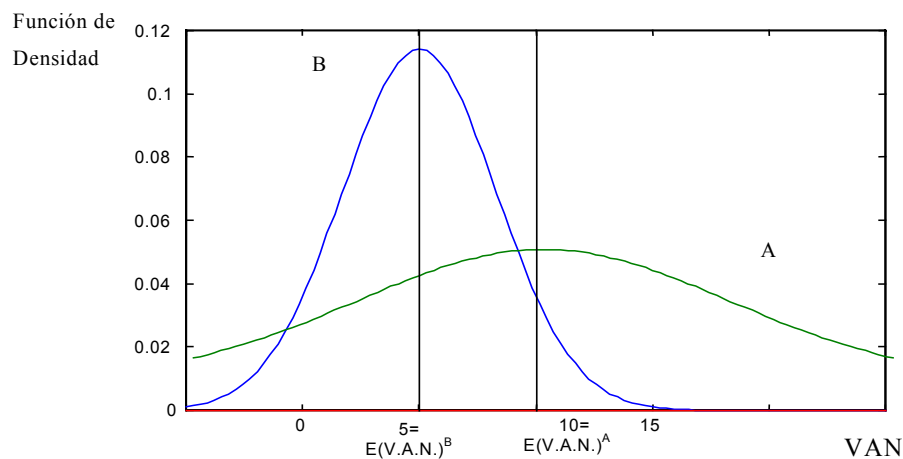


Gráfico 5. Distribución de probabilidades del VAN de los proyectos A y B.

En este caso, no es tan fácil deducir a priori la decisión final, pues el proyecto A es más arriesgado, pero también más rentable. Puede que la mayor rentabilidad compense el mayor riesgo, incluso para un decisor adverso al riesgo.

¹¹ Es decir, una función de utilidad con la siguiente forma: $U(R): a + bR + cR^2$.

¹² Una distribución normal queda completamente definida a través de su valor esperado y su varianza.

6. EL AJUSTE AL RIESGO DEL TIPO DE ACTUALIZACIÓN.

6.1. CONCEPTO.

Una de las formas más sencillas de introducir el riesgo en los modelos clásicos de selección de inversiones es la que consiste en ajustar el tipo de actualización. Concretamente, se trata de calcular el EMC del proyecto actualizando los $E(Q_t)$ a un tipo de actualización resultante de añadir al tipo de actualización sin riesgo, k , una prima, p , llamada prima de riesgo, que dependerá del riesgo asociado al proyecto. Se trata de penalizar la rentabilidad que proporciona un proyecto en función del riesgo que supone, a través de un incremento en el tipo de actualización. Como se recordará, un incremento en este tipo implica una disminución de la rentabilidad de dicha inversión.

$$EMC = -A + \sum_{t=1}^n \frac{E(Q_t)}{(I+s)^t} \quad 13$$

$$s = k + p$$

Como vemos, este método es equivalente a calcular el VAN esperado con un tipo de actualización ajustado al riesgo.

Para aplicar este método sólo necesitamos conocer los valores esperados de los flujos netos de caja, y no la distribución de probabilidades del VAN, ni la función de utilidad del decisor.

6.2. CÁLCULO DEL TIPO AJUSTADO A RIESGO.

El método como tal es muy sencillo, el problema estriba en calcular la prima de riesgo. Siempre que dicha prima sea positiva se cumplirá que $EMC < E(VAN)$, por lo que implícitamente suponemos que el decisor es adverso al riesgo. Para calcular la prima de riesgo existen varios procedimientos:

a) Añadir una prima subjetiva, según la apreciación del decisor. Este procedimiento plantea muchas dudas, ya que es difícil saber si la prima asignada está recogiendo verdaderamente el riesgo del proyecto de inversión.

b) Formalizar la subjetividad, a través de una expresión que establezca una prima de riesgo mayor a medida que se incrementa el riesgo del proyecto. A modo de ejemplo, supongamos que empleamos como medidor del riesgo el coeficiente de variación del VAN y establecemos entre éste y el tipo ajustado al riesgo la relación representada en el Gráfico 6.

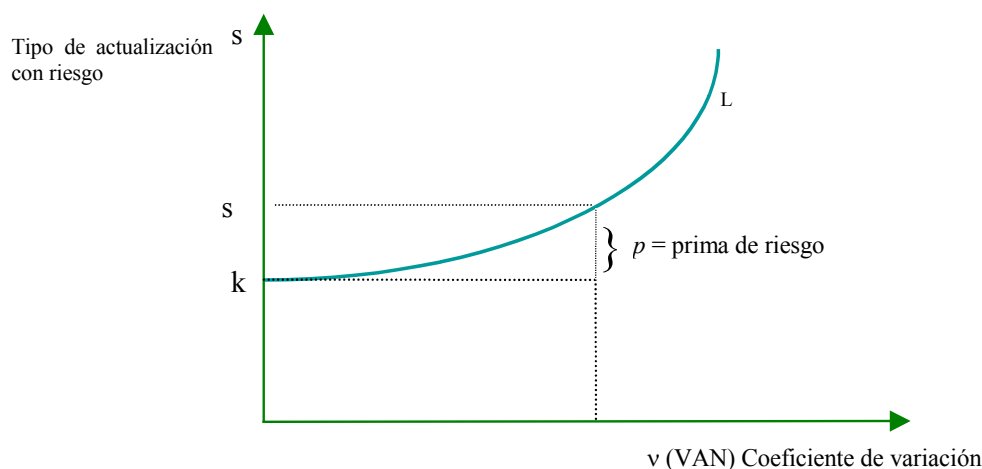


Gráfico 6. Tipo de actualización ajustado al riesgo del proyecto de inversión.

¹³ Se supone que el desembolso inicial es conocido con certeza.

En cualquier caso, la forma de la curva kL sigue siendo subjetiva.

Veamos un ejemplo que nos ayude a comprender mejor este procedimiento. Sea un proyecto de inversión arriesgado con un desembolso inicial de 2.500 u.m. y la siguiente distribución de probabilidades del VAN:

Resultados posibles	Prob (VAN _i)
VAN ₁ -300 u.m.	0,18
VAN ₂ 400 u.m.	0,12
VAN ₃ 450 u.m.	0,35
VAN ₄ 1.600 u.m.	0,35

Asimismo se conocen los valores esperados de los flujos de caja:

- E(Q₁) = 1.500 u.m.
- E(Q₂) = 1.965 u.m.

El decisor, para el análisis de este proyecto de inversión arriesgado, ha escogido el criterio del tipo de actualización ajustado a riesgo. Para aplicar este criterio ha establecido una prima de riesgo igual a:

$s = k + p$; siendo:

$$p = \frac{v(VAN)^2}{20}$$

$k = 5\%$.

El procedimiento a seguir para calcular el tipo ajustado a riesgo exige calcular la variabilidad de los resultados del VAN:

$$\sigma^2(VAN) = \sum_{i=1}^n (VAN_i - E(VAN))^2 P(VAN_i) = \sum_{i=1}^n VAN_i^2 P(VAN_i) - [E(VAN)]^2$$

$$\sigma(VAN) = \sqrt{\sigma^2(VAN)}$$

$$v(VAN) = \frac{\sigma(VAN)}{E(VAN)}$$

$$E(VAN) = 711 \text{ u.m.}$$

$$\sigma^2(VAN) = (400^2 \times 0,12 + 300^2 \times 0,18 + 450^2 \times 0,35 + 1.230^2 \times 0,35) - (711)^2 = 496.754 \text{ u.m}^2.$$

$$\sigma(VAN) = 704 \text{ u.m.}$$

$$v(VAN) = \frac{704}{711} = 0,99$$

De modo que la prima de riesgo sería:

$$p = \frac{v(VAN)^2}{20} = \frac{0,99^2}{20} = 0,049$$

$$s = k + p = 0,05 + 0,049 = 0,099$$

Una vez conocido el tipo ajustado a riesgo, simplemente actualizaremos los flujos de caja a dicho tipo.

$$EMC = -A + \sum_{t=1}^n \frac{E(Q_t)}{(1+s)^t} = -2.500 + \frac{1.500}{(1,099)} + \frac{1.965}{(1,099)^2} = 491,8 \text{ u.m.}$$

$EMC > 0$, por lo que el proyecto de inversión es aceptable.

c) Si los nuevos proyectos no modifican significativamente el riesgo, tanto económico como financiero de la empresa, esto es, si el riesgo económico no es afectado, y la estructura financiera permanece constante, puede utilizarse un tipo de actualización ajustado a riesgo y objetivo, o lo que es lo mismo, el coste medio ponderado de los recursos financieros:

$$s = \text{coste medio ponderado de capital (C.M.P.C.)} = s = k_e \frac{E}{E+D} + k_d \frac{D}{E+D}$$

Siendo:

- E, recursos propios.
- D, deudas.
- k_e , coste de los recursos propios.
- k_d , coste de la deuda o tipo de actualización libre de riesgo del mercado de capitales.

d) También se puede tomar como base el coste medio ponderado del capital o de los recursos financieros (CMPC), e incrementarlo o disminuirlo, según el efecto del proyecto sobre el riesgo total de la empresa (riesgo relativo). El inconveniente que tiene esta opción es que también incorpora un componente subjetivo.

e) Se puede definir un tipo de actualización objetivo que recoja el riesgo relativo del proyecto utilizando la teoría de selección de carteras y de equilibrio en el mercado de capitales. El tipo de actualización ajustado al riesgo es la rentabilidad exigida a ese proyecto en función de su riesgo sistemático, que puede depender de: (1) la covarianza entre el TIR del proyecto y el rendimiento de la cartera de mercado -si los propietarios de la empresa han diversificado su capital-; o (2) de la covarianza entre el TIR del proyecto y el rendimiento del conjunto de los proyectos -la cartera de proyectos- de la empresa, en caso de que los propietarios tengan invertida la mayor parte de su capital en la empresa y el nuevo proyecto suponga sólo una pequeña parte del capital total de la misma. Así:

$$s = k + p = R_F + (E_m - R_F)\beta = R_F + \lambda \text{ cov}(R_m, r)$$

Siendo:

- $R_F = k$, tipo de actualización sin riesgo o rentabilidad de un activo sin riesgo.
- R_m , rendimiento de la cartera del mercado o conjunto de la economía, o rendimiento de la cartera de proyectos de la empresa.
- r , TIR del proyecto.

- E_m , valor medio o esperado de R_m .
- $\text{cov}(R_m, r)$, covarianza entre la rentabilidad del proyecto y la de la economía o de la empresa.
- $\beta = \frac{\text{cov}(R_m, r)}{\sigma_m^2}$, riesgo sistemático del proyecto.
- $\lambda = \frac{(E_m - R_F)}{\sigma_m^2}$, precio de mercado del riesgo o prima exigida por cada unidad adicional de riesgo.
- $p = (E_m - R_F)\beta = \lambda \text{cov}(R_m, r)$, prima de riesgo del proyecto.

En este caso, hemos supuesto que $\text{cov}(R_m, r)$ es constante a lo largo de la vida del proyecto, así como λ .

Este método es muy útil si el nuevo proyecto modifica el riesgo económico de la empresa; claro está, siempre que sea posible calcular $\text{cov}(R_m, r)$ o β , al menos de forma aproximada.

Siguiendo con el ejemplo anterior en el que teníamos que seleccionar un proyecto de inversión arriesgado con un desembolso inicial de 2.500 u.m. y con los siguientes valores esperados de los flujos de caja:

- $E(Q_1) = 1.500$ u.m.
- $E(Q_2) = 1.965$ u.m.

El tipo de actualización sin riesgo, k , es del 5%.

Si suponemos además que el decisor, que ha invertido todo su presupuesto de inversión en la empresa y ha estimado que el rendimiento esperado de la cartera de inversiones de la empresa, que está plenamente diversificada, es un 10% y el coeficiente de volatilidad del rendimiento del proyecto de inversión respecto al rendimiento de la cartera de la empresa es de $\beta = 0,86$.

Tendría el siguiente tipo ajustado a riesgo:

$$s = R_F + (E_m - R_F) \beta = 0,05 + (0,10 - 0,05) 0,86 = 0,093$$

$$\text{E.M.C.} = -A + \sum_{t=1}^n \frac{E(Q_t)}{(1+s)^t} = -2.500 + \frac{1.500}{(1,093)} + \frac{1.965}{(1,093)^2} = 517,2 \text{ u.m.}$$

$\text{EMC} > 0$, por lo que el proyecto de inversión es aceptable.

7. LA REDUCCIÓN A CERTEZA DE LOS FLUJOS NETOS DE CAJA.

7.1. PLANTEAMIENTO.

Un procedimiento alternativo para introducir el riesgo en los modelos de valoración y de selección de proyectos de inversión consiste en ajustar los flujos netos de caja esperados al riesgo. Como ya se ha comentado, si suponemos aversión al riesgo, éste penaliza la satisfacción que proporciona una inversión, por ello, si los flujos de caja incorporasen el riesgo del proyecto, éstos deberían ser penalizados en función de dicho riesgo.

Este método intenta calcular los equivalentes monetarios ciertos de los flujos netos de caja de modo que el riesgo sea incorporado a los mismos. El EMC del proyecto se calculará actualizando las cantidades ciertas (EMC) de los flujos de caja de cada año:

$$EMC = -A + \sum_{t=1}^n \frac{EMC(Q_t)}{(1+k)^t}$$

Para calcular correctamente los EMC de los flujos netos de caja es necesario conocer las distribuciones de probabilidad de los mismos y la función de utilidad del decisor para cada período. El proceso es, de esta forma, más complicado incluso que el cálculo directo de la utilidad esperada del VAN.

En la práctica, los EMC de los flujos netos de caja se obtienen multiplicando $E(Q_t)$ por un coeficiente de reducción a certeza, α_t , de forma que actitudes de aversión al riesgo generan coeficientes α_t inferiores a la unidad (concretamente $0 < \alpha_t < 1$), mientras que actitudes de propensión frente al riesgo implican coeficientes α_t superiores a la unidad (Carrasco, 1991; pp. 142). De este modo, los β_t penalizan¹⁴ los flujos de caja en función del riesgo.

$$EMC(Q_t) = \alpha_t E(Q_t) \rightarrow \alpha_t = \frac{EMC(Q_t)}{E(Q_t)}$$

La correcta aplicación de este método exige que los flujos de caja sean independientes, ya que para determinar los coeficientes α_t estamos teniendo en cuenta el riesgo asociado al flujo neto de caja del periodo, pero no la posible interrelación entre éste y los demás flujos.

Desde un punto de vista teórico estricto, como ya hemos dicho, habría que calcular los α_t a través de la determinación de los EMC de los flujos de caja partiendo de sus distribuciones de probabilidad y de la función de utilidad del decisor para cada periodo. Sin embargo, en la práctica, los α_t se calculan de una forma subjetiva, a juicio del decisor, o formalizando dicha subjetividad suponiendo una relación “objetiva” entre los α_t y un medidor del riesgo de los flujos de caja, por ejemplo, el coeficiente de variación.

Veamos un ejemplo en el que se cumple una relación entre el factor α_t y el medidor de riesgo seleccionado en este caso, el coeficiente de variación (β_t) tal y como muestra el Gráfico 7.

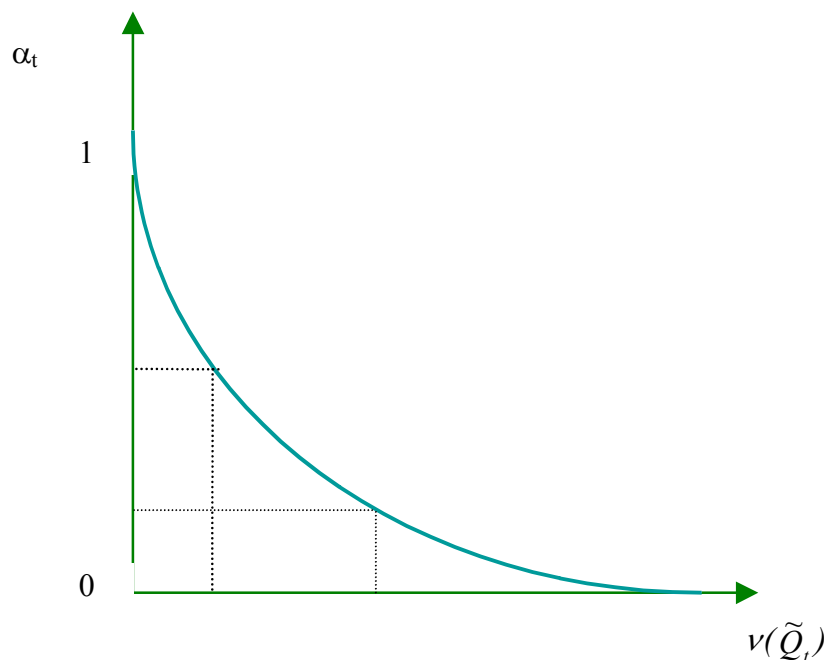


Gráfico 7. Coeficiente α_t según al riesgo de los flujos de caja.

¹⁴ Si suponemos aversión; en el caso contrario, en el que se asuma que el decisor es propenso al riesgo, β_t lo que recoge es un premio por ese mayor riesgo.

Para cada valor de $v(Q_t)$ le podremos asignar un α_t determinado. Cuanto más grande sea $v(Q_t)$, más pequeño será α_t . Ahora bien, la relación entre α_t y $v(Q_t)$ la deberá determinar el decisor.

Veamos un ejemplo para comprender la aplicación de este método de selección de inversiones en condiciones de riesgo. La dirección financiera de una empresa está analizando un proyecto de inversión con 3 años de vida, un tipo de interés sin riesgo de 7% y un desembolso inicial de 45.000 u.m. Sobre los flujos netos de caja es posible determinar la distribución de probabilidad asociada a cada uno de ellos. Los valores posibles de dichas magnitudes y sus probabilidades asociadas son los siguientes:

Año 1		Año 2		Año 3	
Q ₁	Probabilidades	Q ₂	Probabilidades	Q ₃	Probabilidades
10.000	0,05	18.000	0,10	25.000	0,03
12.000	0,10	20.000	0,17	28.000	0,17
14.000	0,35	22.000	0,23	31.000	0,30
16.000	0,35	24.000	0,23	34.000	0,30
18.000	0,10	26.000	0,17	37.000	0,17
20.000	0,05	28.000	0,10	40.000	0,03

El director financiero ha decidido aplicar el criterio de reducción a certeza de los flujos netos de caja y para calcular los coeficientes de reducción a certeza empleará la siguiente expresión:

$$\alpha(Q_t) = 1 - \frac{v(Q_t)}{2}$$

siendo $v(Q_t)$ el coeficiente de variación del flujo neto de caja de cada periodo t.

- A = 45.000 u.m.

- $E(Q_1) = 15.000$ u.m.

- $\sigma^2(Q_1) = (10.000^2 \times 0,05 + 12.000^2 \times 0,10 + 14.000^2 \times 0,35 + 16.000^2 \times 0,35 + 18.000^2 \times 0,10 + 20.000^2 \times 0,05) - (15.000)^2 = 5.000.000$ u.m.²

- $E(Q_2) = 23.000$ u.m.

- $\sigma^2(Q_2) = (18.000^2 \times 0,10 + 20.000^2 \times 0,17 + 22.000^2 \times 0,23 + 24.000^2 \times 0,23 + 26.000^2 \times 0,17 + 28.000^2 \times 0,10) - (23.000)^2 = 8.520.000$ u.m.²

- $E(Q_3) = 32.500$ u.m.

- $\sigma^2(Q_3) = (25.000^2 \times 0,03 + 28.000^2 \times 0,17 + 31.000^2 \times 0,30 + 34.000^2 \times 0,30 + 37.000^2 \times 0,17 + 40.000^2 \times 0,03) - (32.500)^2 = 11.610.000$ u.m.²

	$E(Q_t)$	$\sigma^2(Q_t)$	$\sigma(Q_t)$	$\beta(Q_t) = \sigma(Q_t)/E(Q_t)$	$\alpha(Q_t)$
Q_1	15.000	5.000.000	2.236,06	0,149	0,93
Q_2	23.000	8.520.000	2.918,90	0,127	0,94
Q_3	32.500	11.610.000	3.407,34	0,105	0,95

$$EMC = -A + \sum_{t=1}^n \frac{\alpha_t E(Q_t)}{(1+k)^t} = -45.000 + \frac{0,93 \times 15.000}{1,07} + \frac{0,94 \times 23.000}{(1,07)^2} + \frac{0,95 \times 32.500}{(1,07)^3}$$

$$EMC = 12.124,5 \text{ u.m.}$$

De donde se deduce que el proyecto de inversión es aceptable, ya que el EMC es positivo.

8. CASO PRÁCTICO.

Una empresa constructora ha recibido noticias sobre la construcción de un túnel en uno de los principales accesos a un importante núcleo urbano. La fecha prevista para el inicio de las obras es el 15 de febrero de 2003.

La Diputación Provincial correspondiente va a sacar a subasta la ejecución de la obra y la empresa que obtenga finalmente la licencia deberá encargarse de su construcción, disfrutando a cambio de la explotación del túnel y el cobro del correspondiente peaje. El plazo de ejecución de la obra se estima en un año y la licencia de explotación tendrá una vigencia de diez, a partir de su puesta en funcionamiento, momento en el cual la gestión y explotación del túnel revertirá a la Administración Pública.

Además de las inversiones iniciales que conlleva la construcción del túnel, hemos de tener en cuenta los gastos necesarios para llevar a cabo la explotación del mismo, así como los gastos de mantenimiento para conservar el túnel en óptimas condiciones durante el período de explotación.

Con todo ello, se trata de valorar la idoneidad de acudir a la licitación de la concesión de la citada obra y su explotación durante un período de 10 años.

Para ello, en primer lugar, deberemos estimar las inversiones que es necesario efectuar, ayudados de la información contenida en la tabla siguiente (en euros corrientes):

Conceptos	31-12-2002
Inversión en la obra inicial	3.840.000
Expropiaciones	1.700.000
Permisos y licencias	460.000
Total Inversiones	6.000.000

De dichas inversiones, un 30% se pretenden financiar con recursos propios, el resto mediante una emisión de deuda.

Asimismo se han realizado estimaciones de los ingresos y gastos de explotación previstos para los diez años, durante los cuales se llevará a cabo la explotación. Supondremos, para facilitar los cálculos, que los ingresos y gastos coinciden con los cobros y pagos salvo, evidentemente, las amortizaciones.

INGRESOS.

En el caso de que se obtenga la concesión, se recibirán como ingresos los correspondientes al peaje.

Ingresos de peaje: Incluiremos los cobros de los peajes netos, sin incluir el IVA y valorados en unidades monetarias corrientes.

Para estimar los ingresos se han efectuado una serie de previsiones sobre los vehículos que podrían circular por el túnel. Se ha previsto que el número de vehículos que circulará el primer año será de 5.475.000¹⁵. El estudio de tráfico ha permitido asimismo definir las horas punta y valle de circulación.

DÍAS	HORAS VALLE
Laborables	De 0:00 a 7:00 H.; de 10:00 a 17:00 H. y de 21:00 a 24:00 H.
Sábados y festivos	De 0:00 a 18:00 H. y de 22:00 a 24:00 H.

Se ha estimado un reparto de circulación entre horas valle y horas punta aproximadamente de un 50% para ambos tramos. Con lo cual el número de vehículos que se espera que circularían anualmente en horas punta y horas valle será de 2.737.500, con un crecimiento anual del 5% durante los cinco primeros años, y de un 2% los cinco siguientes, en los que se alcanzaría un cierto grado de saturación. Asimismo se ha previsto aplicar bonificaciones en forma de descuentos a los usuarios habituales, descuentos que serán más agresivos en las horas punta.

Se ha establecido como tarifa a pagar la siguiente:

Tarifas a pagar año actual (sin descuento y sin IVA)	
Tarifa horas punta:	0,75 euros
Tarifa horas valle:	0,5 euros

Con lo que las tarifas efectivas serán:

- Tarifas durante horas punta:

Tramo de descuentos	Rango de viajes de		a	Distribución	Descuento aplicado	Tarifa resultante	Ingresos anuales
A	1	5		40,00%	0%	0,75	821.250
B	6	10		20,00%	10%	0,68	369.563
C	11	20		10,00%	20%	0,6	164.250
D	20	30		5,00%	30%	0,53	71.859
E	30	50		5,00%	40%	0,45	61.594
F	51	en adelante		20,00%	50%	0,38	205.313
				100%	17,50%	0,62	1.693.828

- Tarifas durante horas valle:

¹⁵ Es decir, una Intensidad Media Diaria de 15.000 vehículos.

Tramo de descuentos	Rango de viajes		Distribución	Descuento aplicado	Tarifa resultante	Ingresos anuales
	de	a				
A	1	5	70,00%	0%	0,5	958.125
B	6	10	10,00%	10%	0,45	123.188
C	11	20	5,00%	15%	0,43	58.172
D	20	30	2,00%	20%	0,4	21.900
E	30	50	1,00%	25%	0,38	10.266
F	51	en adelante	12,00%	35%	0,33	106.763
			100,00%	6,60%	0,70	1.278.413

De modo que los ingresos estimados para el primer año de explotación son de 2.972.240,6 euros¹⁶. En años sucesivos, la evolución de los ingresos se determinará en función de la evolución de la circulación prevista.

GASTOS.

Dentro de las partidas de gastos de explotación se han considerado las siguientes:

- **Participación en los ingresos de peaje de la Diputación Provincial:** se recoge la participación en los ingresos de peaje de la Diputación calculados como el 50% de los ingresos anuales que resulten sobre la recaudación que para cada año supere los 3.500.000 euros.
- **Gastos de mantenimiento y conservación ordinarios:** pago anual estimado para las operaciones ordinarias de mantenimiento; incluye conceptos de personal, suministros y demás gastos necesarios para realizar dicha labor. La partida de mantenimiento ordinario depende del tráfico medio que exista en el túnel y de la antigüedad del mismo. Se estiman en un 8% del volumen de negocio los primeros tres años, un 12% durante los cinco siguientes y un 4% durante los dos últimos en los que ya está cerca la reversión a la Administración Pública.
- **Costes de percepción de peaje:** pago anual estimado para las operaciones relacionadas con el cobro de peaje. La partida de percepción de peaje depende del volumen de usuarios que pagan peaje. Se ha estimado en un 4% de los cobros realizados, con un mínimo, aunque no se adquiriera el volumen mínimo de negocio, de 480.000 euros para el primer año de explotación. Dicho mínimo se revalorizará cada año en función del IPC, que se ha estimado que sea de un 2% anual.
- **Gastos de gestión de la concesión:** pago anual estimado para la gestión de la concesionaria. Esta partida se revalorizará en función del IPC estimado, estimándose que los pagos previstos para el primer año por este concepto ascenderán a 400.000 euros.
- **Gastos varios:** todos los pagos que se relacionan con conceptos como el coste del IBI, los seguros, los gastos por servicios diversos al usuario, etc. Se estiman en un 20% de los cobros.

Se supone que las inversiones efectuadas se amortizan de un modo lineal, y que dicha amortización es deducible en el Impuesto sobre Sociedades. La amortización anual es de 554.000 euros ya que los gastos de permisos y licencias son gastos deducibles durante el primer ejercicio.

¹⁶ Se ha supuesto, para facilitar los cálculos, que el período de ejecución del túnel es nulo. En caso contrario, los ingresos comenzarían tras finalizar la construcción.

De este modo tenemos el desembolso inicial y los flujos de caja previstos para los distintos años que dura la concesión:

Año	Flujo de Caja (Escenario I)
2002	-5.850.500
2003	0
2004	1.030.558,9
2005	1.090.904,4
2006	1.154.623,5
2007	1.128.992,1
2008	1.157.287,7
2009	1.153.3207,5
2010	1.149.045,6
2011	1.144.800,5
2012	1.351.642,2
2013	1.351.449,0

PLANTEAMIENTO SOBRE SU RESOLUCIÓN:

Una primera aproximación para decidir sobre la viabilidad de este proyecto de inversión es calcular el VAN en condiciones de certeza.

Una vez conocidos el desembolso inicial, los flujos de caja y el horizonte temporal, únicamente se precisa conocer el tipo de interés. Encontrar un tipo de interés sin ningún tipo de riesgo es difícil, pero una aproximación más o menos acertada sería tomar el tipo de los Obligaciones del Estado español a 10 años. El horizonte seleccionado es coherente con el horizonte empleado en la valoración que es igualmente 10 años, dicho tipo a 2 de enero es el 4,33% (Fuente: Banco de España). Utilizaremos un tipo de interés neto, es decir, descontados los impuestos, por lo que el tipo de actualización a emplear es el 2,92%.

De este modo, podemos calcular el VAN en condiciones de certeza:

$$\begin{aligned} \text{VAN} = & -5.850.500 + \frac{1.030.558,9}{(1+0,0292)^2} + \frac{1.090.904,4}{(1+0,0292)^3} + \frac{1.154.623,5}{(1+0,0292)^4} + \frac{1.128.992,1}{(1+0,0292)^5} + \\ & + \frac{1.157.287,7}{(1+0,0292)^6} + \frac{1.153.207,5}{(1+0,0292)^7} + \frac{1.149.045,6}{(1+0,0292)^8} + \frac{1.144.800,5}{(1+0,0292)^9} + \frac{1.351.642,2}{(1+0,0292)^{10}} + \\ & + \frac{1.351.449,0}{(1+0,0292)^{11}} = \end{aligned}$$

$$\text{VAN} = 3.840.885 \text{ euros}$$

De forma que el proyecto de inversión resulta aceptable. Sin embargo, parece evidente que no se dan las circunstancias para que ésta pueda ser considerada una inversión sin riesgo. Por lo que parece más adecuado proceder a la evaluación de esta inversión en condiciones de riesgo.

Al aplicar el criterio de la esperanza matemática, nos encontramos ante la necesidad de que el decisor sea neutral al riesgo o que la concesión del túnel se repita un número "n" de veces, de modo que se pueda aceptar el

valor medio como resultado. Ninguna de las dos circunstancias parece realista. Por lo que procederemos a valorar el proyecto mediante otra metodología.

La alternativa más correcta desde un punto de vista teórico es el de la utilidad esperada. Pero en este caso, como ocurre en la mayoría de las situaciones reales, no conocemos la función de utilidad, por lo que nos va a resultar imposible aplicar este método. Algo parecido ocurre con el procedimiento de reducción a certeza de los flujos de caja, ya que resulta difícil estimar el coeficiente de reducción a certeza (U_t).

Otra metodología que podemos aplicar es la del tipo ajustado a riesgo. De las distintas alternativas a las que podemos acudir para calcular la prima de riesgo, la que utilizaremos en este caso es la que corresponde al C.M.P.C. Para que esto sea válido debemos suponer que el proyecto no modifica el riesgo económico de la empresa, lo cual parece aceptable si consideramos que la empresa se dedica a la explotación de este tipo de proyectos.

Debemos calcular cual es el coste de los recursos propios y el coste de la deuda en el mercado para empresas similares.

Para conocer el coste de la deuda a largo plazo acudimos al mercado para conocer cuál puede ser el coste de la deuda en el mercado para este tipo de empresas. Buscando una empresa similar, en cuanto al nivel de riesgo, encontramos AUREA¹⁷ que entre otras tiene la concesión de las autopistas A-7, entre Tarragona y Valencia y entre Valencia y Alicante, y A-4, entre Sevilla y Cádiz (todos los tramos hasta 2.019). Por ello creemos que puede ser una empresa más o menos similar a la que se dedique a la explotación de esta inversión que pretendemos valorar. El diferencial que le cobran a AUREA es de aproximadamente el 0,3% sobre el tipo de interés sin riesgo¹⁸, por lo que el tipo de interés de la deuda a largo plazo que emplearemos será el 3,13%, que es la resultante de añadir el diferencial del 0,3% al tipo de interés sin riesgo de referencia a largo plazo, que son las Obligaciones del Estado español a 10 años.

Para conocer el coste de los recursos propios, un método adecuado puede ser el C.A.P.M., pero para aplicarlo, necesitamos conocer el tipo de interés sin riesgo, el rendimiento de la cartera de mercado y el beta de una empresa de características similares.

Respecto al tipo de interés sin riesgo, seguiremos utilizando el tipo de las Obligaciones del Estado a 10 años, que es el 4,33%. Para conocer la rentabilidad de la cartera de mercado, acudimos al índice general de la Bolsa de Madrid¹⁹. Tomamos como dato el dato de cierre del primer día de cotización del mes. El horizonte seleccionado a considerar 10 años, acorde con el período de valoración. Calculamos las rentabilidades mensuales, de modo que tenemos 120 datos de rentabilidades mensuales. El promedio de esas rentabilidades, en términos anuales, es del 13,49%²⁰. Proponemos esta rentabilidad histórica como rentabilidad futura estimada de la cartera de mercado.

Para calcular la beta, hemos de buscar una empresa de similares características a la nuestra, ya que nuestra empresa no cotiza en el mercado bursátil. Siendo coherentes con el planteamiento anterior hemos vuelto a seleccionar AUMAR²¹. La beta es 0.5128 (www.bolsavalencia.es) correspondiente a las 250 últimas sesiones, y acorde con los datos anuales de rentabilidad de mercado y sin riesgo considerados.

¹⁷ AUREA Concesiones de Infraestructuras, S.A. (AUREA) es la nueva denominación que se ha dado a la sociedad resultante de la fusión producida a finales de 2000 entre Autopistas del Mare Nostrum, S.A. (AUMAR) y VALORA 2000 S.A., sociedad esta última participada íntegramente por Grupo Dragados.

¹⁸ Dicha información ha sido extraída de las Cuentas Anuales y el Informe Anual presentados a 31 de diciembre del 2001, por AUREA.

¹⁹ Boletín estadístico del Banco de España desde 1992.

²⁰ El cálculo corresponde al período enero 1992 - diciembre 2002

²¹ Podríamos haber seleccionado una media del sector o cualquier otra empresa representativa. En cualquier caso, para lo que pretende este ejercicio, que es la búsqueda de una solución realista, tampoco creemos que sea lo más importante. AUMAR es la empresa existente antes de la fusión con Dragados que mejor se asimila a nuestra empresa.

De este modo, podemos calcular el coste de los recursos propios.

$$i_{RP} = r_F + \beta (R_m - r_F) = 4,33 + 0,5128 (13,49 - 4,33) = 9,03\%$$

La estructura financiera inicial se irá modificando a medida que se vaya amortizando la deuda y se acumulen nuevos fondos propios vía reservas. Si suponemos que los flujos de caja no comprometidos con los acreedores se reparten vía dividendos²², la estructura financiera sólo se verá alterada como consecuencia de la amortización de la deuda. En un inicio el ratio de endeudamiento a largo plazo es $D_{L/P}/R.P. = 4.200/1.800 = 2,33$; mientras que al final de la concesión ya se habrá devuelto toda la deuda, por lo que el ratio será cero. Suponiendo una amortización lineal de la deuda, el ratio de apalancamiento financiero medio será 1,16²³.

El C.M.P.C. resultaría:

$$CMPC = 9,03 \times \frac{1}{2,16} + 4,63 \times (1 - 0,325) \times \frac{1,16}{2,16} = 5,86\%$$

De este modo el EMC calculado a través de un tipo ajustado a riesgo será:

$$\begin{aligned} EMC = & -5.850.500 + \frac{1.030.558,9}{(1 + 0,0586)^2} + \frac{1.090.904,4}{(1 + 0,0586)^3} + \frac{1.154.623,5}{(1 + 0,0586)^4} + \\ & + \frac{1.128.992,1}{(1 + 0,0586)^5} + \frac{1.157.287,7}{(1 + 0,0586)^6} + \frac{1.153.207,5}{(1 + 0,0586)^7} + \frac{1.149.045,6}{(1 + 0,0586)^8} + \\ & + \frac{1.144.800,5}{(1 + 0,0586)^9} + \frac{1.351.642,2}{(1 + 0,0586)^{10}} + \frac{1.351.449,0}{(1 + 0,0586)^{11}} = \end{aligned}$$

$$EMC = 2.255.224 \text{ euros}$$

Con lo cual el proyecto sigue siendo igualmente aceptable, ya que el EMC es positivo.

Asimismo, para completar el análisis se han definido dos escenarios más que emplean estimaciones diferentes en cuanto al volumen de vehículos que circularían durante los próximos años. En el Escenario II se ha estimado 10.000 vehículos diarios para el próximo año, mientras que para el Escenario III se han estimado 20.000.

De este modo tenemos el desembolso inicial y los flujos de caja previstos para los distintos años que dura la concesión:

Año	Flujo de Caja (Escenario I)	Flujo de Caja (Escenario II)	Flujo de Caja (Escenario III)
2002	-5.850.500	-5.850.500	-5.850.500
2003	0	0	0
2004	1.030.558,9	549.056,0	1.355.803,6
2005	1.090.904,4	585.326,3	1.373.348,8
2006	1.154.623,5	623.766,5	1.392.127,7
2007	1.128.992,1	602.558,9	1.288.342,3

²² Para conocer la evolución de la estructura financiera, el análisis debería completarse con la elaboración de un plan financiero, pero creemos que excede del cometido de este ejercicio.

²³ Otra opción consiste en tomar el ratio de endeudamiento de empresas del mismo sector, por ejemplo AUMAR, cuyo ratio $D_{L/P}/R.P.$ es de 1,22. En cualquier caso el resultado no difiere en exceso.

2008	1.157.287,7	642.595,1	1.303.605,2
2009	1.153.3207,5	651.846,0	1.302.451,3
2010	1.149.045,6	661.281,9	1.301.274,3
2011	1.144.800,5	670.906,5	1.300.073,8
2012	1.351.642,2	821.504,8	1.580.411,5
2013	1.351.449,0	834.333,9	1.584.793,7

Si calculamos el EMC en cada escenario suponiendo un tipo de actualización del 5,86%, los resultados obtenidos para cada escenario son:

	Escenario I	Escenario II	Escenario III
EMC	2.255.224 euros	-1.291.091 euros	3.740.377 euros

En concreto, el número mínimo de vehículos que debe circular durante el primer año para que el proyecto siga siendo rentable, si se mantiene el resto de previsiones constantes, es de 11.653. Como vemos esta cifra está bastante por debajo de la inicialmente prevista (un 22%) por lo que a priori sí parece un proyecto rentable.

9. CONCLUSIONES.

La decisión de aceptar o rechazar un proyecto de inversión arriesgado debe realizarse mediante el cálculo de su rentabilidad, teniendo en cuenta por un lado, la actitud del decisor frente al riesgo y por otro lado, el nivel de riesgo del proyecto. Por tanto, el criterio de la Esperanza Matemática del VAN no se adecúa a estas circunstancias, surgiendo la necesidad de buscar criterios de decisión aplicables en condiciones de riesgo.

Desde un punto de vista teórico los criterios de decisión más correctos son aquellos que introducen una función de utilidad del decisor, indicativa del grado de satisfacción que un proyecto de inversión le proporciona a un individuo, teniendo en cuenta cuál es la actitud que dicho individuo muestra frente al riesgo. El problema de estos modelos radica en la complejidad de definir las funciones de utilidad, sobre todo teniendo en cuenta que las decisiones de inversiones normalmente son analizadas por un colectivo estructurado.

Como alternativa a estos modelos, y basados en las premisas establecidas en los mismos, se proponen procedimientos de decisión cuya aplicación en la práctica es más sencilla de llevar a cabo. Estos criterios son: (1) el ajuste al riesgo del tipo de actualización, (2) la reducción a certeza de los flujos netos de caja y (3) la regla media-varianza. En estos criterios se tiene en consideración el riesgo y la actitud del decisor frente al mismo. Así, a través del ajuste al riesgo del tipo de actualización se actualizan los flujos netos de caja esperados de un proyecto de inversión a un tipo de actualización que incorpora una prima de riesgo, calculada en función del riesgo del proyecto. Por su parte, en el procedimiento de reducción a certeza de los flujos netos de caja, la consideración del riesgo se realiza mediante la utilización de unos coeficientes de reducción a certeza de los flujos netos de caja. En este caso, la actualización del equivalente monetario cierto de los flujos netos de caja se realiza a un tipo de interés sin riesgo.

Los procedimientos anteriores, si bien permiten calcular la rentabilidad de un proyecto de inversión arriesgado sin necesidad de definir una función de utilidad, también presentan dificultades para su aplicación práctica. Estas dificultades se derivan de la necesidad de calcular una prima de riesgo en el caso del criterio del ajuste al riesgo del tipo de actualización; y de tener que calcular los coeficientes de reducción a certeza de los flujos netos de caja en el procedimiento que lleva ese nombre.

En el criterio de la media-varianza se simplifica el cálculo de la función de utilidad, ya que no es necesario definir toda la distribución de probabilidad del VAN, como ocurría en el criterio de la utilidad esperada del VAN, sino que únicamente a través de dos parámetros, la esperanza del VAN y un medidor del riesgo (la varianza desviación típica del VAN, etc.), recogemos la utilidad que proporciona el citado proyecto.

BIBLIOGRAFÍA

- ARROYO, M. A. y PRAT, M. (1996): *Dirección financiera*. Deusto, Bilbao, cap. 7.
- BLANCO, F. y FERRANDO, B. (1996): *Dirección financiera de la empresa: Inversiones*. Pirámide, Madrid, cap. 8.
- BREALEY, R. y MYERS, S. (1998): *Fundamentos de financiación empresarial*. McGraw-Hill, Madrid, capts. 9 y 19.
- BREALEY, R.; MYERS, S. y MARCUS, A. (1996): *Principios de dirección financiera*. McGraw-Hill, Madrid, cap. 10.
- CARRASCO, M. (1991): "El criterio del valor actualizado neto equivalente a condiciones de certeza para la valoración de inversiones". *Boletín de Estudios Económicos*, vol. XLVI, nº 142, abril, pp.133-145.
- COPELAND, D. E. y WESTON, J. F. (1983): *Financial theory and corporate policy*. Addison Wesley, Massachusetts.
- DE PABLO, A. y FERRUZ, L. (1996): *Finanzas de empresa*. Centro de estudios Ramón Areces, Madrid, cap. 6.
- DOMÍNGUEZ, J. A.; DURBÁN, S. y MARTÍN, E. (1990): *El subsistema de inversión y financiación en la empresa. Problemas y fundamentos teóricos*. Pirámide, Madrid, capts. 8 y 11.
- DURÁN, J. J. (1992): *Economía y dirección de la empresa*. Pirámide, Madrid, cap. 23.
- FERNÁNDEZ, M. (Coor) (1991): *Dirección financiera de la empresa*. Pirámide, Madrid, cap. 19.
- FERNÁNDEZ, A. I. y GARCÍA, M. (1992): *Las decisiones financieras de la empresa*. Ariel, cap. 4.
- FERRUZ, L. (2002): *Dirección financiera*. Gestión 2000, Barcelona, cap. 14.
- GARCÍA-GUTIÉRREZ, C.; MASCAREÑAS, J. y PÉREZ-GOROSTEGUI, E. (1998): *Casos prácticos de inversión y financiación en la empresa*. Pirámide, Madrid, cap. 3.
- KNIGHT, F. H. (1945): *Riesgo, incertidumbre y beneficio*. Aguilar, Madrid.
- LAMBIN J. J. (1969). *Información, decisión y eficacia comercial*. Deusto, Bilbao.
- LEVI, H. y SARNAT, M. (1994): *Capital Investment & Financial Decisions*. Prentice Hall , New Jersey.
- LÓPEZ, M. (1989): *Análisis y adopción de decisiones*. Pirámide, Madrid, capts. 10, 13 y 15.
- MADRID, M. F. y LÓPEZ, J. A. (1993): *Supuestos de economía de la empresa*. Pirámide, Madrid, parte segunda.
- MARÍN, J. M. y RUBIO, G. (2001): *Economía financiera*. Antoni Bosch, Barcelona, cap. 18.
- MORALES-ARCE, R. (1998): *Economía de la empresa: inversión*. UNED, Madrid, cap. 9.
- PIKE, R. (1988): "An empirical study of the adoption of sophisticated capital budgeting practices and decision-making effectiveness". *Accounting and Business Research*, otoño, pp. 341-351.
- PIKE, R. (1996): "A longitudinal survey on capital budgeting practices". *Journal of Business Finance and Accounting*, primavera, pp. 79-92.
- ROBICHEK, A. A. N. y MYERS, S. C. (1978): "Conceptual problems in the use of risk-adjusted discount rates", *Journal of Finance*, diciembre, pp. 395-401.
- SOLDEVILLA, E. (1984): *Decisiones empresariales con riesgo e incertidumbre*. Hispano Europea, cap. 2.
- SOLDEVILLA, E. (1990a): *Inversión y mercado de capitales*. Milladoiro, Vigo, pp. 92-94.
- SUÁREZ, A. S. (1998): *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Pirámide, Madrid, cap. 9 y 11..
- Von NEUMANN-MORGENSTERN (1953): *Theory of games and economic behavior*. Princeton, New Jersey.
- WESTON, J. F. y BRIGHAM, E. F. (1994): *Fundamentos de administración financiera*. McGraw-Hill, México, cap. 15.
- WESTON, J. F. y COPELAND, T. E. (1995): *Finanzas en administración*. McGraw-Hill, México, cap. 13.

ANEXO: CÁLCULO DETALLADO DE LOS FLUJOS DE CAJA EN LOS DISTINTOS ESCENARIOS.

	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Cobros	2.972.241	3.120.853	3.276.895	3.440.740	3.612.777	3.685.033	3.758.733	3.833.908	3.910.586	3.988.798
- Particip. en ingresos por la Diputación	0	0	0	0	56.389	92.516	129.367	166.954	205.293	244.399
- Gastos de mantenimiento y conservación	237.779	249.668	262.152	412.889	433.533	442.204	451.048	460.069	156.423	159.552
- Costes de percepción de peaje	480.000	489.600	499.392	509.380	519.567	529.959	540.558	551.369	562.397	573.644
- Gastos de gestión de la concesión	400.000	408.000	416.160	424.483	432.973	441.632	450.465	459.474	468.664	478.037
- Gastos varios	594.448	624.171	655.379	688.148	722.555	737.007	751.747	766.782	782.117	797.760
=Beneficio estimado	1.260.013	1.349.414	1.443.813	1.405.840	1.447.760	1.441.715	1.435.549	1.429.260	1.735.692	1.735.406
=Beneficio después de impuestos	850.509	910.854	974.574	948.942	977.238	973.157	968.996	964.751	1.171.592	1.171.399
+ Ahorro fiscal amortización	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050
Flujo de Caja Anual	1.030.559	1.090.904	1.154.624	1.128.992	1.157.288	1.153.207	1.149.046	1.144.801	1.351.642	1.351.449

Tabla A.1. Cálculo detallado de los flujos de caja para el Escenario I.

	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Cobros	1.981.494	2.080.568	2.184.597	2.293.827	2.408.518	2.456.688	2.505.822	2.555.939	2.607.057	2.659.199
- Particip. en ingresos por la Diputación	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
- Gastos de mantenimiento y conservación	158.520	166.445	174.768	275.259	289.022	294.803	300.699	306.713	104.282	106.368
- Costes de percepción de peaje	480.000	489.600	499.392	509.380	519.567	529.959	540.558	551.369	562.397	573.644
- Gastos de gestión de la concesión	400.000	408.000	416.160	424.483	432.973	441.632	450.465	459.474	468.664	478.037
- Gastos varios	396.299	416.114	436.919	458.765	481.704	491.338	501.164	511.188	521.411	531.840
=Beneficio estimado	546.676	600.409	657.358	625.939	685.252	698.957	712.936	727.195	950.303	969.309
=Beneficio después de impuestos	369.006	405.276	443.716	422.509	462.545	471.796	481.232	490.857	641.455	654.284
+ Ahorro fiscal amortización	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050
Flujo de Caja Anual	549.056	585.326	623.766	602.559	642.595	651.846	661.282	670.907	821.505	834.334

Tabla A.2. Cálculo detallado de los flujos de caja para el Escenario II.

	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Cobros	3.962.988	4.161.137	4.369.194	4.587.653	4.817.036	4.913.377	5.011.644	5.111.877	5.214.115	5.318.397
- Particip. en ingresos por la Diputación	231.494	330.568	434.597	543.827	658.518	706.688	755.822	805.939	857.057	909.199
- Gastos de mantenimiento y conservación	317.039	332.891	349.535	550.518	578.044	589.605	601.397	613.425	208.565	212.736
- Costes de percepción de peaje	480.000	489.600	499.392	509.380	519.567	529.959	540.558	551.369	562.397	573.644
- Gastos de gestión de la concesión	400.000	408.000	416.160	424.483	432.973	441.632	450.465	459.474	468.664	478.037
- Gastos varios	792.598	832.227	873.839	917.531	963.407	982.675	1.002.329	1.022.375	1.042.823	1.063.679
=Beneficio estimado	1.741.857	1.767.850	1.795.671	1.641.915	1.664.526	1.662.817	1.661.073	1.659.295	2.074.610	2.081.102
=Beneficio después de impuestos	1.175.754	1.193.299	1.212.078	1.108.292	1.123.555	1.122.401	1.121.224	1.120.024	1.400.361	1.404.744
+ Ahorro fiscal amortización	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050	180.050
Flujo de Caja Anual	1.355.804	1.373.349	1.392.128	1.288.342	1.303.605	1.302.451	1.301.274	1.300.074	1.580.411	1.584.794

Tabla A3. Cálculo detallado de los flujos de caja para el Escenario III.

ANEXO II. NATURALEZA Y MEDIDA DEL RIESGO.

1. INTRODUCCIÓN: CERTEZA, RIESGO, INCERTIDUMBRE
2. ANÁLISIS DE PROYECTOS DE INVERSIÓN EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE
 - 7.2.1. Análisis de sensibilidad
3. RIESGO ECONÓMICO Y RIESGO FINANCIERO
4. RIESGO ECONÓMICO ABSOLUTO Y RELATIVO DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN
5. LAS MEDIDAS DEL RIESGO DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN
 - 5.1. Planteamiento del problema. El "perfil de riesgo".
 - 5.2. La varianza de la distribución de probabilidades del VAN o TIR.
 - 5.3. La desviación Típica y el Coeficiente de Variación.
 - 5.4. La semivarianza de Markowitz
 - 5.5. La probabilidad de pérdida y otras medidas relacionadas
6. CÁLCULO DE LA VARIANZA DEL VAN
7. CÁLCULO DE LAS MEDIDAS DE RIESGO EN EL TIR

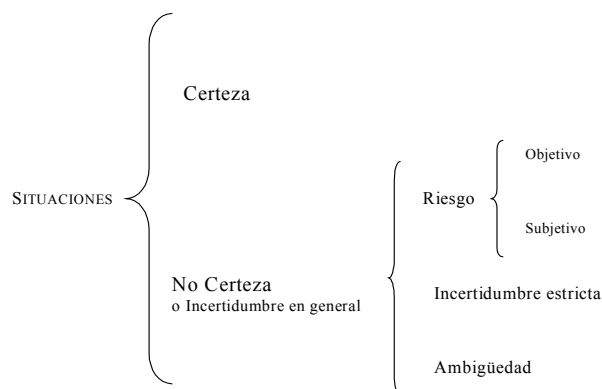
1. INTRODUCCIÓN: CERTEZA, RIESGO E INCERTIDUMBRE

Hasta ahora hemos supuesto que todas las variables determinantes de un proyecto de inversión (A , Q_t y sus componentes, n , k , k' , g) eran ciertas, es decir, eran conocidas de antemano con absoluta certeza, de forma que las previsiones se cumplían perfectamente en la realidad.

Ahora bien, en la práctica este supuesto raras veces se cumple, salvo en inversiones a muy corto plazo, o en inversiones en renta fija. Las circunstancias de un entorno turbulento hacen que la realidad raras veces coincida con las previsiones, especialmente cuando los horizontes temporales son relativamente amplios.

El riesgo o la incertidumbre surgen, pues, de la posibilidad de que los valores efectivamente alcanzados por las variables no coincidan con los valores estimados.

En relación con la dicotomía certeza-incertidumbre, la empresa puede encontrarse en diferentes situaciones:



Vamos a partir de la “matriz de decisión” para distinguir cada una de estas situaciones. Siendo:

A_i : Alternativas de acción a tomar ($i = 1, 2, \dots, n$).

E_j : Estados de la naturaleza o escenarios posibles ($j = 1, 2, \dots, m$).

R_{ij} : Resultados correspondientes a cada alternativa en cada estado de la naturaleza.

Tendremos:

TABLA 1: MATRIZ DE DECISIÓN

		Estados de la Naturaleza			
		E_1	E_2	...	E_m
Alternativas	A_1	R_{11}	R_{12}	...	R_{1m}
	A_2	R_{21}	R_{22}	...	R_{2m}

	A_n	R_{n1}	R_{n2}	...	R_{nm}

Por ejemplo: supongamos que para el lanzamiento de un nuevo producto se nos presentan tres proyectos alternativos:

- El primero (alternativa A_1) consistiría en una inversión reducida, con instalaciones sencillas; la capacidad de producción sería escasa, los costes fijos bajos, pero los costes variables unitarios serían altos, y como consecuencia el margen bruto unitario sería reducido.

- El segundo (alternativa A_2) supondría una inversión moderada, con instalaciones medianamente complejas, capacidad de producción media, costes fijos más elevados y costes variables unitarios más bajos; el margen bruto unitario se situaría en un nivel medio.

- El tercero (alternativa A_3) representaría una inversión muy importante, con instalaciones muy sofisticadas de alta capacidad de producción, que sólo podría ser absorbida por una fuerte demanda. Los costes fijos serían altos, pero los costes variables unitarios bajos, resultando un margen bruto unitario elevado.

La empresa, además, considera que pueden producirse tres escenarios diferentes: uno de ellos (E_1) implica un estancamiento de la economía, con muy bajo crecimiento de la demanda; otro (E_2) representa una situación de crecimiento sostenido, pero moderado, de la demanda, y el tercero (E_3) es de fuerte expansión económica.

La empresa ha estimado, para cada proyecto en cada escenario, su VAN respectivo, que se muestran como resultados en la tabla 2²⁴:

²⁴ Para obtener los VANes de las diferentes alternativas en cada escenario, se habrán realizado, en su caso, las oportunas homogeneizaciones.

TABLA 2: RESULTADOS (VANES) DE LOS TRES PROYECTOS PARA LOS TRES ESCENARIOS

	E ₁	E ₂	E ₃
A ₁	R ₁₁ = 10	R ₁₂ = 15	R ₁₃ = 15
A ₂	R ₂₁ = -10	R ₂₂ = 22	R ₂₃ = 30
A ₃	R ₃₁ = -30	R ₃₂ = 20	R ₃₃ = 50

En condiciones de **certeza**, conocemos el estado que se va a producir; sólo existe un estado, luego se elimina el resto, existiendo una sola columna de resultados. En ella, se elige la alternativa que proporciona mejor resultado. Así, en el ejemplo, si la empresa conoce con absoluta seguridad que se va a producir el escenario E₁ (estancamiento), escogerá el proyecto A₁, realizando por tanto una inversión reducida.

La situación de **riesgo** es aquella en la cual conocemos la distribución de probabilidades de los distintos estados de naturaleza, bien sea continua o discreta (cada estado tiene su probabilidad de ocurrencia). Por lo tanto, al menos una de las variables asociadas al proyecto de inversión será aleatoria y tendrá una distribución de probabilidades. En el ejemplo, supongamos que la empresa estima las probabilidades de ocurrencia de cada escenario en: P(E₁) = 0,2; P(E₂) = 0,5; P(E₃) = 0,3 (distribución discreta de probabilidades). En tal caso, puede obtener, por ejemplo, el VAN esperado de cada alternativa:

$$A_1: E(VAN_1) = 10 \times 0,2 + 15 \times 0,5 + 15 \times 0,3 = 14$$

$$A_2: E(VAN_2) = -10 \times 0,2 + 22 \times 0,5 + 30 \times 0,3 = 18$$

$$A_3: E(VAN_3) = -30 \times 0,2 + 20 \times 0,5 + 50 \times 0,3 = 19$$

Pero, como veremos, no necesariamente se escogerá la alternativa de mayor VAN esperado²⁵; deben tenerse en cuenta otros parámetros, las “medidas del riesgo”, que examinaremos más adelante en este mismo tema.

Será **riesgo objetivo** si las distribuciones de probabilidades pueden establecerse en base a datos históricos, a experiencias pasadas.

Ahora bien, los proyectos de inversión, sobre todo los más importantes, suelen representar una novedad total o casi total para la empresa, por lo que no se puede encontrar base objetiva suficiente para calcular distribuciones de probabilidad. En tales circunstancias, la asignación de probabilidades debe hacerse de forma subjetiva, en base a la intuición y experiencia del decisor. Nos encontramos, pues, en presencia de **riesgo subjetivo**. Como dice el Profesor Suárez (1993, p. 124): “la probabilidad ‘subjetiva’ es un número que cuantifica el concepto cualitativo de verosimilitud del sujeto decisor, y se basa en su experiencia, en su intuición, en sus sentimientos o en sus conocimientos”. En la práctica, esta asignación subjetiva ha dado buenos resultados.

²⁵ Como veremos más adelante, en la selección de proyectos de inversión con riesgo esa elección normalmente correspondería a un decisor **neutral** respecto del riesgo.

Se denomina **incertidumbre estricta** a la situación en la cual se desconocen las probabilidades asociadas a los estados de la naturaleza (no se conoce la distribución de probabilidades de las variables aleatorias del proyecto de inversión). Existen varios criterios para decidir en tales condiciones (criterio de Laplace, de Wald, Hurwicz, Savage, etc.), pero se puede demostrar que todos ellos se fundamentan en una asignación implícita de probabilidades subjetivas, luego se reducen al caso de “riesgo subjetivo”.

Aún así, existen procedimientos para analizar -que no criterios para escoger- proyectos de inversión en condiciones que se pueden asimilar a la incertidumbre, como veremos más adelante.

Las situaciones de **ambigüedad** son aquellas en que se desconocen, o no se pueden conocer con claridad, los estados de naturaleza que pueden presentarse. Todas las situaciones, de hecho, tienen mayor o menor grado de ambigüedad, pero ésta suele ser difícilmente formalizable. Una formalización posible está en la “teoría de los subconjuntos borrosos”, aunque es bastante compleja²⁶.

Por ello, muchos autores estiman que lo más procedente para tratar situaciones de no certeza es buscar la mayor información posible, para realizar una estimación subjetiva de probabilidades en función de dicha información. Y si, según las circunstancias, ni siquiera es posible -o sensato- hacer una estimación de ese tipo, puede analizarse el proyecto en base a los métodos que son considerados en el siguiente apartado.

2. EL ANÁLISIS DE PROYECTOS DE INVERSIÓN EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE.

En condiciones de incertidumbre no se conoce la distribución de probabilidades de los futuros estados de la naturaleza, y por tanto son desconocidas las distribuciones de probabilidades de las variables asociadas al proyecto de inversión a considerar.

Pero aún en esta situación, existen procedimientos para el análisis de proyectos de inversión. Nos referiremos a dos de ellos: el “análisis de sensibilidad” y los “intervalos de confianza”.

2.1. Análisis de sensibilidad

El **análisis de sensibilidad** puede aplicarse cuando estamos en condiciones de estimar un “valor esperado” o “valor de expectativas” para las variables del proyecto, pero desconocemos las distribuciones de probabilidades asociadas a las mismas.

Mediante este análisis se trata de establecer la sensibilidad del resultado obtenido (VAN, TIR, plazo de recuperación, etc.) ante posibles alteraciones del valor de las variables asociadas al proyecto (A , Q_t o sus componentes, k , k' , g) con respecto a su “valor de expectativa”, para de esta forma tener una idea aproximada del grado de confianza de los resultados obtenidos.

²⁶ En los conjuntos “ordinarios”, un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto (por ejemplo: “una persona de 36 años es legalmente mayor de edad, una persona de 13 años no lo es”); diremos que, en los conjuntos ordinarios, la función de pertenencia de un elemento a un conjunto sólo puede tener dos valores: 0 ó 1. Pero en la realidad, esto no siempre es factible (por ejemplo: “¿en qué grado es ‘joven’ una persona de 36 años?”); por ello, en un “subconjunto borroso” la función de pertenencia -subjetiva- de algunos de sus elementos no es 1, como en los conjuntos ordinarios, sino que está comprendida entre 0 y 1. Ver Kaufmann y Gil Aluja (1986).

Por tanto, este procedimiento permite analizar la variabilidad de la rentabilidad del proyecto ante las alteraciones de los parámetros estimados. Aquellos parámetros a los que el resultado es más sensible deberán estimarse con mayor precisión, y las variables correspondientes deberán ser controladas más estrechamente²⁷.

Pueden establecerse medidas de sensibilidad, tanto absolutas como relativas, del VAN, TIR, plazo de recuperación, etc., respecto de las variaciones posibles en el valor de las variables constitutivas del proyecto. Por ejemplo, medidas absolutas de sensibilidad podrían ser:

$$\frac{\Delta VAN}{\Delta Q_t}, \frac{\Delta VAN}{\Delta k}, \frac{\Delta VAN}{\Delta N_t}, \frac{\Delta TIR}{\Delta Q_t}, \frac{\Delta TIR}{\Delta k}, \frac{\Delta TIR}{\Delta N_t}$$

Y medidas relativas:

$$\frac{\Delta VAN/VAN}{\Delta Q_t/Q_t}, \frac{\Delta VAN/VAN}{\Delta k/k}, \frac{\Delta VAN/VAN}{\Delta N_t/N_t}, \frac{\Delta TIR/TIR}{\Delta Q_t/Q_t}, \frac{\Delta TIR/TIR}{\Delta k/k}, \frac{\Delta TIR/TIR}{\Delta N_t/N_t}$$

Una limitación del análisis de sensibilidad es que tiene un carácter “parcial”, pues sólo analiza las variaciones con respecto a una sola variable cada vez.

Vemos que el análisis de sensibilidad se basa en simulaciones sobre los posibles valores de las variables que configuran el proyecto. Para realizar estas simulaciones, pueden resultar muy útiles ciertas aplicaciones informáticas, por ejemplo en hoja de cálculo.

También pueden establecerse intervalos entre los que se estima que puede oscilar la rentabilidad del proyecto, o “tripleas”, reflejando los escenarios “pesimista”, “intermedio” y “optimista”, lo cual nos conduce al siguiente procedimiento.

3. RIESGO ECONÓMICO Y RIESGO FINANCIERO

Considerando situaciones de riesgo, y generalmente, riesgo subjetivo, veamos en primer lugar qué circunstancias del proyecto de inversión son capaces de generar riesgo²⁸.

Habitualmente, se distingue entre el riesgo debido a la explotación del proyecto (**riesgo económico**) y el originado por la forma de financiarlo (**riesgo financiero**).

El **riesgo económico** es el asociado a la variabilidad de los flujos netos de caja. Consta de dos aspectos principales: el primero es la incertidumbre sobre la demanda del producto; el segundo se refiere a la variabilidad de los gastos variables, y al volumen de los gastos fijos. Este segundo aspecto está relacionado con el grado de **apalancamiento operativo** del proyecto: cuanto mayor apalancamiento operativo, mayor riesgo. Por ello, en ocasiones es denominado “riesgo operativo”²⁹.

²⁷ El “análisis de sensibilidad” es tratado con detalle en Suárez (1993), cap. 10.

²⁸ En realidad, el contenido de este apartado es también aplicable al caso de incertidumbre estricta.

²⁹ El ejemplo propuesto en el apdo. 7.1 muestra tres proyectos alternativos con distinto grado de apalancamiento operativo, y en consecuencia diferente nivel de “riesgo operativo”.

En cuanto al **riesgo financiero**, se estima que, en general, en la empresa aumenta al aumentar el endeudamiento, y esto es debido a dos factores:

- Al aumentar el endeudamiento, aumenta la probabilidad de insolvencia (incapacidad para hacer frente a los pagos), con los costes que ello origina.

- Al aumentar el importe de los intereses a pagar, mayor es la variabilidad de la rentabilidad sobre los recursos propios.

En consecuencia, como cuanto mayor sea la parte del proyecto financiada con deuda también aumentará el endeudamiento general de la empresa, el mayor grado de endeudamiento del proyecto contribuirá a aumentar el riesgo financiero de la empresa.

A lo largo de este tema nos centraremos exclusivamente en el riesgo económico del proyecto.

4. RIESGO ECONÓMICO ABSOLUTO Y RELATIVO DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN

Para analizar el riesgo económico de un proyecto, puede hacerse de varias formas:

- Considerar el proyecto aisladamente, sin tener en cuenta su influencia sobre los otros proyectos de la empresa (riesgo **absoluto** del proyecto).

- Examinar la repercusión que el citado proyecto tiene sobre el riesgo económico global de la empresa (riesgo **relativo** del proyecto **respecto de la empresa**).

- Ver la relación del riesgo del proyecto con el riesgo asociado al conjunto de la actividad económica del país o del mundo (riesgo **relativo** del proyecto **respecto de la economía**).

Dependiendo del tipo de riesgo económico considerado, es posible obtener resultados aparentemente contradictorios en lo que se refiere a la aceptación o rechazo de un proyecto de inversión.

En efecto, pueden existir proyectos individualmente muy arriesgados respecto de los rendimientos que pueden generar (por tanto, no deseables aparentemente para decisores adversos al riesgo), pero que, dada su relación con otras actividades de la empresa, contribuyen a disminuir el riesgo total de la misma; lo que les hace atractivos al decisor. Igualmente pueden presentarse proyectos poco arriesgados individualmente (aparentemente aceptables para el decisor adverso al riesgo) que sin embargo contribuyen fuertemente a aumentar el riesgo económico global de la empresa (por lo cual probablemente serían rechazados).

Veamos un ejemplo de esto:

A una empresa, cuyas actividades en conjunto tienen actualmente un TIR esperado del 10%, se le presentan dos proyectos de inversión, que supondrán cada uno de ellos un incremento de un 50% en el capital de la misma; ambos tienen igual rentabilidad (VAN y TIR esperados, siendo éste del 28,2%), y aportan asimismo el mismo incremento de rentabilidad a la empresa: en efecto, el TIR esperado del conjunto de la empresa tras incorporar cualquiera de estos dos proyectos sería aproximadamente igual a $0,67 \times 0,1 + 0,33 \times 0,282 = 0,16 \Rightarrow 16\%$, luego el incremento experimentado por la empresa en su TIR

esperado al incorporar cualquiera de los proyectos es del 6%. Sin embargo, tienen distinto tipo de riesgo.

Si se considera exclusivamente el riesgo asociado a cada proyecto, por ejemplo mediante las desviaciones del rendimiento sobre su valor esperado³⁰, debe elegirse el proyecto que presente un menor riesgo. Sin embargo, teniendo en cuenta el riesgo relativo de los proyectos respecto de la empresa, la decisión puede ser justo la contraria. En este segundo caso, habrá que examinar cómo cada uno de los proyectos puede afectar a las oscilaciones del rendimiento de la empresa en su conjunto.

Así, en el gráfico 2 se representa la evolución futura estimada de los rendimientos del conjunto de la empresa si no se incorpora ningún nuevo proyecto, y en los dos siguientes el incremento en el rendimiento esperado que aportarían a la empresa cada uno de los proyectos, así como su evolución futura estimada.

GRÁFICO 4.2: EVOLUCIÓN DEL RENDIMIENTO DEL CONJUNTO DE LA EMPRESA ANTES DE INCORPORAR UN NUEVO PROYECTO

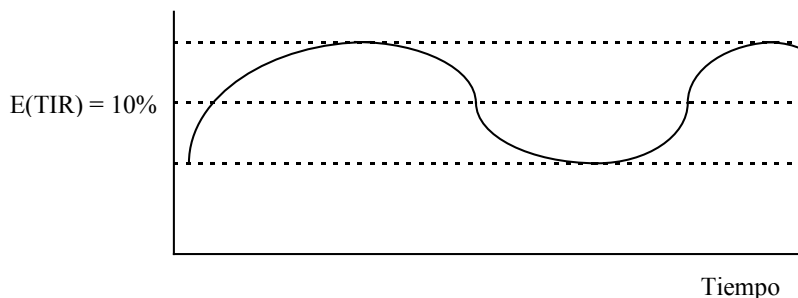
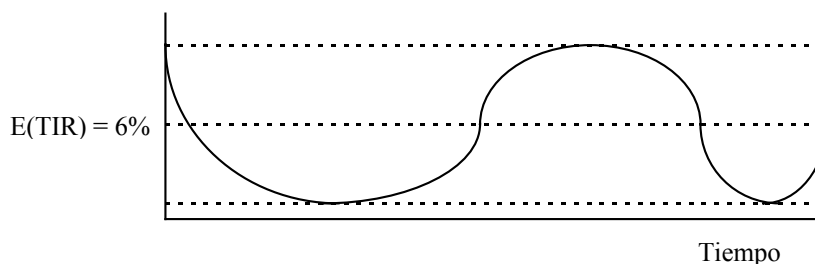
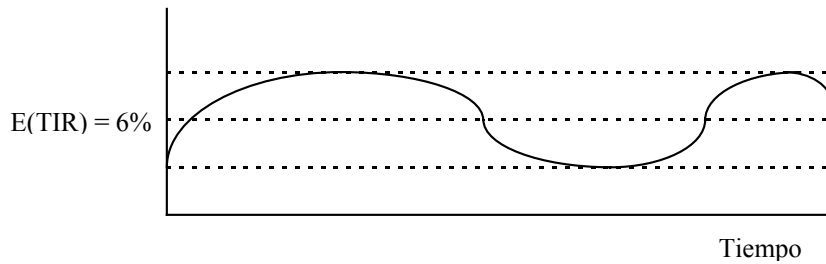


GRÁFICO 4.3: EVOLUCIÓN DEL INCREMENTO DE RENDIMIENTO APORTADO POR EL PROYECTO 1



³⁰ Las diferentes formas de medir el nivel de riesgo de los proyectos de inversión serán consideradas con detenimiento en el siguiente apartado.

GRÁFICO 4.4: EVOLUCIÓN DEL INCREMENTO DE RENDIMIENTO APORTADO POR EL PROYECTO 2



El incremento de rendimiento aportado por el Proyecto 1 tiene mayor amplitud de oscilación que el del Proyecto 2, luego es más arriesgado que este último. Sin embargo, hay que tener en cuenta la tendencia de sus oscilaciones, ya que éstas afectan al riesgo total de la empresa. En efecto, las oscilaciones en el Proyecto 1 son contrarias a las de la empresa en su conjunto, lo que significa que el proyecto, a la vez que aporta un incremento de rentabilidad, ayuda a reducir el riesgo total de la empresa. Sin embargo, el Proyecto 2, aunque es menos arriesgado individualmente, al sumarse sus oscilaciones a las del rendimiento de la empresa, supone un incremento del riesgo total.

Representando ahora la evolución del rendimiento de la empresa después de incorporar uno u otro proyecto:

GRÁFICO 4.5: EVOLUCIÓN DEL RENDIMIENTO DEL CONJUNTO DE LA EMPRESA TRAS INCORPORAR EL PROYECTO 1

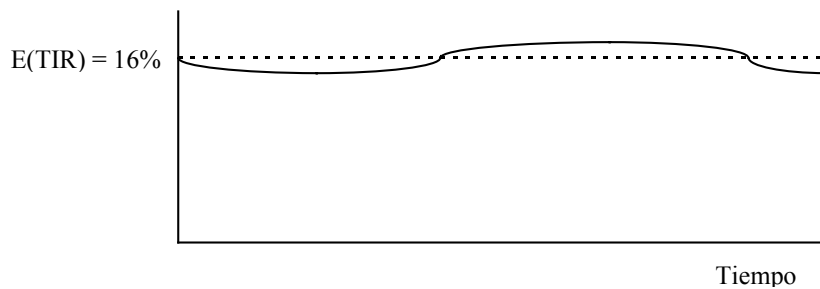
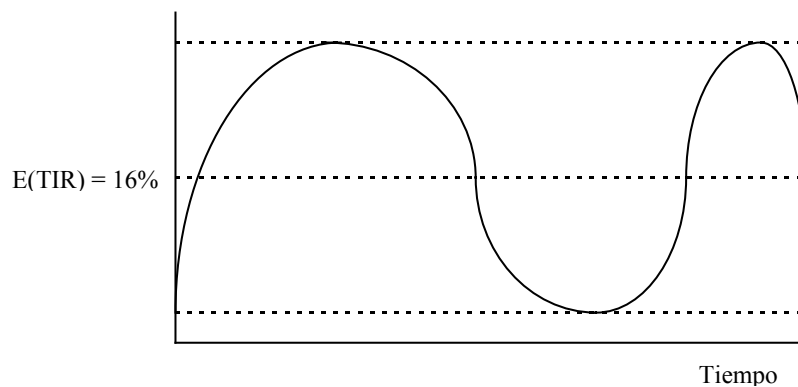


GRÁFICO 4.6: EVOLUCIÓN DEL RENDIMIENTO DEL CONJUNTO DE LA EMPRESA TRAS INCORPORAR EL PROYECTO 2



En definitiva, con el Proyecto 1 se reduce el riesgo vía diversificación³¹.

Evidentemente, interesa considerar, en la medida de lo posible, no tanto el riesgo individual del proyecto (riesgo económico absoluto), sino su repercusión en la total actividad de la empresa (riesgo económico relativo).

Ahora bien, debe tenerse en cuenta que la consideración del riesgo individual de un proyecto representa igualmente considerar su repercusión sobre el riesgo total de la empresa (esto es, el riesgo absoluto del proyecto y su riesgo relativo respecto de la empresa coinciden), cuando los propietarios han invertido la totalidad -o casi totalidad- de su capital en la empresa, y además se da alguna de las siguientes circunstancias:

a) El proyecto es único en la empresa. Esto es, el proyecto representa la **creación de una nueva empresa**.

b) El riesgo total de la empresa tras añadir el nuevo proyecto a la misma es igual a la suma de los riesgos del proyecto y de la empresa (antes de añadirlo): $\text{Riesgo}(e,p) = \text{Riesgo}(e) + \text{Riesgo}(p)$. No obstante, las circunstancias que determinan esta igualdad dependen tanto de la medida de rentabilidad (VAN, TIR) como de la medida de riesgo que se escojan.

Por otra parte, la consideración del riesgo total de la empresa sólo tiene sentido si sus propietarios han invertido la totalidad o casi la totalidad de su capital en la misma³². Pero si éstos han diversificado suficientemente sus inversiones³³, el riesgo relativo del proyecto que debe tenerse en cuenta es su relación con la cartera de mercado, esto es, su **riesgo sistemático**, pues es el único que será valorado en el equilibrio. Este riesgo, como sabemos, es medido por el coeficiente beta o coeficiente de volatilidad de su TIR. Para estimar el riesgo sistemático de un nuevo proyecto debe examinarse cómo puede ser afectado por factores generales de la economía, por ejemplo su grado de dependencia del ciclo de los negocios; la importancia de los costes fijos, etc.

En lo que resta del tema se tendrá en cuenta exclusivamente el riesgo económico absoluto. La consideración formal del riesgo relativo respecto de la empresa es difícil, pues debe conocerse la correlación entre las variables del proyecto y el resto de las actividades de la empresa. No obstante, al analizarse un proyecto, debe tenerse presente, aunque sea sólo de forma intuitiva, esta posible correlación.

Pero si los propietarios han diversificado su capital, el riesgo a considerar en el proyecto es el coeficiente beta de su TIR. Ahora bien, el cálculo exacto de dicha magnitud es igualmente difícil, pues precisa conocer la correlación entre las variables del proyecto y el rendimiento de la cartera de mercado. De nuevo, en la mayoría de los casos únicamente son posibles estimaciones intuitivas.

³¹ No obstante lo anterior, debe tenerse en cuenta que un proyecto cuyos rendimientos tengan una evolución contraria a la del resto de las actividades de la empresa, normalmente corresponderá a una actividad muy diferente de aquéllas, y por consiguiente es muy probable que los directivos actuales de la empresa tengan poca pericia para gestionarla. Las diversificaciones guiadas exclusivamente por el afán de reducir el riesgo global de la empresa mediante la inversión en sectores muy alejados de la actividad habitual tienen un registro de fracasos muy elevado.

³² Esto suele suceder con cierta frecuencia en las PYMEs.

³³ Este puede ser el caso de grandes empresas que cotizan en bolsa.

5. LAS MEDIDAS DEL RIESGO DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN

5.1. Planteamiento del problema. El “perfil de riesgo”.

Anteriormente ya quedó establecido que un proyecto de inversión es arriesgado cuando alguna de las variables asociadas al mismo es aleatoria. Como en lo que resta de tema será considerado exclusivamente al riesgo económico, puede prescindirse del riesgo asociado al tipo de actualización; éste se supondrá igual al tipo de interés sin riesgo.

Sin embargo, A y/o Q_t pueden ser variables aleatorias (\tilde{A} , \tilde{Q}_t), lo que implica que el VAN y el TIR lo son también.

Ahora bien, si se conocen las distribuciones de probabilidades -individuales y conjuntas- asociadas a estas variables aleatorias, las características del riesgo económico absoluto de un proyecto de inversión están delineadas por la distribución de probabilidades de la variable -VAN, TIR- que mide la rentabilidad del mismo, también denominada “perfil de riesgo del proyecto”.

Por ejemplo, si el VAN tiene una distribución de probabilidades discreta, su perfil de riesgo es:

$$\begin{aligned} \text{VAN}_1 &\Rightarrow P(\text{VAN}_1) \equiv P_1 \\ \text{VAN}_2 &\Rightarrow P(\text{VAN}_2) \equiv P_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \text{VAN}_i &\Rightarrow P(\text{VAN}_i) \equiv P_i \\ &\dots\dots\dots \\ \text{VAN}_m &\Rightarrow P(\text{VAN}_m) \equiv P_m \end{aligned}$$

Ahora bien, si se considera el TIR, para cada VAN_i existirá asimismo un TIR_i o r_i con la misma probabilidad P_i , luego la distribución de probabilidades de \tilde{r} tiene idéntica forma que la del VAN, aunque, lógicamente, con distintas media y varianza. Esta propiedad también se da en distribuciones continuas de probabilidades.

Así, el riesgo asociado a un proyecto de inversión será distinto de acuerdo con la forma que tenga la distribución de probabilidades de la medida de rentabilidad escogida (depende de su mayor o menor concentración en torno al valor central, de la forma de las colas a derecha e izquierda del valor esperado, etc.).

Aunque la distribución de probabilidades del VAN o del TIR proporciona toda la información referente al riesgo del proyecto³⁴, manejarla, trabajar con ella, resulta muy complicado. Por ello, sería mucho más operativo encontrar una magnitud que, con un solo dato, aun a costa de perder información, nos diera una idea del riesgo asociado al proyecto.

Una forma intuitiva de medir el riesgo es en proporción al desembolso inicial: en principio, puede pensarse que, cuanto más se invierte, más se puede perder. Ahora bien, por todo lo que ya se ha comentado hasta ahora, puede deducirse claramente que esta forma de medir el riesgo, a veces empleada en la práctica, es muy incompleta, e incluso puede dar lugar a decisiones erróneas.

³⁴ Recuérdese que aquí se está considerando exclusivamente el riesgo *absoluto* del proyecto. Su riesgo *relativo* respecto de la empresa, por ejemplo, estaría configurado por la distribución *conjunta* de probabilidades entre al VAN -o el TIR- del proyecto y el correspondiente al conjunto de la empresa.

A continuación se expondrán algunas de las magnitudes, más consistentes científicamente, que han sido propuestas como medidas de riesgo de un proyecto de inversión.

5.2. La varianza de la distribución de probabilidades del VAN o TIR.

Es el momento centrado de segundo orden de la distribución de probabilidades. Si, por ejemplo, tenemos una distribución discreta del VAN:

$$\sigma^2(VAN) = \sum_{i=1}^m [VAN_i - E(VAN)]^2 P_i$$

Para una distribución continua sería:

$$\sigma^2(VAN) = \int_{-\infty}^{+\infty} [VAN_i - E(VAN)]^2 \varphi(VAN) dVAN$$

siendo $\varphi(VAN)$ la función de densidad de la distribución de probabilidades del VAN.

Expresiones semejantes se emplean en el caso del TIR.

Características de esta medida de riesgo:

- Supone una **concepción simétrica** del riesgo. Presta tanta atención a las desviaciones positivas (por encima del valor esperado) como a las negativas (por debajo). Esta es una concepción del riesgo que choca un poco con cierta idea intuitiva -riesgo como posibilidad de algo perjudicial-, pero muestra las características positivas del riesgo como una situación abierta, en la que pueden suceder acontecimientos favorables y desfavorables.

- Mide la dispersión de forma potencial

Inconvenientes:

- Sólo recoge el riesgo económico absoluto³⁵.

- **Reduce información:** todas las características de la distribución de probabilidades del VAN o el TIR se reducen a un número, momento centrado de segundo orden, que sólo mide la dispersión, pasando por alto la asimetría, el apuntamiento/aplastamiento (kurtosis), etc.

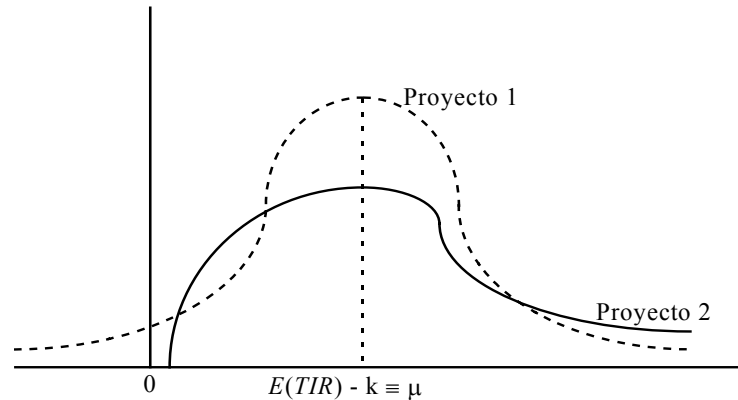
Por ello, la varianza sólo es una medida indiscutible del riesgo económico absoluto si la distribución de probabilidades asociada al VAN o el TIR es simétrica, o más correctamente, normal. Si, por ejemplo, existe asimetría en las distribuciones de probabilidades -caso, por ejemplo, de los proyectos que incorporan "opciones reales"-, la varianza no es buena medida de riesgo.

Veamos un ejemplo de esto último: a una empresa se le presentan dos proyectos de inversión, en uno de los cuales la distribución de probabilidades del TIR es normal, y en el otro es asimétrica, pero tienen el mismo valor esperado neto [$E(TIR - k) \equiv \mu$] y la misma varianza [$\sigma^2(TIR)$], como se muestra en el gráfico

³⁵ Recuérdese que los VAN_i se calculan con un tipo de actualización (k) libre de riesgo.

Por la varianza [$\sigma^2(TIR)$], podríamos optar indiferentemente por uno u otro proyecto, ya que tienen igual riesgo. Sin embargo, es claro que el segundo proyecto es menos arriesgado, ya que al estar acotado inferiormente por una cota positiva, siempre alcanzará valores de rentabilidad positivos (aún en el peor de los casos). Mientras que el Proyecto 1 no está acotado, y en casos extremos puede alcanzar valores negativos, es decir, producir pérdidas.

GRÁFICO 4.7: PROYECTOS DE INVERSIÓN CON DISTINTO GRADO DE ASIMETRÍA EN LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DEL TIR



5.3. La Desviación Típica y el Coeficiente de Variación.

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma(VAN) = \sqrt{\sigma^2(VAN)}$$

Características:

- Mide cuánto se desvía, por término medio, el valor efectivo de la variable de su valor esperado. Tiene los mismos inconvenientes que la varianza: medida del riesgo económico absoluto, reducción de información, etc.

- Una ventaja es que al estar expresada en las mismas unidades que el valor esperado del VAN o el TIR, es posible compararla con éste.

El **coeficiente de variación** [$v(VAN)$, $v(TIR)$], es el cociente entre la desviación típica y la esperanza matemática. Como la desviación típica, mide la desviación por término medio, del valor efectivo de la variable respecto del valor esperado, pero **en términos relativos**. Posee los mismos inconvenientes que se atribuyen a la varianza y la desviación típica, pero, debido a que compara con el valor esperado, tiene sobre ellos la ventaja de recoger más información.

Veamos un ejemplo de esto: a una empresa se le plantean dos proyectos de inversión arriesgados, de los que se conoce:

$$E(VAN_1) = 100; \sigma(VAN_1) = 50$$

$$E(VAN_2) = 30; \sigma(VAN_2) = 25$$

Según $\sigma(VAN)$, el proyecto 2 es menos arriesgado que el primero, puesto que tiene menos desviación típica. Sin embargo, el valor efectivo del VAN, en el primer proyecto, puede desviarse por

término medio en un 50% respecto de $E(VAN)$ [$v(VAN) \equiv \sigma(VAN)/E(VAN) = 50/100 = 0,5$]; mientras que dicha desviación es del 80% en el segundo proyecto) [$v(VAN) = 25/30 = 0,8$].

Cuando el valor esperado tiene valores bajos, aunque la desviación típica sea pequeña, sobre todo si ésta es mayor que el valor esperado, el coeficiente de variación tendrá un valor muy elevado, resultado que debe ser interpretado en forma apropiada.

5.4. La semivarianza de Markowitz

Para las distribuciones asimétricas, se puede utilizar la **semivarianza de Markowitz**, que sólo recoge las desviaciones negativas respecto del valor esperado. Si la distribución de probabilidades del TIR es discreta, sería:

$$\sum_{TIR_i \leq \mu} (TIR_i - \mu)^2 P_i$$

En el caso del VAN, la expresión sería semejante.

El principal inconveniente de la semivarianza es que resulta mucho menos manipulable que la varianza. A la hora de estudiar las posibles correlaciones entre los VANes o TIRes de diferentes proyectos de inversión u operar simplemente con ella, es mucho menos manejable matemáticamente.

5.5. La probabilidad de pérdida y otras medidas relacionadas

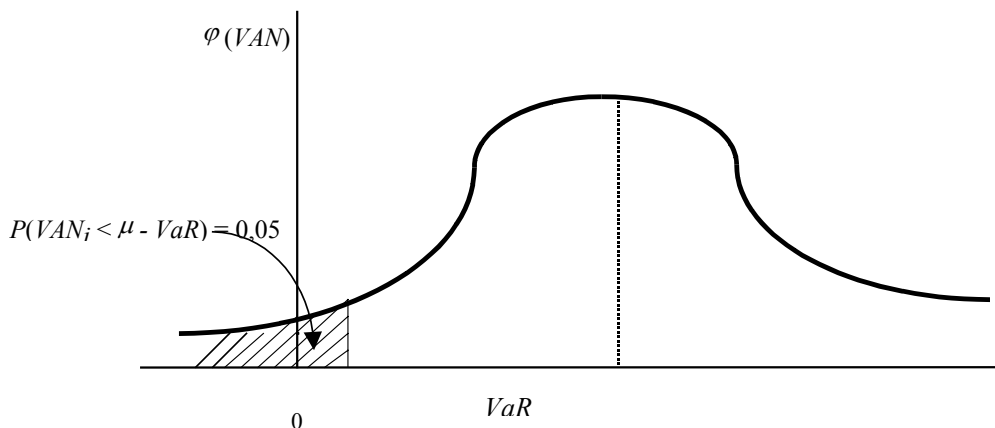
La **probabilidad de pérdida** es la probabilidad de que el VAN efectivo sea menor o igual que cero. Supone, por tanto, una concepción asimétrica del riesgo, acorde a la idea intuitiva de riesgo: probabilidad de que perdamos.

En el caso de una distribución de probabilidades discreta:

$$P(VAN \leq 0) = \sum_{VAN_i \leq 0} P(VAN_i)$$

Si disponemos de una distribución de probabilidades continua:

$$P(VAN \leq 0) = \int_{-\infty}^0 \varphi(VAN) d(VAN)$$



Relacionadas con la probabilidad de pérdida existen otras medidas del riesgo; una puede ser la probabilidad de que el valor efectivo del VAN (o el TIR) se encuentre fuera de un intervalo delimitado por el valor esperado más o menos n veces la desviación típica, esto es, $P(|VAN - \mu| > n\sigma)$ o $P(|TIR - \mu| > n\sigma)$. Esta sería de nuevo una medida simétrica del riesgo del proyecto.

Si la distribución de probabilidades del VAN del proyecto es continua³⁶, y se conocen la forma y parámetros de la misma, puede emplearse otra medida de riesgo, esta vez de tipo asimétrico: una cantidad de dinero tal que la empresa perderá menos de esa cantidad con respecto a $E(VAN)$ con una determinada probabilidad, tal como se muestra en el gráfico 8. Este es el fundamento de la técnica del “Valor en Riesgo” o VeR (*Value at Risk* o *VaR*, en inglés), empleada en la gestión de riesgos, principalmente por entidades financieras y fondos de inversión.

6. CÁLCULO DE LA VARIANZA DEL VAN

Después de explicar cuáles son los posibles medidores de riesgo de los proyectos de inversión, y cuál es su significado, se expondrá la forma concreta de calcularlos y sus aplicaciones.

Puede comenzarse con las medidas simétricas y, en concreto, con la varianza del VAN. Para su cálculo se emplean varios métodos, según las circunstancias:

- **Método directo:** se puede aplicar cuando se conoce la distribución de probabilidades del VAN, tanto si es discreta como continua. En caso de que sea discreta, puede emplearse la fórmula siguiente:

$$\sigma^2(VAN) = \sum_i [VAN_i - E(VAN)]^2 P_i \equiv E(VAN^2) - E(VAN)^2$$

- **Método indirecto:** en muchas ocasiones no se puede conocer la distribución de probabilidades del VAN, aunque sí la de los FNC. En tal caso, puede obtenerse la varianza del VAN a través de los FNC.

Suponiendo que el desembolso inicial es una variable aleatoria, ($-\tilde{A} \equiv \tilde{Q}_0$), el VAN estará formado por una combinación lineal de variables aleatorias. La varianza de una combinación lineal de variables aleatorias es igual a la suma de las varianzas de tales variables por sus coeficientes al

³⁶ En realidad no resulta necesario que la distribución sea continua, pero es el caso más frecuente de aplicación.

cuadrado, más dos veces la suma de la covarianzas por los productos de los coeficientes respectivos. Luego, de la formulación general para el cálculo de la varianza de una combinación lineal de variables aleatorias, obtendremos:

$$\sigma^2(VAN) = \sum_{t=0}^n \frac{\sigma^2(Q_t)}{(1+k)^{2t}} + 2 \sum_{t=0}^n \sum_{j=t+1}^n \frac{Cov(Q_t, Q_j)}{(1+k)^{t+j}}$$

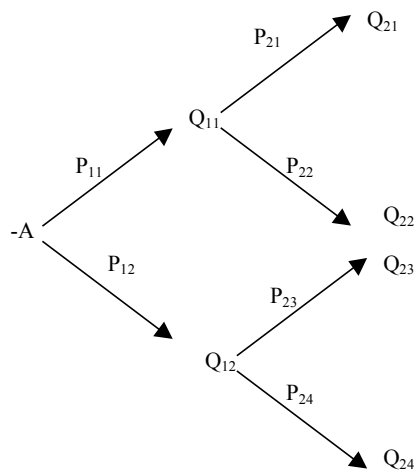
Por tanto, en el caso más general, para calcular la varianza del VAN necesitamos conocer las distribuciones conjuntas de probabilidades de cada par de FNC.

Ahora bien, conocer esas distribuciones conjuntas, de las cuales podamos obtener las covarianzas, resulta difícil, en especial si los \tilde{Q}_t se encuentran parcialmente correlacionados³⁷.

Cuando existiendo una correlación moderada entre los FNC, se puede definir el proyecto de inversión como un árbol de probabilidades (probabilidades condicionadas), tal como se muestra en el gráfico 9, puede calcularse también directamente la varianza del VAN.

En efecto, como puede verse en el gráfico, los valores de los FNC para un periodo están condicionados por los del periodo anterior. En consecuencia, podemos considerar este proyecto de inversión arriesgado como formado por cuatro proyectos de inversión distintos, tantos como ramificaciones tiene el árbol, cada uno de ellos con un VAN y una probabilidad asociada. En este caso se puede obtener la distribución de probabilidades del VAN, como se muestra a continuación, y calcular directamente su varianza.

**GRÁFICO 9: PROYECTO DE INVERSIÓN DEFINIDO
COMO UN ÁRBOL DE PROBABILIDADES**



$$VAN_1 = -A + \frac{Q_{11}}{1+k} + \frac{Q_{21}}{(1+k)^2} P(VAN_1) = P_{11} P_{21}$$

$$VAN_2 = -A + \frac{Q_{11}}{1+k} + \frac{Q_{22}}{(1+k)^2} P(VAN_2) = P_{11} P_{22}$$

$$VAN_3 = -A + \frac{Q_{12}}{1+k} + \frac{Q_{23}}{(1+k)^2} P(VAN_3) = P_{12} P_{23}$$

$$VAN_4 = -A + \frac{Q_{12}}{1+k} + \frac{Q_{24}}{(1+k)^2} P(VAN_4) = P_{12} P_{24}$$

³⁷ En el Anexo 7.I se presentan algunas posibilidades de cálculo de la varianza del VAN en condiciones especiales.

7. CÁLCULO DE LAS MEDIDAS DE RIESGO EN EL TIR

Como ya se ha mostrado anteriormente, el TIR sigue siempre la misma ley de probabilidades que el VAN, aunque, lógicamente, con distintas media y varianza.

El cálculo directo de la varianza del TIR, si se conoce su distribución de probabilidades (o se puede obtener mediante un árbol de probabilidades), no reviste mayores dificultades que en el caso del VAN.

Pero el cálculo analítico de la varianza del TIR a partir de las distribuciones de probabilidades de los \tilde{Q}_t es en general, a diferencia de lo que sucede con el VAN, bastante complicada, ya que se trata de calcular la varianza, no de una combinación lineal de variables aleatorias -como sucede con el VAN- sino de una combinación de grado n de $n+1$ variables aleatorias (suponiendo que el desembolso inicial sea también aleatorio).

En estos casos, el único medio para obtener la varianza del TIR de forma relativamente sencilla y rápida es por simulación estocástica, aplicando el método de Monte-Carlo³⁸.

³⁸ El método de Monte-Carlo consiste en un "muestreo artificial" o simulado: a partir del establecimiento de distribuciones de probabilidades "teóricas" (simples o conjuntas) para los FNC, se obtienen "muestras artificiales" aplicando a las funciones de distribución unos "números aleatorios" (números comprendidos entre 0 y 1, todos con la misma probabilidad de ocurrencia). Sobre esas muestras se pueden calcular la media muestral, la varianza muestral, etc., del VAN, el TIR o cualquier otra medida de rentabilidad del proyecto, que servirán como aproximaciones de las verdaderas media, varianza, etc. Sobre este método pueden consultarse Soldevilla (1984), pp. 250-271, y Suárez (1993), cap. 13.