CAPÍTULO VI. APLICACIONES DE LA DERIVADA

SECCIONES

A. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función $y = f(x)$ se obtienen a partir de la primera derivada de la función por la siguiente regla:

(a) f crece en un intervalo (a, b) si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b).

(b) f decrece en un intervalo (a, b) si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b).

Los puntos extremos de intervalos en donde cambia el signo de la derivada son los máximos o mínimos, según la derivada cambie de positiva a negativa o de negativa a positiva, respectivamente. En resumen:

(a) Un punto x_0 del dominio de la función corresponde a un *máximo local o relativo* si existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ en donde f crece y otro intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ en donde f decrece.

(b) Un punto x_0 del dominio de la función corresponde a un *mínimo local o relativo* si existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ en donde f decrece y otro intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ en donde f crece.

Los máximos y mínimos locales se encuentran entre los llamados *puntos singulares o críticos*, es decir, puntos del dominio de la función en donde la derivada se anula o no existe.

PROBLEMA 6.1.

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x(\sqrt{x} + 1).$$

Solución

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \sqrt{x} + 1 + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + 2\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

La derivada se anula cuando $3x + 2\sqrt{x} = 0$ y no existe cuando $2\sqrt{x} = 0$. Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$3x + 2\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow 3x = -2\sqrt{x} \Longrightarrow 9x^2 = 4x \Longrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{4}{9}.$$

Como el valor $x = 4/9$ no verifica la primera ecuación, el único valor que anula $f'(x)$ es $x = 0$. Por otra parte,

$$2\sqrt{x} = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

El único punto crítico es $x = 0$. Como el dominio de la función es el intervalo $[0, \infty)$ y $f'(x) \geq 0$ en todo el dominio, la función es siempre creciente. Por tanto, el punto $(0, 0)$ es el mínimo de la función.

PROBLEMA 6.2.

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

Solución

De nuevo calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}.$$

La derivada se anula cuando $x^3 - 8 = 0$ y no existe cuando $x^3 = 0$. Despejaremos x en ambas ecuaciones:

$$x^3 - 8 = 0 \Longleftrightarrow x^3 = 8 \Longleftrightarrow x = 2.$$

$$x^3 = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Como el dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, el único punto crítico es $x = 2$. Estudiamos el crecimiento en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 2)$ y $(2, \infty)$. Para ello, sustituimos la derivada de la función en cualquier punto interior a los intervalos. El signo de la derivada indicará si la función original crece o decrece. Así:

$f'(-1) = -9/-1 > 0 \Longrightarrow$ la función crece en $(-\infty, 0)$.

$f'(1) = -7/1 < 0 \Longrightarrow$ la función decrece en $(0, 2)$.

$f'(3) = 19/27 > 0 \Longrightarrow$ la función crece en $(2, \infty)$.

Un método más cómodo por su claridad visual consiste en representar el dominio de la función sobre la recta real. A continuación, colocar en la misma recta los puntos críticos. De esta manera quedan ya delimitados los intervalos que se van a estudiar. Después de sustituir en la derivada de la función algún punto intermedio de cada intervalo, colocar el signo + ó − según si dicha derivada es positiva o negativa. Así quedan completamente determinados los intervalos y el comportamiento de la función en cada uno de ellos. En este ejemplo hubiera quedado así:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$++$

PROBLEMA 6.3.

Encontrar los máximos y mínimos locales de la función

$$f(x) = x^5 - 5x + 6.$$

Solución

Busquemos los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = 5x^4 - 5;\ f'(x) = 0 \iff 5x^4 = 5 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Como los puntos críticos son $x = 1$ y $x = -1$, estudiamos el signo de la derivada en los intervalos siguientes:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$++$

Como a la izquierda de $x = -1$ la función es creciente y a la derecha es decreciente, el punto corresponde a un máximo. Sustituyendo en la función se obtiene que el punto es $(-1, 10)$.

Análogamente, a la izquierda de $x = 1$ la función decrece y a la derecha crece. El punto corresponde a un mínimo y sus coordenadas son $(1, 2)$.

PROBLEMA 6.4.

Encontrar los máximos y mínimos locales de la función

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2}.$$

Solución

Los puntos críticos se obtienen de la siguiente forma:

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 = 2x^2 \iff x^2 = 1/2 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Además $f'(x)$ no existe cuando $\sqrt{1-x^2} = 0$, es decir, cuando $x = 1$ ó $x = -1$.

Como el dominio de la función es el intervalo $[-1, 1]$, estudiamos el signo de la derivada en los intervalos que se ilustran en la tabla:

	$(-1, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, 1)$
$f'(x)$	$--$	$++$	$--$

Lo anterior quiere decir que el punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ da lugar a un mínimo local y $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a un máximo local. Los puntos correspondientes de la función son $(-1/\sqrt{2}, -1/2)$ y $(1/\sqrt{2}, 1/2)$.

PROBLEMA 6.5.

¿La función $f(x) = (x-1)^3(x+2)^2$ alcanza un máximo o un mínimo en el punto $A(1,0)$?

Solución

Como

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+2)^2 + 2(x-1)^3(x+2) = (x-1)^2(x+2)(5x+4),$$

se obtiene que $f'(1) = 0$, con lo que el punto $(1, 0)$ es singular. Para ver si corresponde a un máximo o un mínimo, estudiamos el crecimiento de la función en un entorno de $x = 1$:

Si $x \in (1-\delta, 1)$, $f'(x) > 0$ y f es creciente;

Si $x \in (1, 1+\delta)$, $f'(x) > 0$ y f es también creciente.

Como no cambia el signo de la derivada, la función en el punto $(1, 0)$ no alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo.

PROBLEMA 6.6.

Dada la función $y = (x+1)^2 e^{-x}$, hallar los máximos y mínimos locales.

Solución

Calculamos la primera derivada para determinar los puntos críticos:

$$f'(x) = 2(x+1) \cdot e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = e^{-x}(x+1)(1-x);$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x}(x+1)(1-x) = 0 \iff x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

Los únicos posibles máximos y mínimos se alcanzan en los puntos $P_1(1, 4/e)$ y $P_2(-1, 0)$. Estudiamos a continuación el crecimiento de la función:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$--$	$++$	$--$

De lo anterior se deduce que el punto $P_1(1, 4/e)$ es un máximo local y que el punto $P_2(-1, 0)$ es un mínimo local de la función.

PROBLEMA 6.7.

Hallar, en caso de que existan, las abscisas de los máximos y mínimos de la función

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 14x + 10\ln(x+3) + 90\ln(x-5).$$

Solución

La primera derivada es

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + 5x + 14 + \frac{10}{x+3} + \frac{90}{x-5} \\ &= \frac{(x^2+5x+14)(x+3)(x-5) + 10(x-5) + 90(x+3)}{(x+3)(x-5)}. \end{aligned}$$

Al anular la derivada, obtenemos:

$$\begin{aligned} y' = 0 &\iff (x^2+5x+14)(x+3)(x-5)+10(x-5)+90(x+3)=0 \\ &\iff x^4+3x^3-11x^2-3x+10=0. \end{aligned}$$

Si aplicamos la regla de Ruffini, resultan las raíces $1, -1, 2$ y -5.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es el conjunto $D(f)=\{x \mid x>5\}$, ninguno de los puntos anteriores pertenece al dominio por lo que la función carece de máximos y mínimos. Además, como $f'(x)>0$, $\forall x \in D(f)$, f es siempre creciente.

PROBLEMA 6.8.

Hallar un polinomio de tercer grado sabiendo que para $x=3$ alcanza un mínimo local, para $x=2$ alcanza un máximo local y para $x=0$ y $x=1$ toma los valores 1 y $29/6$, respectivamente.

Solución

Escribimos la forma general de un polinomio de grado 3 como $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Para $x=0$, $f(0)=1=d$.

Para $x=1$, $29/6=a+b+c+d$.

Como $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, tenemos:

Para $x=3$, $f'(3)=0=27a+6b+c$.

Para $x=2$, $f'(2)=0=12a+4b+c$.

Resulta así el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 29/6, \\ 27a+6b+c &= 0, \\ 12a+4b+c &= 0, \\ d &= 1. \end{aligned}$$

Al resolver el sistema llegamos a la solución $a=1/3$, $b=-5/2$, $c=6$, $d=1$, y la función solución es $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x+1$.

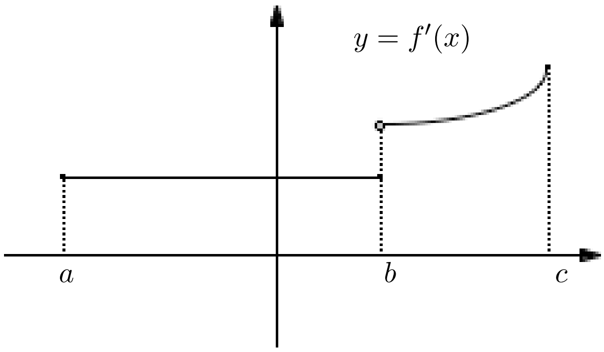
PROBLEMA 6.9.

Sea $y = f(x)$ una función cuya derivada tiene una gráfica como la que se muestra en la figura.

a) ¿Qué se puede decir de f en $x = b$?

b) ¿Tiene f algún máximo?

c) ¿Dónde f decrece?



Solución

a) De la gráfica se deduce que $f'(x)$ no es continua en $x = b$, porque los límites laterales son diferentes. Esto indica que la función f no es derivable en $x = b$.

b) En todo el intervalo (a, b) la derivada de f es positiva. Por lo tanto, la función crece.

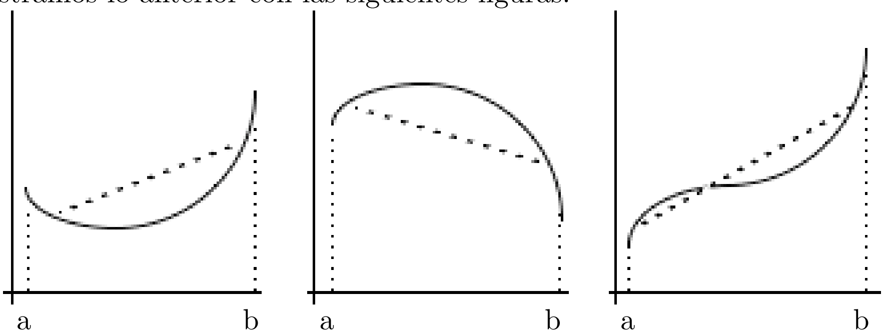
De la misma manera, en el intervalo (b, c) la función f también crece. El máximo se encuentra en c, que es el extremo derecho del intervalo donde está definida la función.

c) De lo anterior se deduce que en ningún momento la función decrece, porque la derivada nunca es negativa.

B. CONCAVIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Una función se dice *cóncava hacia arriba o convexa* en un intervalo (a, b) cuando al unir dos puntos de la curva en ese intervalo, el segmento que se forma queda por encima de la curva. De la misma forma, será *cóncava hacia abajo o cóncava* cuando cualquiera de dichos segmentos queda por debajo de la curva.

Ilustramos lo anterior con las siguientes figuras:



cóncava hacia arriba — cóncava hacia abajo — ambas concavidades

Para determinar los intervalos de concavidad de una función utilizamos el siguiente criterio:

La gráfica de una función $y = f(x)$ es

a) *cóncava hacia arriba en todos los intervalos para los que $f''(x) > 0$.*

b) *cóncava hacia abajo en todos los intervalos para los que $f''(x) < 0$.*

Reuniendo este criterio con el de determinación de intervalos de crecimiento de f, podemos también establecer la siguiente regla:

a) *En los intervalos donde $f'(x)$ sea creciente, $f(x)$ será cóncava hacia arriba.*

b) *En los intervalos donde $f'(x)$ sea decreciente, $f(x)$ será cóncava hacia abajo.*

Se llaman *puntos de inflexión* los puntos en donde cambia la concavidad de una función, ya sea de arriba hacia abajo, o viceversa. Para ello, si la función posee derivadas de segundo orden, un punto x_0 del dominio de f será punto de inflexión si $f''(x_0) = 0$ y ocurre alguna de las siguientes situaciones:

a) existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ en donde $f''(x) < 0$ y otro intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ en donde $f''(x) > 0$.

b) existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ en donde $f''(x) > 0$ y otro intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ en donde $f''(x) < 0$.

PROBLEMA 6.10.

Estudiar la concavidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ *y localizar sus puntos de inflexión.*

Solución

En primer lugar calcularemos las derivadas de primer y segundo orden de la función:

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2}.$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+2)(1+x)^2 - (x^2+2x)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{(2x+2)(1+x) - (x^2+2x)\cdot 2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

Para estudiar el signo de la segunda derivada, observamos que el numerador nunca se anula. En cambio, el denominador se anula en el punto de abscisa $x = -1$, que es precisamente el punto que no está en el dominio. Para estudiar el signo en los intervalos que este punto determina, construimos el siguiente diagrama de signos:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$--$	$++$

Al calcular $f''(x)$ en un punto del intervalo $(-\infty, -1)$ resultó un valor negativo y al sustituir en la función un punto del intervalo $(-1, \infty)$ dió un valor positivo. Eso quiere decir que:

f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1, \infty)$;
f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, -1)$.

Sin embargo no hay punto de inflexión pues el punto $x = -1$, en donde cambia la concavidad, no está en el dominio.

PROBLEMA 6.11.

Estudiar la concavidad de la función $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$ *y localizar sus puntos de inflexión.*

Solución

Debemos descomponer en primer lugar la función para eliminar el valor absoluto.

Como $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ y el segundo factor es siempre positivo, resulta que

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x^5 - 1) & \text{si } x \geq 1 \\ 2 + (x^5 - 1) & \text{si } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 - x^5 & \text{si } x \geq 1, \\ 1 + x^5 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Debemos separar el estudio de la concavidad para cada uno de los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$.

* En $(-\infty, 1)$: $f'(x) = 5x^4$ (siempre positiva; la función es creciente en ese intervalo).

$f''(x) = 20x^3$. Realizamos el estudio de los signos como en los ejemplos anteriores:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$
$f''(x)$	$--$	$++$

* En $(1, \infty)$: $f'(x) = -5x^4$ (siempre negativa; la función es decreciente en ese intervalo).

$f''(x) = -20x^3$. En este intervalo x es siempre positiva; de este modo $f''(x)$ es negativa.

En definitiva llegamos al siguiente resultado:

f es cóncava hacia arriba en $(0, 1)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$.

Los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ son de inflexión pues cambia la concavidad. Al sustituir dichos valores en la función se obtienen los puntos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

PROBLEMA 6.12.

Estudiar la concavidad y convexidad de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Solución

Para esta función,

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2};\ f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) + 2x \cdot [2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Observamos que el denominador de f'' es siempre positivo y el numerador se anula cuando $x = \pm\sqrt{1/3}$, con lo que tenemos la siguiente tabla de signos:

	$x < -\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}$	$x > \sqrt{1/3}$
$3x^2 - 1$	$++$	$--$	$++$
$f''(x)$	$++$	$--$	$++$

De aquí deducimos que f es convexa en $(-\infty, -\sqrt{1/3})$ y $(\sqrt{1/3}, \infty)$, mientras que es cóncava en $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$.

C. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES.

En este apartado se resumen todas las técnicas estudiadas anteriormente y se agrupan para dibujar con relativa precisión las curvas correspondientes a funciones definidas en forma explícita. Toda la información que se pueda obtener de la función será útil para conseguir una gráfica más exacta.

En la primera parte se darán algunas informaciones de cierta función desconocida y se tratará de dibujar una función que verifique dichos datos. El método más adecuado consiste en seguir los siguientes pasos:

1) Construir una tabla donde se expresen los intervalos conocidos de crecimiento y concavidad de la función, tal como se hizo en los apartados anteriores.

2) Dibujar en un sistema de coordenadas los puntos por donde se sepa que pasa la función, especificando si son máximos, mínimos o puntos de inflexión, u otro tipo de puntos. Después se deben trazar las asíntotas conocidas.

3) Por último, trazar "pedazos" de curva que tengan la forma indicada por el crecimiento y la concavidad correspondientes a cada intervalo, y de acuerdo a la tabla construida, de modo que pase por los puntos dibujados en el paso 2 y tenga como asíntotas las ya dibujadas.

En la segunda parte se pretende hacer el estudio completo de funciones definidas en forma explícita y dibujar su gráfica.

Para dibujar en forma precisa la gráfica de una curva definida en forma explícita $y = f(x)$, es aconsejable realizar los siguientes pasos:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Determinar las posibles simetrías de la función.

- Será simétrica respecto al eje Y si $f(x) = f(-x)$, es decir, si es par.

- Será simétrica respecto al origen si $f(x) = -f(-x)$, es decir, si es impar.

c) Encontrar los puntos de intersección de la curva con los ejes de coordenadas:

- Haciendo $x = 0$ en la función se obtienen los puntos de corte con el eje Y.

- Haciendo $y = 0$, se obtienen los puntos de corte con el eje X.

d) Determinar los intervalos de crecimiento y concavidad de la función, mediante el estudio del signo de las derivadas de primero y segundo orden.

e) Encontrar los puntos de la gráfica donde esta toma valores máximos y mínimos locales y puntos de inflexión. Estos serán los puntos donde cambie de signo la derivada primera y segunda, respectivamente.

f) Encontrar las posibles asíntotas de la función.

Después de esto, podemos dibujar la gráfica de la función siguiendo los tres pasos que aplicamos en la primera parte. En este caso la información sobre la función es completa y sólo puede haber una función cuya gráfica sea la conseguida de este modo.

PROBLEMA 6.13.

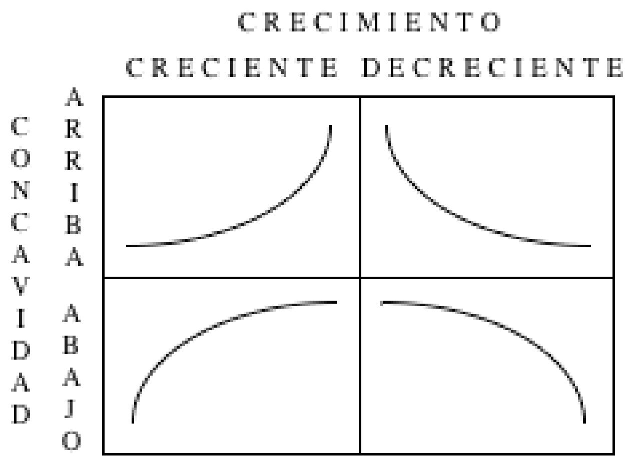
Trazar una curva que verifique las siguientes condiciones:

$$f(-2) = 8; f(0) = 4; f(2) = 0;$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } |x| > 2; f'(2) = f'(-2) = 0; f'(x) < 0 \text{ si } |x| < 2;$$
$$f''(x) < 0 \text{ si } x < 0; f''(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

Solución

Como conocemos el signo de las derivadas primera y segunda, podemos manejar a la vez el crecimiento y la concavidad de la función. Será conveniente por lo tanto conocer la forma de la gráfica para las distintas combinaciones de crecimiento y concavidad. Las cuatro posibilidades se ilustran en el siguiente diagrama.

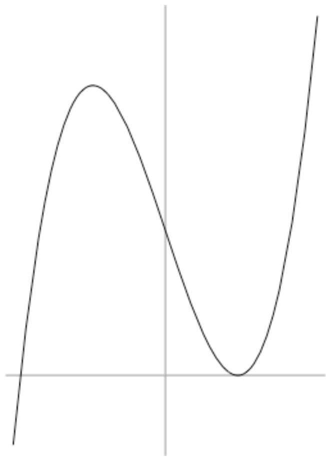


Cualquier gráfica de curva se puede realizar componiendo "trozos"de curva como los anteriores sin más que conocer los intervalos de crecimiento y concavidad.

En nuestro caso la siguiente tabla permitirá ver con facilidad cuáles son esos intervalos, debido a que se conocen los signos de las derivadas primera y segunda:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$--$	$++$
$f''(x)$	$--$	$--$	$++$	$++$

Añadiendo a esta información los datos $f(-2) = 8, f(0) = 4, f(2) = 0$, podemos dibujar algo como:



PROBLEMA 6.14.

Dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

(a) $f(1) = f(3) = 0$.

(b) $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 2) \cup (3,\infty)$; $f'(x) > 0$ si $x \in (2, 3)$; $f'(2)$ no existe; $f'(3) = 0$.

(c) $f''(x) < 0$ excepto en $x = 2$.

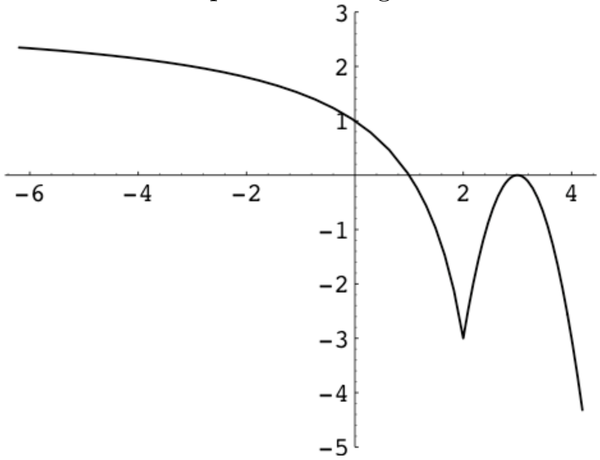
(d) La recta $y = 3$ es asíntota.

Solución

De la información suministrada podemos extraer la siguiente tabla de signos:

	$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$--$	$++$	$--$
$f''(x)$	$--$	$--$	$--$

Además sabemos que la función corta al eje X en los puntos $(1,0)$ y $(3,0)$. El punto $(3,0)$ debe ser un mínimo relativo porque a la izquierda de $x=3$ la función es creciente, y a la derecha es decreciente. No hay puntos de inflexión porque en ningún momento cambia de signo la derivada segunda. Si dibujamos en primer lugar los puntos conocidos y la asíntota horizontal $y=3$, la información anterior produce una gráfica como la siguiente:



Observa que la asíntota $y=3$ sólo se acerca a la función cuando $x\to-\infty$ pero no cuando $x\to\infty$. Esto es válido porque no necesariamente una función tiene que tener la misma asíntota en ambos extremos.

Se debe tener claro que esta no es la única función que verifica los datos proporcionados. Lo que tratamos de hacer es construir una de las funciones que verifique dichos datos.

PROBLEMA 6.15.

Dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

(a) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(b) Decrece en $(-\infty, -3) \cup (0, 2) \cup (2, 4)$.

(c) Tiene un mínimo local en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 1$.

(d) La recta $y = (3x - 6)/2$ es asíntota y corta a la curva en el punto de abscisa $x = 3/2$.

(e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3,\ \lim_{x\to-3^-} f(x) = -2,\ \lim_{x\to-3^+} f(x) = -4,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty.$$

Solución

Los datos que aquí se presentan dan lugar a la tabla siguiente:

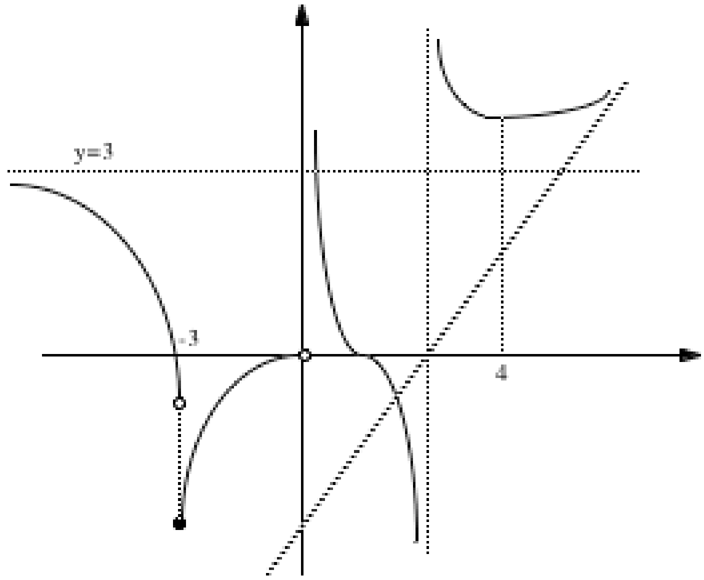
	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$--$	$++$	$--$	$--$	$++$

Como no se da información sobre la derivada segunda, tenemos libertad de graficar la concavidad como nos parezca más adecuado. El criterio que seguiremos aquí es el de dibujar una gráfica lo más suave posible. De todas formas en $x = 1$ debe haber un punto de inflexión.

La parte (e) indica que las asíntotas de la función son las rectas $y = 3$ (cuando $x \to -\infty$), $x = 0$ (sólo para $x > 0$), $x = 2$ (a ambos lados), $y = (3x - 6)/2$ (cuando $x \to \infty$).

Después de dibujar las asíntotas y de señalar en la oblicua el punto $x = 3/2$ (por donde debe pasar la función), la información de la tabla da lugar a una gráfica como la que se muestra.

Observa que $x = 0$ no está en el dominio tal como se pide. Además debemos definir de cualquier manera $f(2)$ para que esté en el dominio (en la gráfica se hizo $f(2) = 0$). También debe estar en el dominio $x = -3$, por lo que se puede definir arbitrariamente.



En todos los ejercicios siguientes se debe hacer el estudio completo y dibujar la gráfica de la función que se indique.

PROBLEMA 6.16.

Dibujar la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(8 - x)$.

Solución

(a) $D(f) = \mathbb{R}$ porque la raíz cúbica existe para cualquier número real.

(b) $f(-x) = (-x)^{2/3}(8 - (-x)) = x^{2/3}(8 + x)$.

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, la función no es simétrica.

(c) Si $x = 0$, $f(0) = 0$. Por tanto, la curva corta al eje Y en el punto $(0, 0)$.

Si $y = 0$, $0 = x^{2/3}(8 - x)$. Entonces $x = 0$ ó $x = 8$. La curva corta al eje X en los puntos $(0, 0)$ y $(8, 0)$.

(d) Al calcular las dos primeras derivadas de la función resulta:

$$y' = x^{-1/3} \cdot \frac{16-5x}{3}; \text{ puntos críticos: } x = 0, x = \frac{16}{5}.$$

$$y'' = x^{-4/3} \cdot \frac{-16}{9}; \text{ punto crítico: } x = 0.$$

Estudiando el signo de estas derivadas, podemos escribir la siguiente tabla:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 16/5)$	$(16/5, \infty)$
$f'(x)$	$--$	$++$	$--$
$f''(x)$	$--$	$--$	$--$

Por tanto, f crece en $(0, 16/5)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (16/5, \infty)$.

Además, f es cóncava hacia abajo en todo su dominio.

(e) Observando la tabla anterior se pueden ver los puntos donde cambia de signo alguna derivada. De esto se deduce la siguiente información:

Cuando $x = 0$ la función alcanza un mínimo local, y cuando $x = 16/5$ alcanza un máximo local.

Además no hay puntos de inflexión.

Los puntos de la curva correspondientes a estos valores de x son $(0, 0)$ (mínimo local) y $\left(\frac{16}{5}, \frac{96\sqrt[3]{20}}{25}\right)$ (máximo local).

(f) - Como $D(f) = \mathbb{R}$, no hay asíntotas verticales.

- Para buscar las asíntotas horizontales, debemos calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^{2/3}(8-x) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{2/3}(8-x) = \infty.$$

No hay asíntotas horizontales porque ambos límites son infinitos.

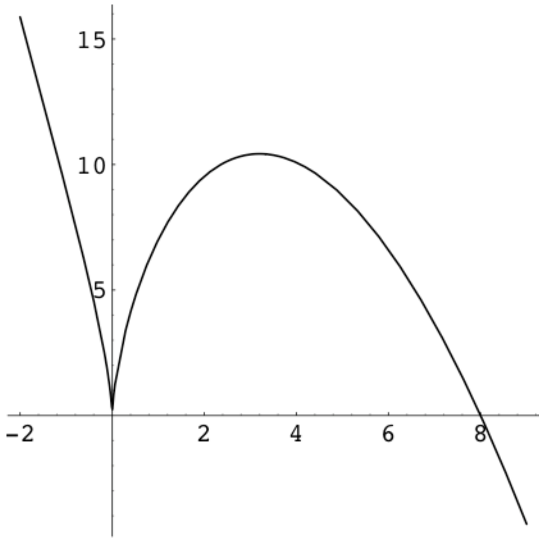
- Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{2/3} \cdot \frac{8-x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{2/3}(8/x - 1) = -\infty.$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^{2/3} \cdot \frac{8-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^{2/3}(8/x - 1) = -\infty.$$

No hay asíntotas oblicuas.

(g) Reuniendo toda la información anterior, debemos dibujar en un sistema de coordenadas los puntos ya obtenidos para después unirlos con secciones de curva cuya forma obedezca a la conseguida por el crecimiento y la concavidad. Intenta por tí mismo dibujar la curva y verás que te sale como la siguiente:



PROBLEMA 6.17.

Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$.

Solución

(a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ por ser $x = 4$ el único punto donde se anula el denominador (la raíz cúbica se puede calcular para cualquier número real).

(b) $f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt[3]{-x-4}}$.

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, la función no es simétrica.

(c) Si $x = 0$, $f(0) = 0$. Por tanto, la curva corta al eje Y en el punto $(0, 0)$.

Si $y = 0$, $0 = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$. Entonces $x = 0$. La curva corta al eje X en el mismo punto $(0, 0)$.

(d) Al calcular las dos primeras derivadas de la función resulta:

$$f'(x) = \frac{2(x-6)}{3(x-4)^{4/3}}; \text{ punto crítico: } x = 6.$$

(El punto $x = 4$, aunque anula el denominador, no está en el dominio.)

$$f''(x) = \frac{2(-x+12)}{9(x-4)^{7/3}}; \ f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 12.$$

Estudiando el signo de estas derivadas, podemos escribir la siguiente tabla:

	$(-\infty, 4)$	$(4, 6)$	$(6, 12)$	$(12, \infty)$
$f'(x)$	$--$	$--$	$++$	$++$
$f''(x)$	$--$	$++$	$++$	$--$

Por tanto, f crece en $(6, \infty)$ y decrece en $(-\infty, 4) \cup (4, 6)$.

Además, f es cóncava hacia arriba en $(4, 12)$ y hacia abajo en $(-\infty, 4) \cup (12, \infty)$.

(e) Observando la tabla anterior se pueden ver los puntos donde cambia de signo alguna derivada. De esto se deduce la siguiente información:

Cuando $x = 6$, la función alcanza un mínimo local.

Además hay un punto de inflexión cuando $x = 12$ (aunque en $x = 4$ cambia la concavidad, el punto no es de inflexión porque no está en el dominio).

Los puntos de la curva correspondientes a estos valores de x son:

$$(6, 6/\sqrt[3]{2}), (12, 6).$$

(f) - La recta $x = 4$ puede ser asíntota vertical, porque dicho punto no está en el dominio.

En efecto, $\lim_{x \to 4} f(x) = \infty$.

- Veamos si hay asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x-4}} = \infty.$$

(Se trata de un límite indeterminado de la forma ∞/∞ cuyo resultado es ∞ porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador).

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x-4}} = \infty.$$

No hay asíntotas horizontales porque ambos límites son infinitos.

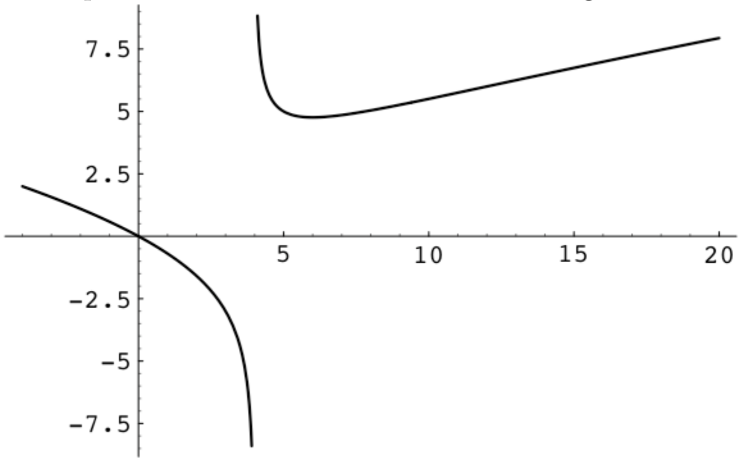
- Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-4}} = 0.$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-4}} = 0.$$

Tampoco hay asíntotas oblicuas (la pendiente no puede ser 0).

(g) La gráfica que resulta del estudio realizado es la siguiente:



PROBLEMA 6.18.

Representar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 + x^3}$.

Solución

(a) $D(f) = \mathbb{R}$ (la raíz cúbica se puede calcular para cualquier número real).

(b) $f(-x) = \sqrt[3]{6(-x)^2 + (-x)^3} = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$.

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, la función no es simétrica.

(c) Si $x = 0$, $f(0) = 0$. Por tanto, la curva corta al eje Y en el punto $(0,0)$.

Si $y = 0$, $0 = \sqrt[3]{6x^2 + x^3}$. Entonces $x = 0$ ó $x = -6$.

La curva corta al eje X en los puntos $(0,0)$ y $(-6,0)$.

(d) Al calcular las dos primeras derivadas de la función resulta:

$$f'(x) = \frac{x(4+x)}{(6x^2+x^3)^{2/3}}; \text{ puntos críticos: } x=0,\ x=-4,\ x=-6.$$

$$f''(x) = \frac{-8x^2}{(6x^2+x^3)^{5/3}}; \text{ puntos críticos: } x=0,\ x=-6.$$

Estudiando el signo de estas derivadas, podemos escribir la siguiente tabla:

	$(-\infty,-6)$	$(-6,-4)$	$(-4,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$++$	$++$	$--$	$++$
$f''(x)$	$++$	$--$	$--$	$--$

Por tanto, f crece en $(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$ y decrece en $(-4,0)$.

Además, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-6)$ y hacia abajo en $(-6,\infty)$.

(e) Observando la tabla anterior se pueden ver los puntos donde cambia de signo alguna derivada. De esto se deduce la siguiente información:

Cuando $x=-4$, la función alcanza un máximo local y cuando $x=0$, un mínimo local.

Además cuando $x=-6$ hay un punto de inflexión (aquí la derivada segunda no existe).

Los puntos de la curva correspondientes a estos valores de x son:

$$(-6,0), (-4, 2\sqrt[3]{4}), (0,0).$$

(f) - No hay asíntotas verticales porque $D(f)=\mathbb{R}$.

- Veamos si hay asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{6x^2+x^3} = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{6x^2+x^3} = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{\frac{6}{x}+1} = -\infty.$$

No hay asíntotas horizontales porque ambos límites son infinitos.

- Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2+x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[3]{\frac{6}{x}+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x}+1} = 1.$$

$$m_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} + 1} = 1.$$

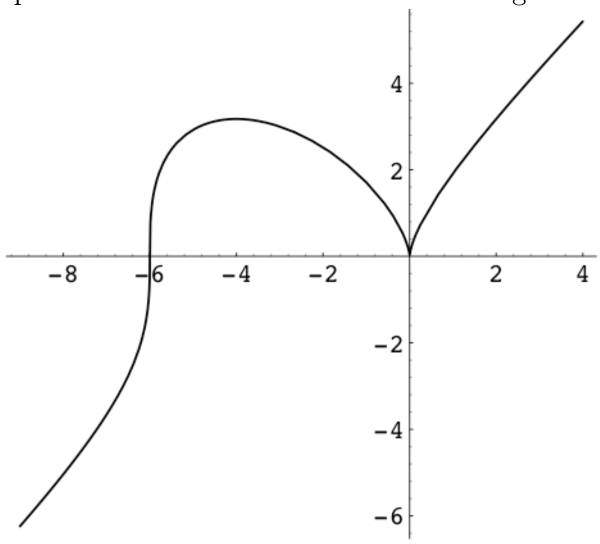
$$\begin{aligned}
b_1 &= \lim_{x \to \infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{6x^2 + x^3} - x) \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt[3]{6x^2 + x^3} - x)(\sqrt[3]{(6x^2 + x^3)^2} + x\sqrt[3]{6x^2 + x^3} + x^2)}{\sqrt[3]{(6x^2 + x^3)^2} + x\sqrt[3]{6x^2 + x^3} + x^2} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 + x^3 - x^3}{\sqrt[3]{(6x^2 + x^3)^2} + x\sqrt[3]{6x^2 + x^3} + x^2} = \frac{6}{1 + 1 + 1} = 2,
\end{aligned}$$

(el grado del numerador es igual al grado del denominador; sólo se necesita dividir los coeficientes de los términos de mayor grado).

Análogamente se calcula $b_2 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_2 x]$ y se obtiene también que $b_2 = 2$.

Se deduce que la recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

(g) La gráfica que resulta del estudio realizado es la siguiente:



PROBLEMA 6.19.

Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$.

Solución

(a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

(b) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4(-x) + 3} = \dfrac{-x}{x^2 + 4x + 3}$.

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, la función no es simétrica.

(c) Si $x = 0$, $f(0) = 0$. Por tanto, la curva corta al eje Y en el punto $(0, 0)$.

Si $y = 0$, entonces $x = 0$. La curva corta al eje X en el mismo punto $(0, 0)$.

(d) Al calcular las dos primeras derivadas de la función resulta:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 3}{(x^2 - 4x + 3)^2}.$$

Puntos críticos: $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$.

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 9x + 12)}{(x^2 - 4x + 3)^3}.$$

La segunda derivada se hará cero en algún valor "a" comprendido entre -4 y -3, porque el numerador toma un valor negativo cuando $x = -4$ y un valor positivo cuando $x = -3$. Por el teorema de Bolzano, debe tener una raíz en algún punto del intervalo $(-4, -3)$. Esa raíz es única porque el polinomio $x^3 - 9x + 12$ es positivo cuando $x > -3$.

Estudiando el signo de estas derivadas, podemos construir la siguiente tabla:

	$(-\infty, a)$	$(a, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$--$	$--$	$++$	$++$	$--$	$--$
$f''(x)$	$--$	$++$	$++$	$--$	$--$	$++$

(e) Observando la tabla anterior se pueden ver los puntos donde cambia de signo alguna derivada. De esto se deduce la siguiente información:

Cuando $x = -\sqrt{3}$, la función alcanza un mínimo local. Cuando $x = \sqrt{3}$, alcanza un máximo. Los puntos correspondientes de la función son:

$$(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/(6 + 4\sqrt{3})), \ (\sqrt{3}, \sqrt{3}/(6 - 4\sqrt{3})).$$

Además hay un punto de inflexión cuando $x = a$.

(f) - Las rectas $x = 1$ y $x = 3$ pueden ser asíntotas verticales, porque los puntos no están en el dominio.

En efecto, es evidente que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ y además $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$.

- Veamos si hay asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-4x+3} = 0.$$

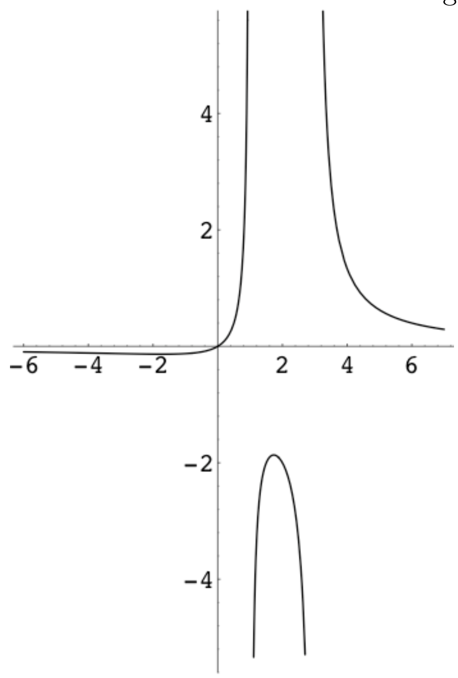
(Se trata de un límite indeterminado de la forma ∞/∞ cuyo resultado es 0 porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4x+3} = 0.$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos del dominio.

- No puede haber asíntotas oblicuas al haber ya horizontales.

(g) La gráfica que resulta del estudio realizado es la siguiente:



PROBLEMA 6.20.

Representar la curva $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

Solución

(a) El dominio será el conjunto de puntos solución de la inecuación $x^2 - 3x + 2 > 0$. Como las raíces del primer miembro son 2 y 1, la inecuación se escribe como $(x-1)(x-2) > 0$ y la solución es $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

(b) Como $f(-x) = \ln[(-x)^2 - 3(-x) + 2] = \ln(x^2 + 3x + 2)$, la curva no es simétrica (además, como el dominio no es simétrico, la curva tampoco puede serlo).

(c) Si $x = 0$, $f(0) = \ln 2$. Por tanto, la curva corta al eje Y en el punto $(0, \ln 2)$.

Si $y = 0$,

$$0 = \ln(x^2 - 3x + 2) \Longrightarrow 1 = x^2 - 3x + 2 \Longrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La curva corta al eje X en los puntos $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0)$ y $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0)$.

(d) Al calcular las dos primeras derivadas de la función resulta:

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}; \text{ la derivada se anula cuando } x = 3/2.$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 3x + 2) - (2x - 3)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}.$$

Como el numerador no tiene raíces reales, $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in D(f)$.

Estudiando el signo de estas derivadas, podemos escribir la siguiente tabla:

	$(-\infty, 1)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$--$	$++$
$f''(x)$	$--$	$--$

Por tanto, f crece en $(2, \infty)$ y decrece en $(-\infty, 1)$ (recordemos que $x = 3/2$ no está en el dominio).

Además, f es siempre cóncava hacia abajo.

(e) De la tabla anterior se deduce que no hay máximos ni mínimos locales así como tampoco puntos de inflexión.

(f) - Para obtener las asíntotas verticales debemos calcular:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln(x^2 - 3x + 2) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \ln(x^2 - 3x + 2) = -\infty.$$

Por tanto, las rectas $x = 1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

- Veamos si hay asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(x^2-3x+2) = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2-3x+2) = \infty.$$

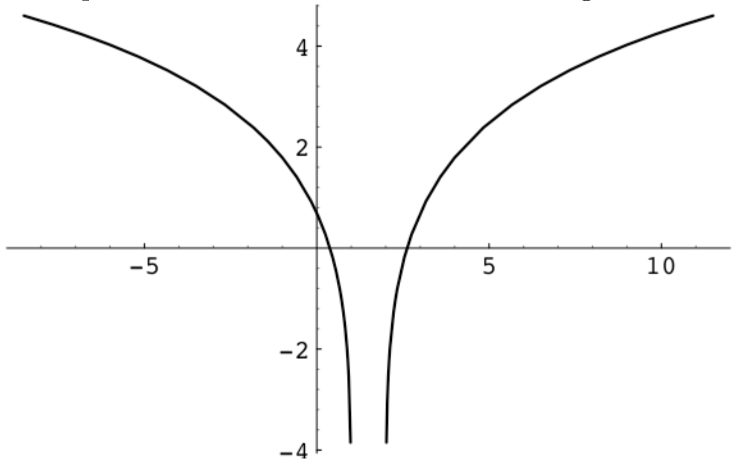
No hay asíntotas horizontales porque ambos límites son infinitos.

- Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-3x+2)}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln[x^2(1-3/x+2/x^2)]}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x + \ln(1-3/x+2/x^2)}{x} = 0. \\ m_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\ln(-x) + \ln(1-3/x+2/x^2)}{x} = 0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que tampoco hay asíntotas oblicuas.

(g) La gráfica que resulta del estudio realizado es la siguiente:



Observa la simetría de la gráfica con respecto a la recta $x = 3/2$, es decir que se verifica la identidad $f(x+3/2) = f(-x+3/2)$.

D. PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Para resolver problemas donde se pretendan encontrar valores máximos o mínimos de ciertas cantidades, se procede de la siguiente manera:

1) Determinar la cantidad (que llamaremos y) que se quiere hacer máxima o mínima.

2) Construir mediante una fórmula adecuada una función cuya variable dependiente sea la cantidad y y que dependa de otra u otras cantidades (por ejemplo $y = f(x_1, x_2, ...)$).

3) Encontrar una relación entre las variables de la que depende la cantidad original a partir de los datos del problema.

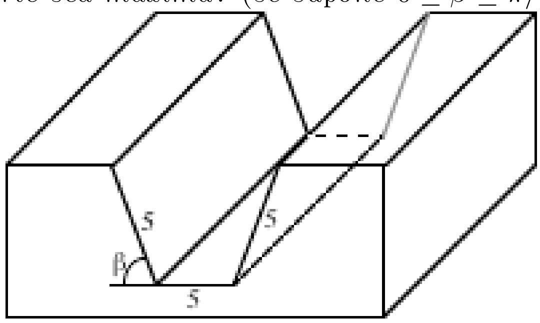
4) Sustituir en la función construida las variables en función de otra para que resulte una función de una sola variable y determinar los posibles valores (dominio natural) que puede tomar.

5) Aplicar las técnicas de cálculo (derivadas) para encontrar los valores que hacen máxima o mínima (según el caso) la función resultante.

6) Interpretar los resultados de acuerdo al enunciado original.

PROBLEMA 6.21.

Se construye un canal de desagüe de modo que su sección transversal es un trapecio con lados de igual pendiente y longitud 5 m (lados y fondo). ¿Cómo elegir el ángulo de inclinación β para que el área del corte sea máxima? (se supone $0 \leq \beta \leq \pi/2$).

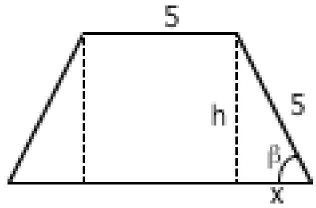


Solución

1) Se trata de maximizar el área de un trapecio.

2) Escribimos la fórmula del área: $A = \dfrac{(B+b)h}{2}$, la cual depende de tres variables, B, b y h.

3) Si definimos las variables que se indican en la figura,



obtenemos las relaciones $b = 5; B = 5 + 2x; \cos\beta = x/5; \operatorname{sen}\beta = h/5$.

4) Sustituyendo en la fórmula del área, nos queda:

$$A = \frac{(10 + 2x)h}{2} = \frac{(10 + 10\cos\beta) \cdot 5 \operatorname{sen}\beta}{2} = 25 \operatorname{sen}\beta(1 + \cos\beta)$$

De este modo ya tenemos una función que depende de una sola variable, que puede tomar valores entre 0 y $\pi/2$ (pues se trata de un ángulo agudo).

5) El problema de encontrar el máximo de dicha función se reduce a utilizar métodos de cálculo y determinar los valores de β que anulen la derivada primera. Si derivamos la función, tenemos:

$$\begin{aligned} A' &= 25\cos\beta(1 + \cos\beta) + 25 \operatorname{sen}\beta(-\operatorname{sen}\beta) \\ &= 25\cos\beta + 25\cos^2\beta - 25(1 - \cos^2\beta) = 25(2\cos^2\beta + \cos\beta - 1). \end{aligned}$$

Al hacer $A' = 0$ y despejar la variable, tenemos:

$$\cos\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} \Longrightarrow \cos\beta = \frac{1}{2} \text{ ó } \cos\beta = -1.$$

Como $0 \le \beta \le \pi/2$, sólo es válido el valor $\cos\beta = 1/2$, por lo que $\beta = \pi/3$.

Para comprobar que el área es máxima para este valor, debemos calcular la derivada segunda y comprobar que $A''(\pi/3) < 0$. En efecto:

$$A'' = 25[4\cos\beta(-\operatorname{sen}\beta) - \operatorname{sen}\beta] \Longrightarrow A''(\pi/3) = 25(2\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2) = 25\sqrt{3}/2.$$

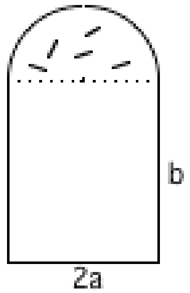
6) Como el enunciado del problema pide que se calcule el ángulo, la respuesta debe ser $\beta = \pi/3$.

PROBLEMA 6.22.

Una ventana tiene forma rectangular con semicírculo en la parte superior. El rectángulo es de vidrio claro y el semicírculo de vidrio coloreado. El coloreado sólo transmite la mitad de luz por m^2 que el claro. Si el perímetro de la ventana es fijo, determinar las proporciones de la ventana que admitirá más luz.

Solución

En la figura siguiente se especifican las variables que se van a utilizar.



1) El problema trata de maximizar la cantidad de luz.

2) La cantidad de luz será el producto del área de cada sección por la luz que transmite por unidad de área. Denotaremos por c a la cantidad de luz por m^2 que transmite el vidrio coloreado. De este modo, la cantidad total de luz viene dada por:

$$L = 2c \cdot 2ab + c\pi a^2/2.$$

3) En este caso, c es una constante pero a y b son variables. Para poder escribir L como función de una sola variable utilizamos el dato de que el perímetro, que llamaremos P, es fijo. Como

$$P = 2a + 2b + \pi a \Longrightarrow 2b = P - 2a - \pi a.$$

4) Sustituyendo $2b$ en la ecuación de L, obtenemos:

$$L = 2ca(P - 2a - \pi a) + c\pi a^2/2.$$

5) Ya podemos manejar las herramientas del cálculo para encontrar el máximo de la función L con variable a. Derivando en primer lugar resulta:

$$L' = 2c(P - 2a - \pi a) + 2ca(-2 - \pi) + c\pi a = 2cP - 8ca - 3\pi ca.$$

Si $L' = 0$, entonces $a = \dfrac{-2cP}{-8c - 3\pi c} = \dfrac{2P}{8 + 3\pi}$.

Para comprobar que este valor de a da lugar al máximo de la función calcularemos L'':

$$L'' = c(-8 - 3\pi) < 0.$$

6) De este modo, las dimensiones de la ventana que maximizan la cantidad de luz son

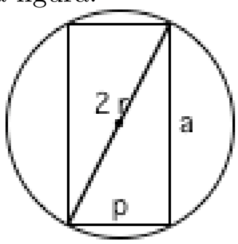
$$\begin{aligned} a &= \frac{2P}{8 + 3\pi}; \\ b &= \frac{1}{2}\left(P - \frac{4P}{8 + 3\pi} - \frac{2P\pi}{8 + 3\pi}\right) = \frac{8P + 3P\pi - 4P - 2P\pi}{2(8 + 3\pi)} = \frac{(4 + \pi)P}{2(8 + 3\pi)}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.23.

La rigidez de una viga rectangular es proporcional al producto de su anchura por el cubo de su profundidad, pero no está relacionada con su longitud. Hallar las proporciones de la viga más rígida que puede cortarse de un tronco de diámetro dado.

Solución

1) La sección de la viga cortada de un tronco circular, cuya rigidez queremos calcular, tiene la forma de la figura:



2) De acuerdo al enunciado, la rigidez de la viga viene expresada por:

$R = kap^3$ donde a (anchura) y p (profundidad) son variables.

3) Sin embargo dichas variables están relacionadas por la fórmula

$a^2 + p^2 = (2r)^2 \Longrightarrow a = \sqrt{d^2 - p^2}$ siendo d el diámetro del tronco.

4) Así pues, $R = kp^3\sqrt{d^2 - p^2}$ y resulta una función con una sola variable (k y d son constantes).

5) Buscamos los puntos críticos:

$$R' = 3kp^2\sqrt{d^2 - p^2} + kp^3 \frac{-2p}{2\sqrt{d^2 - p^2}} = \frac{3kp^2(d^2 - p^2) - kp^4}{\sqrt{d^2 - p^2}} = \frac{kp^2(3d^2 - 4p^2)}{\sqrt{d^2 - p^2}}.$$

Para que $R' = 0$, debe ser $p = 0$ ó $3d^2 - 4p^2 = 0$. El primer caso no es posible y el segundo da como resultado que $p = d\sqrt{3}/2$.

Volviendo a derivar se comprueba que dicho valor de p produce un máximo.

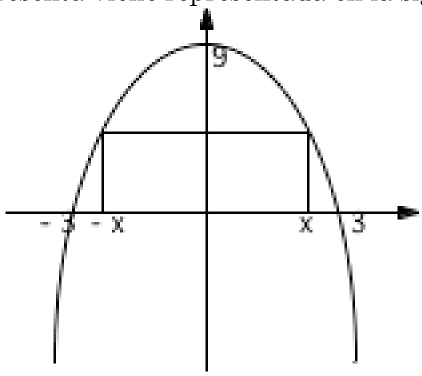
6) Para obtener la anchura, basta sustituir p en la fórmula $a = \sqrt{d^2 - p^2}$. Resulta que $a = d/2 = r$.

PROBLEMA 6.24.

Hallar el perímetro y área del rectángulo de área máxima que puede inscribirse entre la parábola $y = 9 - x^2$ y el eje X.

Solución

La situación que se presenta viene representada en la siguiente gráfica:



De este modo, la base del rectángulo mide $2x$ (debido a la simetría de la curva dada) y la altura $9 - x^2$ (ya que los puntos superiores del rectángulo deben estar sobre la parábola). El área será entonces:

$$A = 2x(9 - x^2)$$

la cual ya viene expresada como función de una sola variable.

Derivando e igualando a cero la derivada, tenemos que:

$$A' = 18 - 6x^2 \text{ y } A' = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}.$$

Como $A'' = -12x$ y $A''(\sqrt{3}) < 0$, el punto $x = \sqrt{3}$ corresponde a un máximo. Sustituyendo en la fórmula del área, resulta $A = 12\sqrt{3}$.

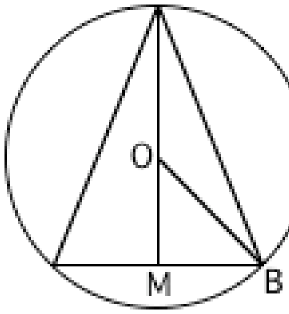
Como también se pide el perímetro del rectángulo y este vale $P = 4x + 2(9 - x^2)$, al sustituir nos queda que $P = 12 + 4\sqrt{3}$.

PROBLEMA 6.25.

Calcular las dimensiones del cono inscrito en una esfera de radio R para que el volumen sea máximo.

Solución

La fórmula del volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h la altura del cono.



Ahora bien, observando en la figura el triángulo rectángulo OMB de dimensiones $OM = h - R$, $OB = R$, $MB = r$, por el teorema de Pitágoras $R^2 = (h-R)^2 + r^2$, de donde $r^2 = R^2 - (h-R)^2$.

Sustituyendo en la fórmula del volumen tenemos:

$$V = \frac{1}{3}\pi[R^2 - (h-R)^2]h = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 2Rh^2).$$

Derivando,

$$V' = \frac{1}{3}\pi(-3h^2 + 4Rh) = \frac{1}{3}\pi h(-3h + 4R).$$

Para encontrar los extremos hacemos $V' = 0$ lo que ocurre cuando $h = 0$ ó $h = 4R/3$. El primer valor no tiene sentido en este contexto; el segundo lo sustituimos en la derivada segunda. Tenemos:

$$V'' = \frac{1}{3}\pi(-6h + 4R) \Longrightarrow V''(4R/3) = \frac{1}{3}\pi(-8R + 4R) < 0$$

con lo que el valor $h = 4R/3$ corresponde a un máximo.

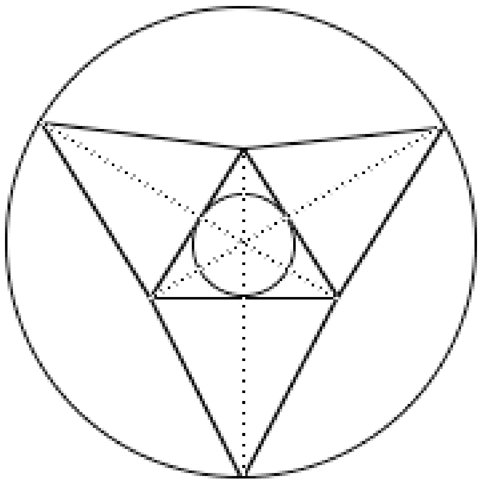
El radio del cono será $r = \sqrt{R^2 - (h-R)^2} = 2\sqrt{2}R/3$.

PROBLEMA 6.26.

Las caras laterales de una pirámide triangular regular se abaten sobre el plano de la base y hacia el exterior. La circunferencia que pasa por los tres abatimientos del vértice superior tiene de radio 10 cm. Calcular la longitud del lado de la base para que el volumen de la pirámide sea máximo.

Solución

Se trata de maximizar la función volumen de la pirámide cuya fórmula es $V = \frac{1}{3}S_B h$, donde S_B es el área de la base y h es la altura de la pirámide.



Sea r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo de la base y l el lado del mismo. Como el triángulo es equilátero, $S_B = l^2\sqrt{3}/4$. Como además $l = 2\sqrt{3}r$, $S_B = \dfrac{(2\sqrt{3}r)^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2$.

La altura de la pirámide es un cateto de un triángulo rectángulo, cuyo otro cateto es r y la hipotenusa $10 - r$. Tenemos así:

$$h = \sqrt{(10-r)^2 - r^2} = \sqrt{100 - 20r}.$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen, resulta:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}r^2\sqrt{100-20r} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{100-20r} \cdot r^2 = \sqrt{300r^4 - 60r^5}$$

Derivamos para calcular los extremos:

$$V' = \frac{1200r^3 - 300r^4}{2\sqrt{300r^4 - 60r^5}}.$$

Así $V' = 0 \iff 1200r^3 = 300r^2 \iff r = 4$ ó $r = 0$.

Como $r = 4$ hace que $V'' < 0$, corresponde a un máximo.

Las dimensiones buscadas son pues $r = 4,\ l = 8\sqrt{3}$.

PROBLEMA 6.27.

Hallar la posición más favorable para meter gol desde un punto de la banda lateral de un campo de fútbol, siendo a y b las distancias respectivas desde el córner a los postes de la portería.

Solución

La posición más favorable será aquella desde la cual se vea la portería bajo mayor ángulo.

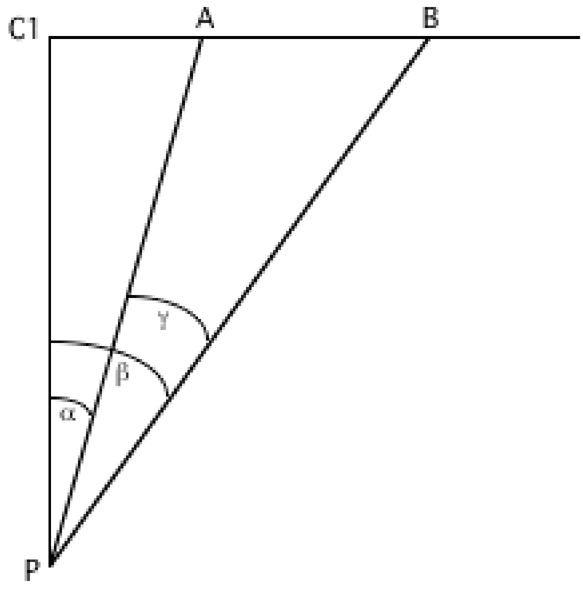
Sea x la distancia del córner C_1 a la posición P que suponemos más favorable. De acuerdo a la gráfica adjunta, tenemos que $\operatorname{tg}\alpha = a/x$ y $\operatorname{tg}\beta = b/x$. Como $\gamma = \beta - \alpha$, tendremos $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \dfrac{b/x - a/x}{1 + ab/x^2} = \dfrac{(b-a)x}{ab + x^2}$.

Debemos maximizar la función $y = \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{(b-a)x}{ab + x^2}$. Derivando:

$$y' = \frac{(b-a)(ab + x^2) - 2x^2(b-a)}{(x^2 + ab)^2} = \frac{(b-a)(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2}.$$

Al igualar a cero resulta $x^2 = ab \Longrightarrow x = \pm\sqrt{ab}$.

Además, la derivada segunda es $y''(\sqrt{ab}) < 0$ por lo que la distancia al córner sobre la banda más favorable es $x = \sqrt{ab}$.



PROBLEMA 6.28.

Hallar la altura del cilindro circular recto, de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio R.

Solución

La función a maximizar es el volumen del cilindro, de ecuación $V = \pi r^2 h$.

La relación entre el radio y la altura viene dada por la fórmula

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2 \Longrightarrow r^2 = R^2 - h^2/4,$$

que al sustituir en la fórmula del volumen resulta $V = \pi h(R^2 - h^2/4)$.

Derivando con respecto a h,

$$V' = \pi[(R^2 - h^2/4) + h(-h/2)] = \pi[R^2 - 3h^2/4].$$

$$V' = 0 \Longleftrightarrow R^2 = 3h^2/4 \Longleftrightarrow h = \pm\sqrt{4R^2/3} = \pm 2R/\sqrt{3}.$$

Nótese que $V'' = -(3/4)\pi \cdot 2h$ y $V''(2R/\sqrt{3}) < 0$ lo que indica que el volumen máximo se alcanza cuando $h = 2R/\sqrt{3}$.

E. TEOREMAS DEL VALOR MEDIO. REGLA DE L'HÔPITAL.

Tres propiedades fundamentales de las funciones derivables corresponden a los siguientes teoremas del valor medio:

a) Teorema de Rolle.

Si una función $y = f(x)$ verifica las siguientes hipótesis:

a) f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$;

b) f es derivable en el intervalo abierto (a, b);

c) $f(a) = f(b)$;

entonces se puede asegurar la existencia de otro punto c comprendido entre a y b para el cual $f'(c) = 0$.

El teorema de Rolle se puede interpretar diciendo que entre dos puntos donde una función continua y derivable toma el mismo valor, debe haber otro punto donde la derivada se anule. Similar al teorema anterior aunque

más general es el siguiente:

b) Teorema del valor medio de Lagrange.

Si una función $y = f(x)$ verifica las siguientes hipótesis:

a) f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$;

b) f es derivable en el intervalo abierto (a, b);

entonces se puede asegurar la existencia de otro punto c comprendido entre a y b para el cual $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La última igualdad indica que las pendientes de la recta tangente a $y = f(x)$ por el punto $x = c$ y de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ son iguales, es decir, que tales rectas son paralelas.

c) Teorema del valor medio de Cauchy.

Dadas dos funciones $y = f(x), y = g(x)$ continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Consecuencia de este teorema es la *regla de L'Hôpital* para resolver límites indeterminados utilizando derivadas. Los casos en que se puede aplicar son los siguientes:

REGLA 1 (CASO 0/0):

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

REGLA 2 (CASO ∞/∞):

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

OBSERVACIONES:

1) En ambos casos a puede tomar cualquier valor infinito.

2) Las indeterminaciones $0/0$ e ∞/∞ son los únicos casos en que es posible aplicar la regla de L'Hôpital. Cualquier otra indeterminación se debe previamente transformar en una de estas dos.

3) Esta regla es apropiada cuando el límite del cociente de las derivadas es más sencillo que el original. En caso contrario, se debe aplicar alguna otra técnica como las ya estudiadas.

4) La regla se puede aplicar sucesivas veces mientras se mantenga la indeterminación y se puedan derivar las funciones, es decir, podemos derivar tantas veces f y g como sea posible y hasta que alguna de estas derivadas tenga límite distinto de cero o de infinito.

PROBLEMA 6.29.

¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = -3 + 3(x-1)^{2/3}$ *en el intervalo* $[0, 2]$*?*

Solución

Veamos si se cumplen todas las hipótesis del teorema:

a) f está definida para cualquier valor real; es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Como $f'(x) = 2(x-1)^{-1/3}$, no está definida para $x = 1$; no es derivable en el intervalo $(0, 2)$.

No se cumplen las condiciones del teorema de Rolle. No se puede asegurar la existencia de puntos en el intervalo $(0, 2)$ que anulen la derivada de la función (aunque puede haberlos).

PROBLEMA 6.30.

Probar que $f(x) = 6x^4 - 7x + 1$ *no tiene más de dos raíces reales.*

Solución

Supongamos que la función dada sí tiene más de dos raíces reales (lo cual es posible pues se trata de un polinomio de grado 4). Es decir, que existen por lo menos tres puntos a, b, c para los que se cumple que $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.

Veamos si se cumplen las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$:

Como es un polinomio, se trata de una función continua en todo $\mathbb{R}$.

Además es derivable y su derivada es $f'(x) = 24x^3 - 7$.

Como se cumplen todas las condiciones del teorema, deben existir dos valores, r y s, uno en cada intervalo donde se verifique que $f'(r) = f'(s) = 0$.

Sin embargo, para que $f'(x) = 0$ debe ocurrir que $x^3 = 7/24$, es decir, $x = \sqrt[3]{7/24}$ y este valor es único.

La suposición inicial de que puede haber más de dos raíces reales es falsa y queda probado lo que se pedía en el ejercicio.

PROBLEMA 6.31.

Averiguar si la función $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[1, 4]$. Caso de que sea así, encontrar los valores de c que verifican el teorema.

Solución

f es continua en el intervalo (está definida para todos los valores $x \geq 0$).

Como $f'(x) = -4 + 3/2\sqrt{x}$, f es derivable en el intervalo $(1, 4)$.

Se verifican todas las condiciones del teorema. Para encontrar los valores de c, plantearemos la ecuación correspondiente. Por un lado, $f'(c) = -4 + 3/2\sqrt{c}$, y por otro, $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{-10 + 1}{3} = -3$.

Al resolver la ecuación $-4 + 3/2\sqrt{c} = -3$, resulta $3/2\sqrt{c} = 1 \Longrightarrow c = 9/4$.

PROBLEMA 6.32.

Resolver el mismo problema anterior para la función
$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ *en* $[-1, 1]$.

Solución

f no está definida en el punto $x = 1$ pues se anula el denominador. Esto quiere decir que no es continua en todo el intervalo $[-1, 1]$. No se puede aplicar el teorema del valor medio.

PROBLEMA 6.33.

Un automovilista recorre 80 Km en una hora. Probar que la velocidad del automóvil fue de 80 Km/h por lo menos una vez durante el trayecto.

Solución

Sea $f(t)$ la función que indica la distancia recorrida por el móvil al cabo del tiempo t (medido en horas). Suponemos que f es una función continua y derivable (lo cual quiere decir que el movimiento no ha sufrido frenadas bruscas ni arrancadas instantáneas). Por el teorema del valor medio, debe existir algún momento t_0 comprendido entre 0 y 1 para el cual se verifique:

$$f'(t_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 80.$$

Como la derivada de la distancia es la velocidad, hemos comprobado que esta es de 80 Km/h en el momento t_0, por lo menos.

PROBLEMA 6.34.

Comprobar el teorema del valor medio para la función $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$, *en el intervalo* $[2, 5]$.

Solución

Según el teorema del valor medio, si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ para el que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Como en nuestro caso se trata de una función polinómica, es claro que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y como $f'(x) = 4x - 7$, $f(2) = 4$, $f(5) = 25$, el teorema del valor medio dice que existe $c \in (2, 5)$ tal que $4c - 7 = \dfrac{25 - 4}{5 - 2} = 7$ de modo que $c = 3,5$ que evidentemente pertenece al intervalo $(2, 5)$.

PROBLEMA 6.35.

Resolver $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$.

Solución

Tenemos una indeterminación del tipo $0/0$. Si derivamos numerador y denominador, el límite queda de la forma:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{nx^{n-1}}{1} = n.$$

PROBLEMA 6.36.

Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x(1 - \cos x)}$.

Solución

Utilizamos la equivalencia $1 - \cos x \sim x^2/2$ y la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x \cdot x^2/2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3/2} \\ &= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - (\cos x - x \operatorname{sen} x)}{3x^2} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{3x^2} = (2/3) \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2/3. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.37.

Resolver $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Solución

La indeterminación es ahora de la forma $\infty - \infty$. Podemos hacer denominador común y convertir la expresión en un cociente:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}.$$

Ahora el límite es de la forma $0/0$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}.$$

Nuevamente el límite presenta la indeterminación $0/0$. Volvemos a aplicar la regla:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - x \operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0.$$

PROBLEMA 6.38.

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$.

Solución

Si hacemos el cambio $x = 1/z$ y aplicamos la regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{z\to 0^+}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\ln(1+z)\right) = \lim_{z\to 0^+}\frac{z - \ln(1+z)}{z^2} = \lim_{z\to 0^+}\frac{1 - \frac{1}{1+z}}{2z} \\ &= \lim_{z\to 0^+}\frac{z}{2z(1+z)} = \lim_{z\to 0^+}\frac{1}{2(1+z)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.39.

Calcular $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\operatorname{ch} x}$.

Solución

Como el límite es de la forma 1^∞, tomamos logaritmos y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \operatorname{ch} x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x}{1} = 0.$$

En definitiva, $L = e^0 = 1$.

PROBLEMA 6.40.

Calcular $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \cdot e^{1/(1-\cos x)}$.

Solución

Utilizando la equivalencia de los infinitésimos $\operatorname{sen} x \sim x$ y aplicando la regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/(1-\cos x)}}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2} \cdot e^{1/(1-\cos x)}}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{1/(1-\cos x)} \cdot \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora las equivalencias $\operatorname{sen} x \sim x$ y $1 - \cos x \sim x^2/2$, tenemos

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{1/(1-\cos x)}}{x} = \infty.$$

PROBLEMA 6.41.

Calcular $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ch} x}{x \operatorname{sh} x} \right)$.

Solución

Calcularemos por separado los límites de cada uno de los factores.

Si llamamos $A = \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$,

$$\begin{aligned}\ln A &= \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\cos x/\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\cos x} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ch} x}{x\operatorname{sh} x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x}{x^2 \operatorname{sh} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x)}{2x\operatorname{sh} x + x^2\operatorname{ch} x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\operatorname{sh} x}{x(2\operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{ch} x}{3\operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

En definitiva, $L = A \cdot B = -1/3$.

PROBLEMA 6.42.

Calcular $\lim_{p\to 0} \dfrac{a^p - 1}{p}$.

Solución

Si aplicamos la regla de L'Hôpital, tenemos:

$$L = \lim_{p\to 0} \frac{a^p \ln a}{1} = \ln a.$$

PROBLEMA 6.43.

Calcular $\lim_{x\to 0} x^x$.

Solución

Tomando logaritmos, resulta:

$$\ln L = \lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x} = 0.$$

Se obtiene entonces que $L = e^0 = 1$.

PROBLEMA 6.44.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x}$.

Solución

Teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, tenemos:

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0} x^x \ln x} = e^{1\cdot(-\infty)} = 0.$$

PROBLEMA 6.45.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Solución

Procederemos como en casos anteriores:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln(1/x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1/x)}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x)^{-1}\cdot(-1/x^2)}{-1/\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{-1/\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot \operatorname{sen} x = 0,\end{aligned}$$

de donde $L = 1$.

F. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- *Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:*

(a) $f(x) = x^3/3 + 3x^2/2 - 10x$.

Resp.: Crece en $(-\infty, -5)$ y en $(2, \infty)$; decrece en $(-5, 2)$.

(b) $f(x) = x^3 + x + 4/x$.

Resp.: Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; decrece en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Resp.: Crece en $(-\infty, \infty)$.

2.- *Encontrar los máximos y mínimos locales de las funciones:*

(a) $f(x) = x^5 - 5x$.

Resp.: Máximo local: $(-1, 4)$; mínimo local: $(1, -4)$.

(b) $f(x) = x + 1/x$.

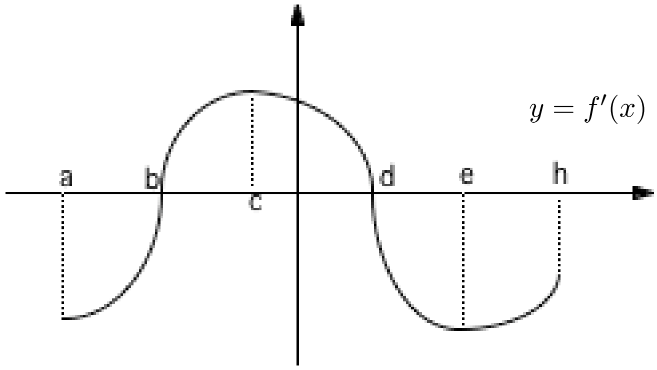
Resp.: Máximo local: $(-1, -2)$; mínimo local: $(1, 2)$.

[Observa que el máximo está por debajo del mínimo. Esto no es extraño porque la función es discontinua en $x = 0$ y en las proximidades de este punto la función tiende a $\pm\infty$].

(c) $f(x) = |4 - x^2|$.

Resp.: Máximo local: $(0, 4)$; mínimos locales: $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

3.- *Sea $y = f(x)$ una función definida en $[a, h]$ cuya derivada tiene la siguiente gráfica:*



(a) ¿Dónde es f creciente?

(b) ¿Dónde tiene f un máximo local?

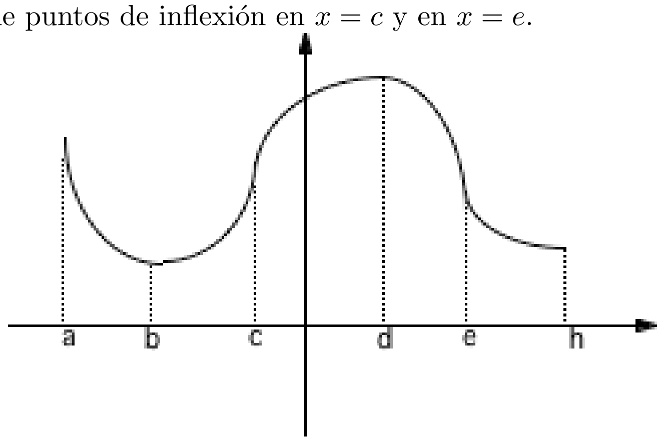
(c) ¿Cuáles son los puntos de inflexión?

(d) Representar aproximadamente la función f.

Resp.: f es creciente en (b, d).

f tiene un máximo local en $x = d$.

f tiene puntos de inflexión en $x = c$ y en $x = e$.



4.- Estudiar la concavidad de las funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

Resp.: Cóncava hacia arriba: $(-2, 0)$, $(2, \infty)$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$.

(b) $f(x) = (5 - x)^{5/3} + 2$.

Resp.: Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 5)$; cóncava hacia abajo: $(5, \infty)$.

5.- *Estudiar el crecimiento y la concavidad de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = \left|\dfrac{x}{1-x^2}\right|$.

Resp.: Crece en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ y es siempre cóncava hacia arriba.

(b) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Resp.: Es siempre creciente y es cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)$.

(c) $f(x) = 2\cos x + \cos^2 x$ *en el intervalo* $[0, 2\pi]$.

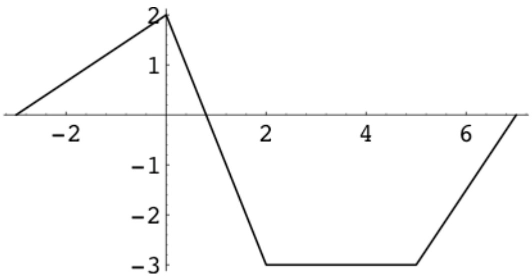
Resp.: Es creciente en $(\pi, 2\pi)$ y cóncava hacia arriba en $(\pi/3, 5\pi/3)$.

6.- *Dada la curva* $y = ax^3 + bx^2 + cx$, *encontrar el valor de las constantes* a, b *y* c *para que* f *tenga un punto de inflexión en* $(1, 2)$ *y además la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto sea* -2.

Resp.: Resolver el sistema $a + b + c = 2$ $6a + 2b = 0$ $3a + 2b + c = -2$

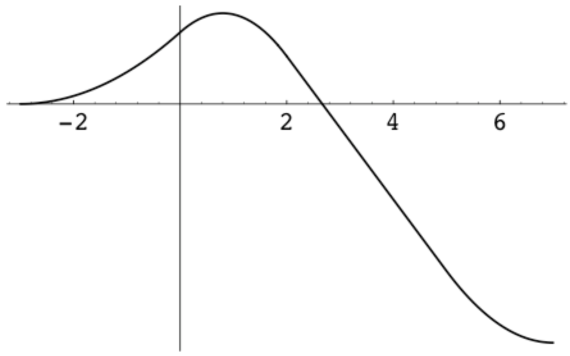
Se obtienen los valores $a = 4,\ b = -12,\ c = 10$.

7.- *Representar aproximadamente una función cuya derivada es la que se tiene a continuación:*



Resp.: Tener en cuenta que f crece en $(-3, 4/5)$ y decrece en $(4/5, 7)$.

También se observa en la gráfica que $f'(x) = 0$ cuando $x = -3, x = 4/5$ y $x = 7$.



8.- Dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

(a) f es continua y derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

(c) Si $-\infty < x < 0 : f(x) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

(d) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

(e) Si $0 < x < 1 : f(x) < 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

(f) $f(1) = 0$.

(g) Si $1 < x < 2 : f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

(h) $f(2) = 1$.

(i) Si $2 < x < 3 : f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

(j) $f(3) = 1/2$.

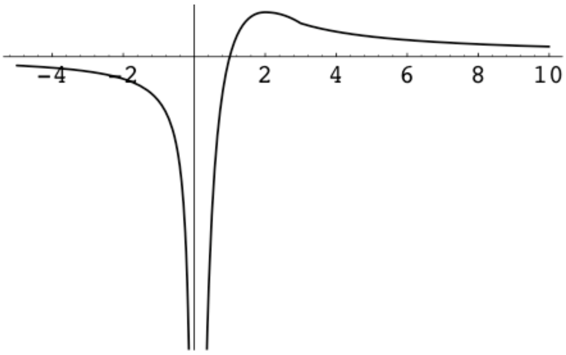
(k) Si $3 < x < \infty : f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

(l) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Resp. Tabla de signos:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$--$	$++$	$++$	$--$	$--$
$f''(x)$	$--$	$--$	$--$	$--$	$++$

Gráfica:



9.- Dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

(a) $D(f) = [-2, 4) \cup (4, \infty)$.

(b) $f(-2) = -3$; f es continua en su dominio.

(c) $f'(x) < 0$ si $x \in (2, 3) \cup (4, 6)$; $f'(x) > 0$ si $x \in [-2, 2) \cup (3, 4) \cup (6, \infty)$; $f'(2) = f'(6) = 0$; $f'(3)$ no existe.

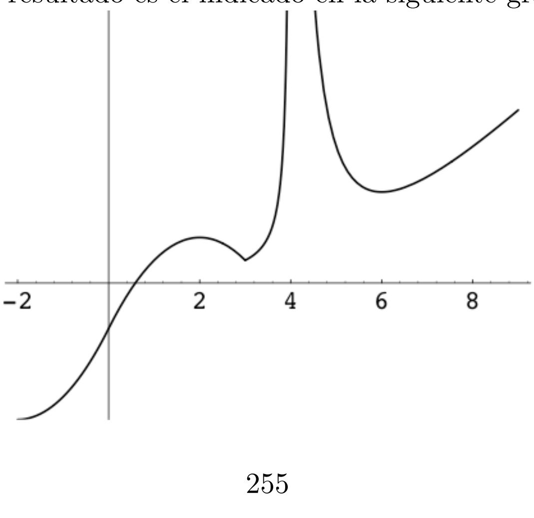
(d) $f''(x) < 0$ si $x \in (0, 3)$; $f''(x) > 0$ si $x \in (-2, 0) \cup (3, 4) \cup (4, \infty)$; $f''(0) = 0$.

(e) La recta $x = 4$ es asíntota.

Resp. La tabla de signos es la siguiente:

	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,6)$	$(6,\infty)$
$f'(x)$	$++$	$++$	$--$	$++$	$--$	$++$
$f''(x)$	$++$	$--$	$--$	$++$	$++$	$++$

Un posible resultado es el indicado en la siguiente gráfica:



10.- Dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

(a) Es continua en $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

(b) $f(-2) = 8, f(0) = 4, f(2) = -1$.

(c) $f'(x) > 0$ si $|x| > 2; f'(x) < 0$ si $|x| < 2; f'(2) = 0; f'(-2)$ no existe.

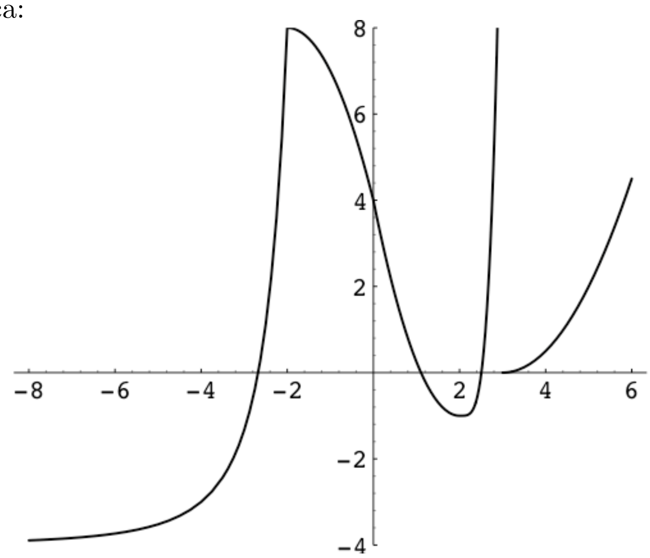
(d) $f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0; f''(x) > 0$ si $x > 0$.

(e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4; x = 3$ es asíntota vertical.

Resp. Tabla de signos:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$--$	$++$	$++$
$f''(x)$		$--$	$++$	$++$	$++$

Gráfica:



11.- Dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

(a) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

(b) Es continua y derivable en $D(f)$.

(c) El único punto de intersección con los ejes es $(0, 0)$.

(d) No hay simetría con el eje Y.

(e) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.

(f) Tiene un mínimo local en $(0,0)$ y un máximo local en $(-2,-4)$.

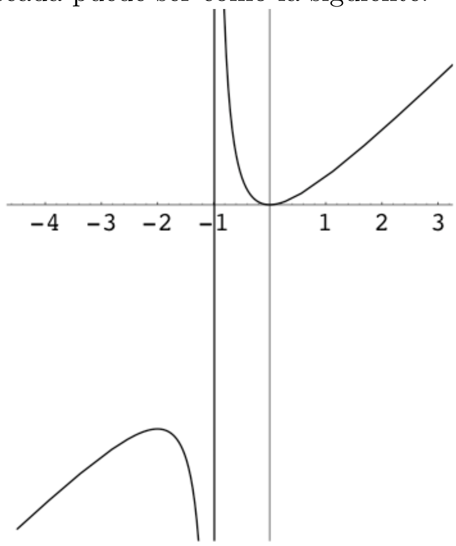
(g) La recta $y = x - 1$ es asíntota.

(h) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$.

Resp. Algunos datos se resumen en la tabla:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$--$	$++$

La gráfica buscada puede ser como la siguiente:



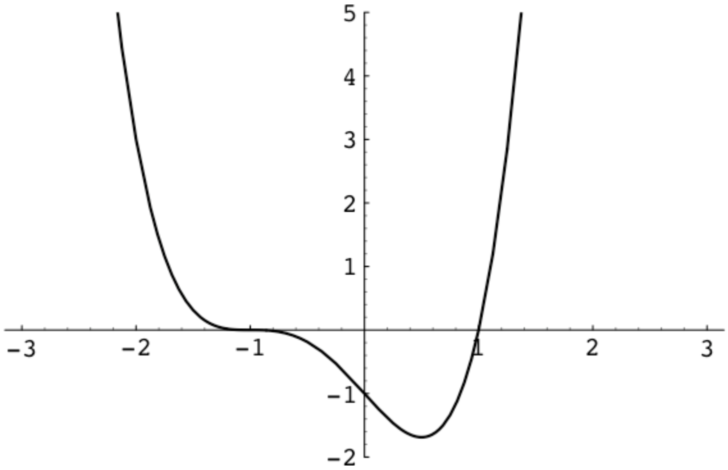
12.- Representar la gráfica de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = (x+1)^3(x-1)$.

Resp.: La tabla de signos es la siguiente:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1/2)$	$(1/2,\infty)$
$f'(x)$	$--$	$--$	$--$	$++$
$f''(x)$	$++$	$--$	$++$	$++$

y la gráfica es la que se ilustra a continuación:

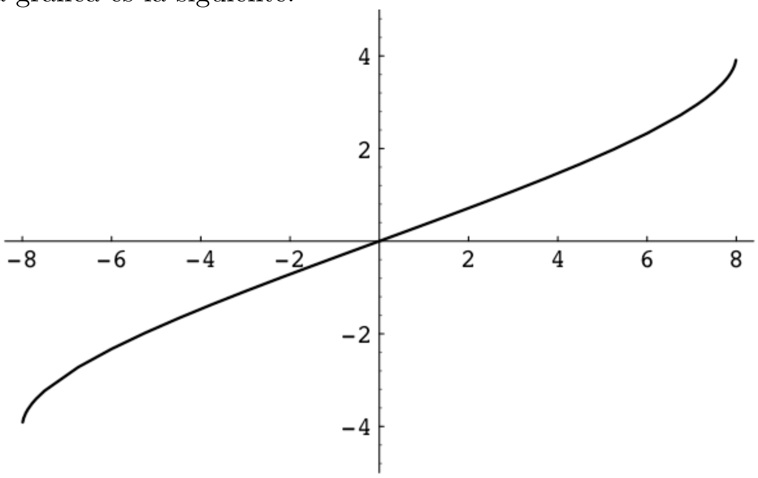


(b) $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$.

Resp.: Como el dominio es $[-8, 8]$, no tiene sentido calcular asíntotas. La tabla de signos es la siguiente:

	$(-4, 0)$	$(0, 4)$
$f'(x)$	$++$	$++$
$f''(x)$	$--$	$++$

La gráfica es la siguiente:

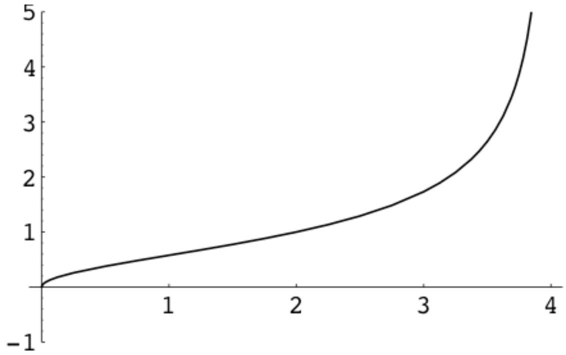


(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$.

Resp.: Tabla de signos:

	$(0,1)$	$(1,4)$
$f'(x)$	$++$	$++$
$f''(x)$	$--$	$++$

Gráfica:

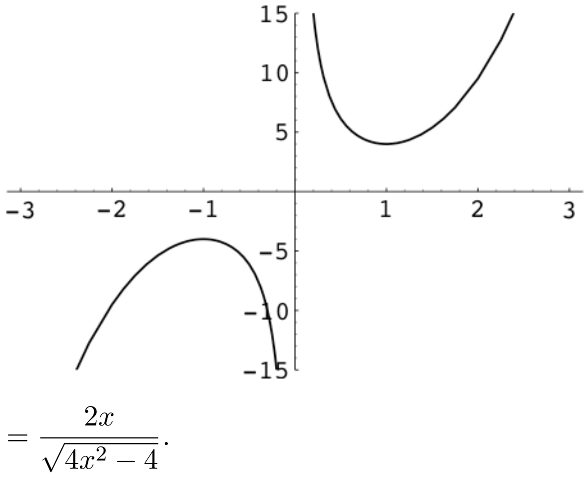


(d) $f(x) = x^3 + 3/x$.

Resp.: Tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$--$	$++$
$f''(x)$	$--$	$--$	$++$	$++$

Gráfica:



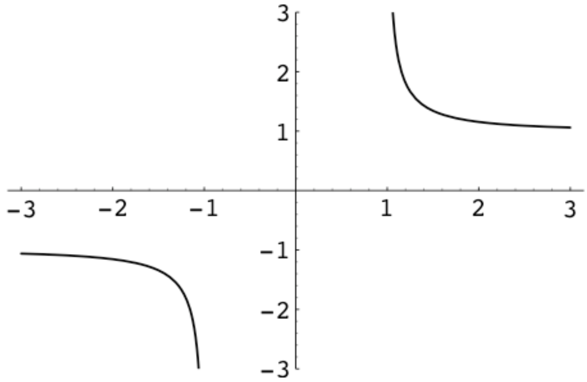
(e) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2-4}}$.

Sugerencia: La función es impar; basta estudiarla en el intervalo $(0,\infty)$ y dibujarla de acuerdo a la simetría.

Resp. Tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$--$	$--$
$f''(x)$	$--$	$++$

Gráfica:

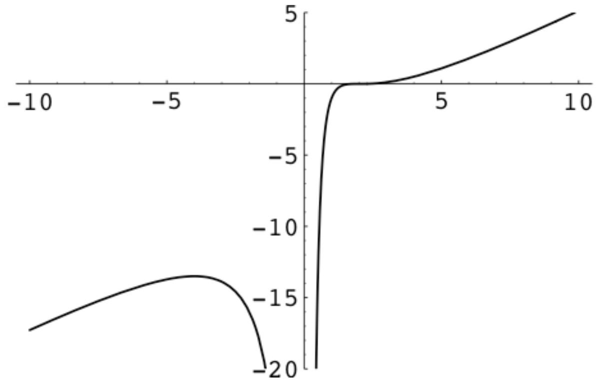


(f) $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$.

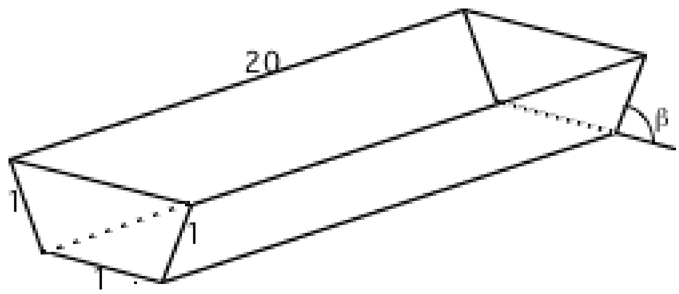
Resp. Tabla de signos:

	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$++$	$--$	$++$	$++$
$f''(x)$	$--$	$--$	$--$	$++$

Gráfica:



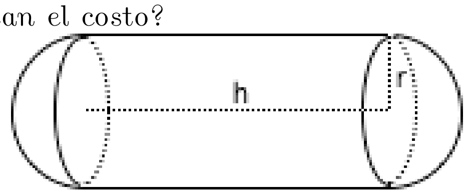
13.- Se construye un depósito como el de la figura con una pieza de metal de 3 m. de ancho y 20 m. de longitud. Expresar el volumen en términos de β y hallar el máximo volumen posible.



Sugerencia: La figura es un prisma recto cuya base es un trapecio. El volumen es igual al área de la base por la altura.

Resp.: $V = 20(1 + \cos\beta)\operatorname{sen}\beta$; $V_{\text{máx}} = 15\sqrt{3}$.

14.- *Se construye un tanque de gas formado por un cilindro y dos semiesferas. El costo por* m^2 *de las semiesferas es doble a la parte cilíndrica. Si la capacidad es* 10π, *¿cuáles son las dimensiones que minimizan el costo?*



Resp.: $r = \sqrt[3]{15}/2$, $h = 30/\sqrt[3]{225}$.

15.- *Dada una esfera de radio* R, *encontrar las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que contiene a la esfera.*

Sugerencia: La generatriz del cono es tangente a la esfera, por lo tanto perpendicular al radio en el punto de corte. Establecer semejanza de triángulos rectángulos.

Resp.: $h = 4R, r = R\sqrt{2}$.

16.- *Un pescador se encuentra en un bote de remos a 2 Km de la costa. Desea llegar a un punto 6 Km más allá del primero y se sabe que puede remar a 3 Km/h y caminar a 5 Km/h. ¿A qué punto de la playa debe llegar si el tiempo de la trayectoria debe ser mínimo?*

Sugerencia: El tiempo de trayectoria es la suma del tiempo que pasa remando y el tiempo que tarda caminando. En ambos casos, $t =$ dist/veloc. (se supone movimiento uniforme).

Resp.: Debe remar hasta un punto situado 1,5 Km del punto más próximo en la costa.

17.- *Una recta variable pasa por* $(1, 2)$ *y corta al eje* X *en* $A(a, 0)$ *y al eje* Y *en* $B(0, b)$. *Hallar el área del triángulo* AOB *de menor área si* $a, b > 0$.

Resp.: Area(mín) = 4.

18.- *Hallar las coordenadas del punto sobre* $y = \sqrt{x}$ *más cercano al* $(4, 0)$.

Sugerencia: En vez de minimizar la distancia, es más cómodo minimizar el cuadrado de la distancia. La variable independiente no cambia.

Resp.: $(7/2, \sqrt{7/2})$.

19.- *Con una pieza de 48 cm de ancho se quiere construir un canal para lo cual se doblan los extremos formando un triángulo isósceles. ¿Qué ángulo deben formar sus lados para que el canal contenga la mayor cantidad de líquido?*

Resp.: El ángulo debe ser de 90 grados.

20.- *Hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo de hipotenusa dada que engendre un cono de volumen máximo al girar alrededor de uno de sus catetos.*

Resp.: Si la hipotenusa mide a, la altura del cono es $h = a/\sqrt{3}$ y el radio $r = a\sqrt{2}/3$.

21.- *La trayectoria de un proyectil lanzado desde Tierra tiene por ecuación*

$$x = 30\cos(\pi/4) \cdot t; \;\; y = 30\,\mathrm{sen}(\pi/4) \cdot t - gt^2/2.$$

(a) *Encontrar la ecuación cartesiana.*

(b) *Calcular la altura máxima.*

(c) *Calcular el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima.*

Resp.: (a) $y = x - gx^2/900$. Corresponde a la ecuación de una parábola.

(b) $y_{\text{máx}} = 225/g$.

(c) $t = 30/g\sqrt{2}$.

22.- Si $f(x) = |2x - 1| - 3$, al calcular su derivada se observa que esta nunca se anula. Además $f(2) = f(-1) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

Resp.: No, porque en el punto $x = 1/2$ que pertenece al intervalo $(-1, 2)$ la función no es derivable. Como falla una de las hipótesis, no se puede aplicar el teorema.

23.- Si la gráfica de un polinomio tiene tres intersecciones con el eje X, probar:

a) que hay al menos dos puntos donde la tangente es horizontal.

b) que al menos en un punto se anula f''.

Resp.: Basta aplicar el teorema de Rolle en los intervalos correspondientes a puntos consecutivos donde las funciones f y f' se anulan.

24.- Probar que la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 6$ sólo tiene una raíz en el intervalo $[-1, 0]$.

Resp.: La función cambia de signo en el intervalo y la derivada no se anula en ningún punto del mismo.

25.- Probar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones.

Sugerencia: Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$ y encontrar sus máximos y mínimos.

Otro método: Suponer que tiene más de dos raíces y utilizar el teorema de Rolle en los dos intervalos que dichas raíces determinan. ¿Qué pasaría si sólo tuviera una raíz?

26.- Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 2 & \text{si } x < 0, \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$ Probar que $f(x) = 0$ sólo tiene una raíz en el intervalo $(-1, 1)$.

Sugerencia: Comprobar que la función es creciente y cambia de signo en los extremos del intervalo $(-1, 0)$ y que no tiene raíces en el intervalo $(0, 1)$.

27.- Averiguar si alguna de las siguientes funciones cumple las hipótesis del teorema del valor medio. En caso afirmativo, encontrar los valores de c que verifican el teorema:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $[1,3]$.

Resp.: Sí; $c = 3/2$.

b) $f(x) = -3 + 3(x-1)^{2/3}$ en $[0,2]$.

Resp.: No.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \le 1, \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $[0,2]$.

Resp.: Sí; $c_1 = 1/2$, $c_2 = \sqrt{2}$.

28.- Una persona que recorrió 202 Km en dos horas aseguró que nunca excedió el límite de velocidad de 100 Km/h. Usar el teorema del valor medio para demostrar que mintió.

29.- Demostrar que si f es continua en c y existe $\lim_{x\to c} f'(x)$, entonces existe $f'(c)$ y es igual a $\lim_{x\to c} f'(x)$.

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a f en los intervalos $[c, c+h]$ y $[c-h, c]$.

30.- Probar que $\operatorname{sen} x \le x$ para todo x en $[0, \infty)$.

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, x]$.

31.- Demostrar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le |x - y|$.

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = \operatorname{sen} x$ en cualquier intervalo $[x, y]$.

32.- Sea f una función continua en $[a,b]$ con derivada segunda f'' en (a,b) y tal que el segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ corta a la curva en $(c, f(c))$ donde $a < c < b$. Probar que $f''(t) = 0$ para algún t en (a,b).

Sugerencia: Probar que existen $c_1, c_2 \in (a,b)$ tales que $f'(c_1) = f'(c_2)$ aplicando elteorema del valor medio a f en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$.

33.- Resolver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\operatorname{sen}\pi x}{x-\operatorname{sen}\pi x}$.

Resp.: $\dfrac{1+\pi}{1-\pi}$.

34.- Resolver $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Resp.: -1.

35.- Resolver $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} 4x \cdot \operatorname{sen} 3x}{x \operatorname{sen} 2x}$.

Resp.: $4/\pi$.

36.- Resolver $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

Resp.: π.

37.- Resolver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$.

Resp.: $-1/2$.

38.- Resolver $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x}{x+1/\sqrt{x}}$.

Resp.: 0.

39.- Resolver $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

Resp.: 0.

40.- Resolver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Resp.: $1/2$.

41.- Resolver $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)$.

Resp.: $2a$.

42.- Resolver $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{\ln x^n-\ln a^n}$.

Resp.: a^n.

43.- Resolver $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-\operatorname{sen} x}$.

Resp.: ∞.

44.- Resolver $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Resp.: 1/2.

45.- Resolver $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x$.

Resp.: $e^{-2/\pi}$.

46.- Resolver $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

Resp.: 0.

Sugerencia: Calcular $\ln L$ y hacer el cambio de variable $\ln x = t$.

47.- Resolver $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Resp.: -1.