

IMÁGENES PARADÓJICAS: ¿ILUSIÓN O REALIDAD?

MARTA MACHO STADLER (*)

"Paradoxes have played a dramatic part in intellectual history, often foreshadowing revolutionary developments in science, mathematics, and logic. Whenever, in any discipline, we discover a problem that cannot be solved within the conceptual framework that supposedly should apply, we experience shock. The shock may compel us to discard the old framework and adopt a new one. It is to this process of intellectual molting that we owe the birth of many of the major ideas in mathematics and science".

Anatol Rapoport, *Escape from Paradox*, Scientific American 217, 50-56, 1967.

En este escrito, se dan algunos ejemplos de imágenes paradójicas que aparecen en disciplinas tan dispares como la Psiquiatría, el Arte o las Matemáticas.

1. PARADOJAS VISUALES

Las paradojas visuales pueden deberse a diversas razones: imágenes intencionadamente engañosas, defectos en la percepción humana, etc.

A continuación, aparece una pequeña selección de algunas de ellas, utilizadas por psiquiatras, magos, ilustradores o artistas.

1.1. PARADOJAS DE LA PERSPECTIVA

The Magpie on the Gallows (1754) es una obra del artista británico William Hogarth: el cuadro contiene más de 20 errores de la perspectiva, de los que se destacan dos de ellos.



(*) Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. Facultad de Ciencia y Tecnología Departamento de Matemáticas.

En los siguientes ejemplos, las líneas trazadas provocan distorsiones en la percepción.



Paradoja de la perspectiva ascendente
¿Son todos los soldados del mismo tamaño?



Imagen de una caja de tabaco, 1926
¿El vencedor es más alto que el vencido?

1.2. DESAPARICIONES GEOMÉTRICAS

1.2.1. En la paradoja del *huevo que desaparece*, realizando los cortes como se indica en la figura (uno horizontal y dos verticales), se obtienen cuatro trozos que pueden redistribuirse hasta obtener seis, siete, ocho, diez, once o doce huevos. ¿Cuál es el motivo?

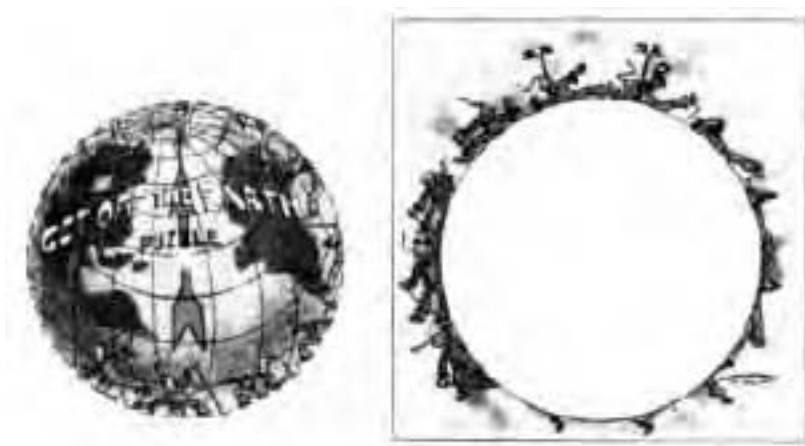


Recombinación de 8 huevos

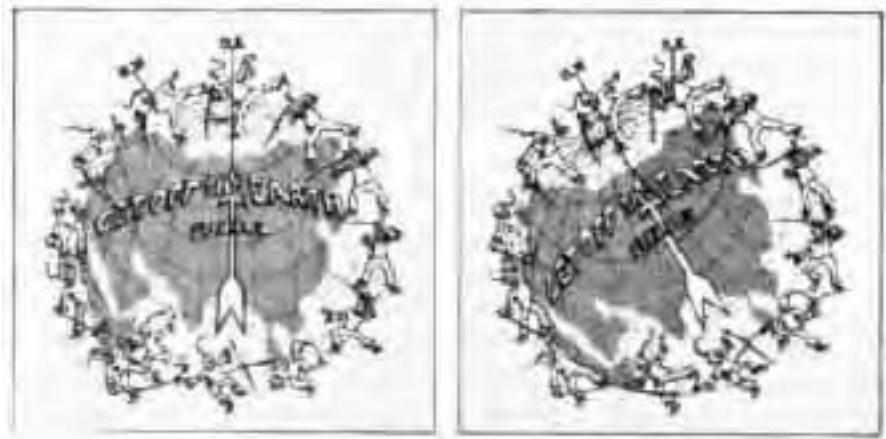


Recombinación de 10 huevos

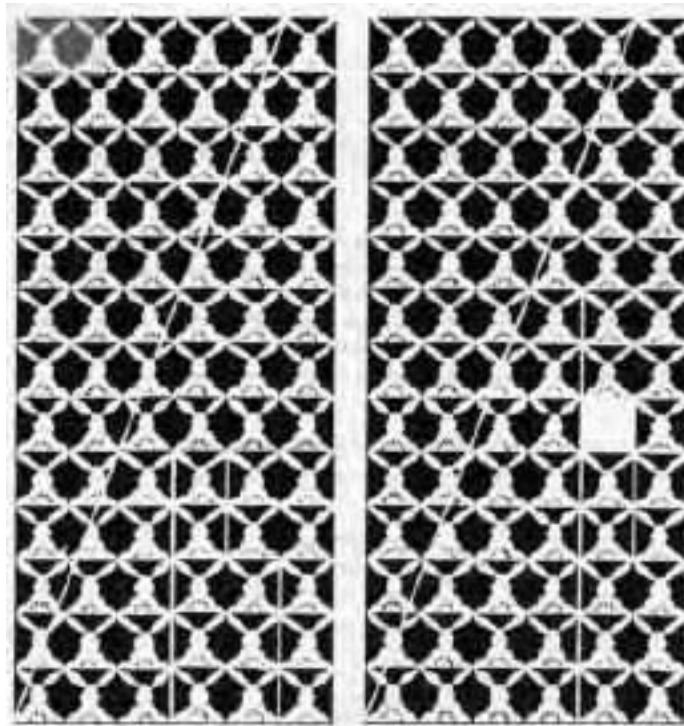
1.2.2. El puzzle *Abandone la tierra* aparece en el libro [7] de Sam Loyd.



El rompecabezas consiste en dos trozos: se clava el círculo de la izquierda por su centro (con una chincheta o similar, que permita posteriormente girar la pieza) sobre el círculo vacío de la derecha, y entonces, si se hace girar ese círculo, cuando la flecha apunta hacia el norte, aparecen 13 guerreros chinos, y si lo hace hacia el noroeste ¡no quedan más que 12! ¿Dónde ha quedado el guerrero que falta?



1.2.3. Esta divertida *paradoja del conejo* se debe al matemático y mago Paul Curry.



El primer rectángulo consta de 78 casetas, cada una de las cuales contiene un conejo. Si se corta este rectángulo siguiendo las líneas indicadas, y se redistribuyen como en la figura de la derecha, se obtiene un nuevo rectángulo con el mismo número de casetas... pero

¡sólo con 77 conejos!

Aquí no hay "ni trampa ni cartón", ¿qué ha sucedido entonces?

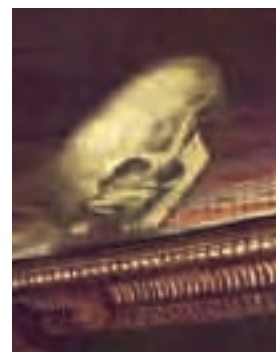
1.3. ANAMORFOSIS

Una *anamorfosis* es una imagen perturbada de un objeto que se percibe cuando es observado de manera "no convencional".

Por ejemplo, en las *anamorfosis oblicuas*, se construye una imagen proyectada sobre un plano oblicuo, de manera que simula una figura bien diferente (incluso sin sentido) si no se mira desde el punto de vista excéntrico adoptado para la proyección. Un ejemplo de este tipo de anamorfosis es el cuadro *Los embajadores* (1533), la obra más célebre de Holbein el joven. El cuadro representa a Jean de Dintevile y Georges de Selve, miembros de la embajada francesa enviada para intentar reconciliar al papa Clemente VII y al rey Enrique VIII, tras haber anulado éste su matrimonio con Catalina de Aragón (al no haber nacido de su unión ningún varón) y haber esposado en secreto a Ana Bolena.



En primer plano, entre los dos embajadores, se observa un objeto misterioso: un cráneo estirado. Holbein produce este efecto por medio de una *anamorfosis oblicua*: la imagen se muestra tal y cómo es cuando uno se coloca en el lado lateral del cuadro para mirarlo oblicuamente.



La incorporación de este cráneo se interpreta a veces como *la muerte de la dinastía, al no nacer un heredero varón*.

Otro tipo de anamorfosis son las *catóptricas*, en las que la imagen debe verse reflejada en un espejo distorsionado (cilíndrico, cónico, piramidal, etc.), para recuperar su verdadera apariencia. Un ejemplo de anamorfosis *cilíndrica* del libro [8] es *Un hombre gordo que lleva su estómago sobre una carretilla*, donde se observa claramente la imagen deformada, que cobra sentido al reflejarse sobre el espejo.



La siguiente obra del diseñador gráfico István Orosz se titula *Man on stair*. Debajo aparecen tres imágenes de la obra vista desde diferentes ángulos: los dos primeros descubren una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada...



... sólo la figura final resuelve la anamorfosis.



Los diseños anamórficos se utilizan asimismo en la señalización de nuestras carreteras. En el ejemplo de debajo, el tamaño de la flecha parece el mismo que el de la palabra CAR debajo de ella. Pero, de hecho, la flecha es más del doble de larga que la palabra: así, los conductores perciben mejor las marcas sobre el asfalto.



1.4. FIGURAS AMBIGUAS

A continuación, se dan varios ejemplos de imágenes ambiguas.



Roger N. Shepard, profesor de psicología, y su ilusión de figura y fondo *Sara Nader*.



Sandro del Prete afirma "Todo lo que vemos puede verse de otra manera".



El artista Peter Brookes es el creador de esta figura con superposiciones: al mirar de cerca se ve el ratón y de lejos aparece el gato...



En esta caja de cerillas están representados 12 elefantes, con sólo 6 cabezas (aparte del elefante central).



Muchos carteles contienen figuras ambiguas, con intenciones críticas o reivindicativas. Gillam creó esta portada del Magazine Judge 26 (1894): es un cartel en contra los aranceles; en su base se lee "Death to our industries. That is what Cleveland-Wilson conspiracy means".

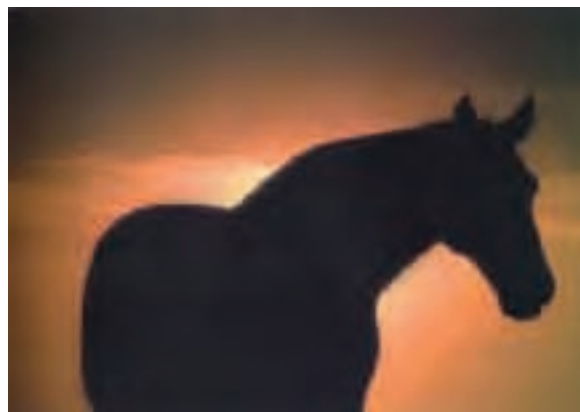
1.5. AMBIGRAMAS

Scott Kim es un famoso creador de ambigramas, es decir, letras, palabras o números que son ambiguos. Algunos de ellos son imágenes reflejadas en un espejo, otras pueden leerse en sentido inverso, otras poseen dos significados contenidos en la misma palabra, etc.

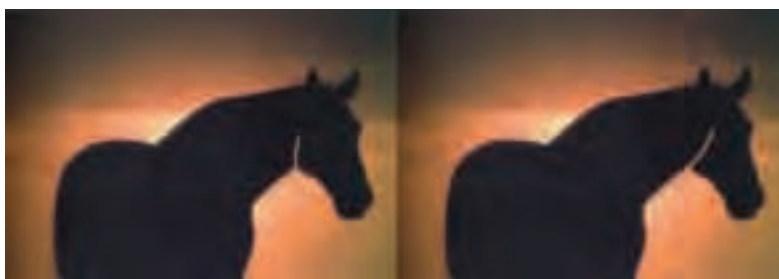


1.6. ILUSIÓN FOTOGRÁFICA

La imagen contigua es una ilusión fotográfica debida al artista Jerry Downs ¿Hacia que lado mira el caballo?

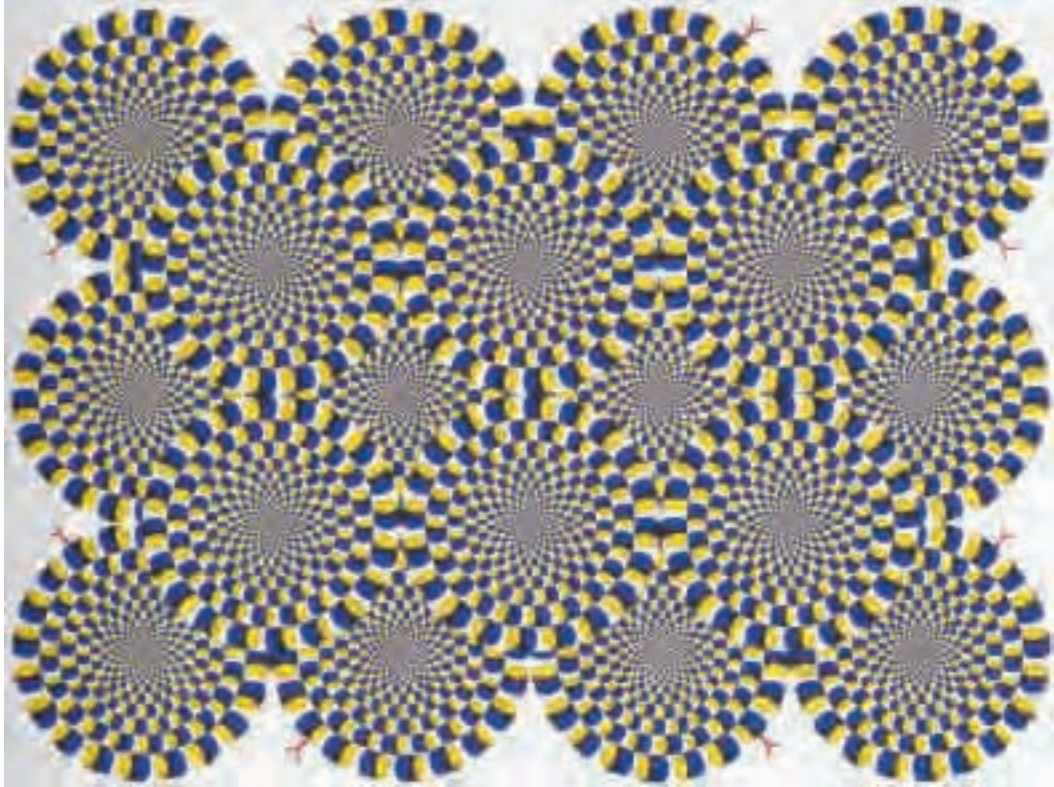


Debajo se indican las dos posibilidades, con ayuda de una línea que ayuda a visualizar la dirección.

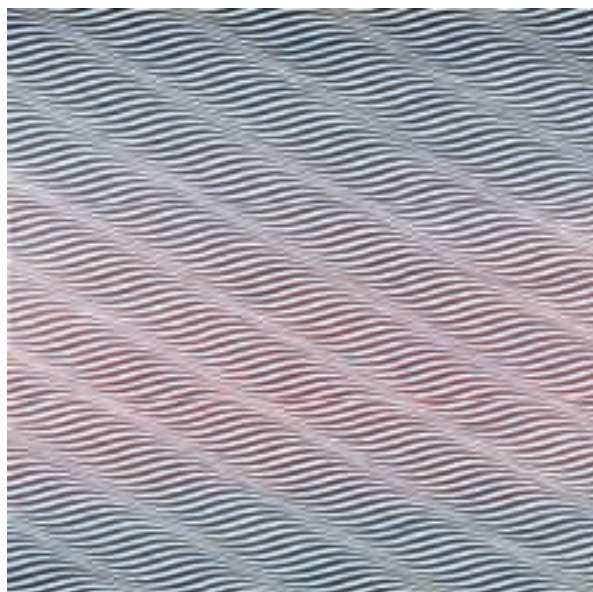


1.7 Ilusiones ópticas

Las siguientes ilusiones ópticas se deben a problemas de percepción del ojo y cerebro humanos. En esta ilusión óptica del psicólogo Akiyoshi Kitaoka se titula *Serpientes rotando*, ... pero es una imagen estática.



Catarata (1967) de Bridget Riley (Op Art), parece moverse



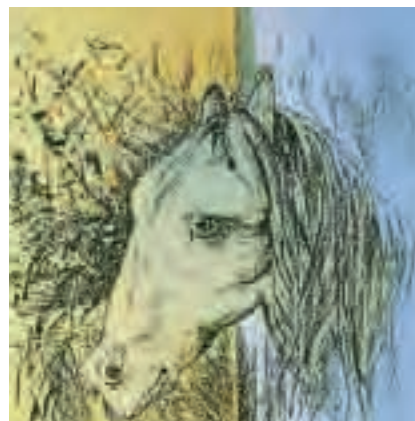
1.8. FIGURAS imposibles

En los siguientes dibujos del físico y escultor Guido Moretti se ven tres planos diferentes ¡de la misma figura!



1.9. FIGURAS REVERSIBLES

Esta imagen de Sergio Buratto ¿es un sapo o ... un caballo?



En el libro *Topsy and turvys*, Peter Newell dibujó entre otros *Hombre saliendo del agua o... ahogándose* (figura que aparece al invertir la imagen previa).



El artista japonés Shigeo Fukuda es un maestro de la ilusión y la ambigüedad, crea esculturas que parecen un completo caos, y miradas desde otros ángulos, el aparente desorden se transforma en perfección.

En su obra en madera *Encore*, de frente aparece un pianista. Si se va girando la figura, en cierto punto aparece una combinación extraña, y finalmente se aprecia al violinista.



El artista Rex Whistler realizó el siguiente dibujo para una campaña publicitaria de la compañía Shell:

¿Sherlock Holmes o ... Robin Hood?



Gustave Verbeek publicó una serie de comics *reversibles* en el Sunday New York Herald, a principios de 1900. La primera parte del comic se lee de manera normal, y cuando se le gira 180 grados, la historia continúa... Debajo aparece parte de *Little lady Lovekins and Old man Muffaroo: the Thrilling Adventure of the Dragon* ... faltaría girarla para ver aparecer la otra historia escondida.



1.10. LAS PARADOJAS EN EL ARTE

Salvador Dalí es uno de los mayores representantes del surrealismo. El genial artista encontró una postal de una playa y varios indígenas sentados, y al verla verticalmente vio un rostro, que en un primer impulso creyó realizado por Picasso. Cuando comprobó que era sólo producto de su imaginación, reprodujo el efecto en *Rostro paranoico: la tarjeta postal transformada en Picasso*.



René Magritte, fundador del surrealismo belga, dijo que "El arte de pintar tiene como objetivo hacer que el funcionamiento de la mirada sea perfecto".

Su *Carte Blanche* es un magnífico ejemplo de imagen paradójica.



Octavio Ocampo es uno de los pintores mexicanos más conocidos. En *Las visiones del Quijote* combina la fantasía y la realidad para producir un efecto impresionante.



2. ALGUNAS PARADOJAS TOPOLÓGICAS

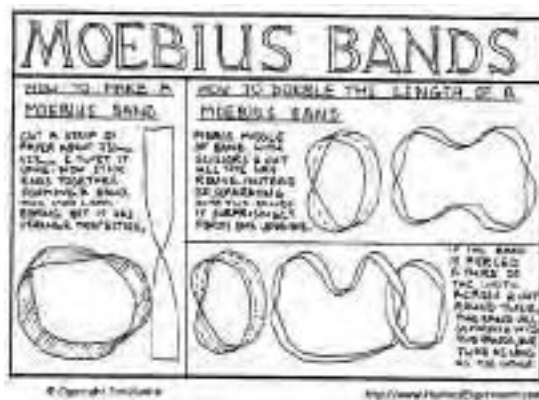
2.1. LA BANDA DE MÖBIUS

Un cilindro se construye al identificar dos de los lados opuestos de un cuadrado: es una superficie con dos caras, dos bordes y orientable. La banda de Möbius se obtiene al identificar dos lados opuestos de un cuadrado, pero girando previamente uno de ellos, como se muestra en el dibujo de Tim Hunkin (más adelante): es una superficie con *una* única cara, *un* solo borde y *no orientable*.



Se pueden realizar algunos experimentos con la banda de Möbius, que dan lugar a resultados paradójicos:

- Si se corta la banda por su mitad, aparece una cinta el doble de larga, que contiene 4 giros (como los indicados antes), dos caras y dos bordes: es un cilindro;
- Si se corta la banda de Möbius a la altura 1/3, se obtiene una banda de Möbius y un cilindro el doble de largo, ambos entrelazados.



© Tim Hunkin, <http://www.timhunkin.com/>

La banda de Möbius ha inspirado a artistas y científicos, como muestran los ejemplos que siguen.



El dibujante e ilustrador Jean Giraud Möbius y su autocaricatura, portada del libro *Mi doble y yo*.



Las hormigas de Escher

Debajo aparecen las bufandas de Möbius de Elisabeth Zimmermann



Los artistas Gabe Evens Quartet tienen su disco *Möbius*.



Esta escultura aparece en una fábrica de construcciones metálicas en Suiza. *Bigen ist eine Kunst* (doblar es un arte).



Banda de Möbius de LEGO de Andrew Lipson.



Una variante de la banda de Möbius es este juego de niños diseñado por Gerald Harnett: el *Möbius Climber Lands* consiste en 64 triángulos enlazados y montados de manera que, en cada punto, se observa la estructura torcida. Está situado en el *Sugar Sand Science Playground*, parque de la Ciencia situado en Boca Ratón (Florida) y fue creado con ayuda del programa *Mathematica*.

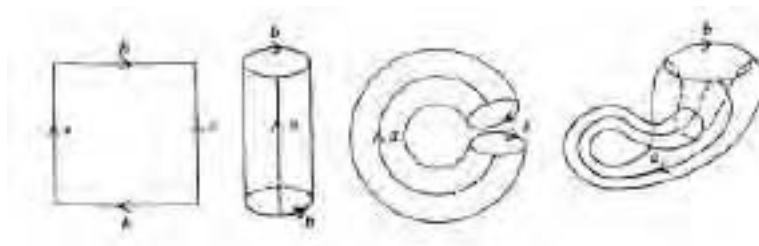


La figura *Möbius mit Kriecher*, de Rainer Wonisch está realizada con el programa POV-Ray (persistence of vision ray tracer) que es un trazador de rayos (método para generar imágenes foto-realistas mediante un ordenador) libre, desarrollado por un grupo de programadores, llamado el POV-Team.



2.2. LA BOTELLA DE KLEIN

La *botella de Klein* es una superficie obtenida al identificar los lados de un cuadrado como muestra la figura:



Esta figura no puede construirse en el espacio de dimensión tres sin auto-intersecarse, pero si que está contenida en el espacio de dimensión cuatro.

La botella de Klein presenta varias propiedades paradójicas: posee un solo lado (no tiene cara interior ni cara exterior) y no tiene borde: de hecho, puede obtenerse pegando dos bandas de Möbius a lo largo de sus bordes, y por ello hereda sus extrañas propiedades.

La botella de Klein ha servido de modelo para muchas construcciones extraordinarias, como muestran las imágenes que aparecen a continuación:

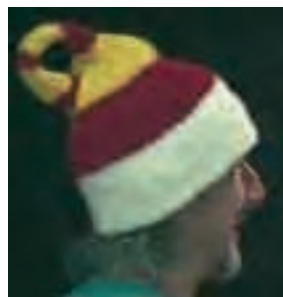


La botella de Klein de *LEGO* de Andrew Lipson



La botella de Klein de *origami* de Robert Lang

Debajo aparecen algunas botellas de Klein de Cliff Stoll de la *Acme Klein Bottle*



BIBLIOGRAFÍA

- [1] **J. Baltrusaitis**, 1996: *Anamorphoses: les perspectives dépravées II*, Flammarion.
- [2] **J.R. Block**, 2002: *Seeing Double*, Routledge.
- [3] **N. Falleta**, 1983: *Paradoxicon*, Doubleday and Co.
- [4] **M. Gooding and J. Rothenstein**, 2000: *The Playful eye*, Chronicle Books.
- [5] **S. Kim**, 1996: *Inversions: a catalog of calligraphic cartwheels*, Key Curriculum Press.
- [6] **F. Leeman**, 1975: *Hidden images. Games of perception. Anamorphic art. Illusion*, Harry N. Abrahams.
- [7] **S. Loyd**, 1914: *Cyclopedia of 5000 puzzles, tricks and conundrums (with answers)*, Lamb. Publis. Co.
- [8] **McLoughlin Bros.**, 1979: *The Magic mirror. An antique optical toy*, Dover.
- [9] **S. Moretti**, 2004: *La "terza via" alla scultura. The "third way" to sculpture*, Comunicare Ed.
- [10] **P. Newell**, 1988: *Topsys and Turvys*, Charles E. Tuttle Co.
- [11] **P. Newell**, 1988: *Topsys and Turvys-number 2*, Charles E. Tuttle Co.
- [12] **J. Ninio**, 2001: *The science of illusions*, Cornell Univ. Press.
- [13] **J. Rothenstein and M. Gooding**, 2000: *The playful eye: an album of visual delight*, Chronicle Books.
- [14] **A. Seckel**, 2002: *La mirada fantástica*, Onlybook.
- [15] **A. Seckel**, 2002: *El ojo habla*, Onlybook.
- [16] **A. Seckel**, 2004: *Masters of Deception: Escher, Dalí & the Artists of Optical Illusion*, Sterling Publishing Co.
- [17] **R.N. Shepard**, 1990: *Mind sights*, Freeman.

ENLACES A PÁGINAS WEB

Los enlaces están ordenados por orden de aparición de cada concepto en el texto, para facilitar la búsqueda.

William Hogarth, <http://www.haleysteele.com/hogarth/>

The Hogarth archive, <http://www.lamp.ac.uk/hogarth/>

Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks, and Conundrums (with answers), <http://www.mathpuzzle.com/loyd/>

Art of Anamorphosis, <http://www.anamorphosis.com/>

Art of Anamorphosis (shown at the Arts Centre Washington, Tyne & Wear), <http://myweb.tiscali.co.uk/artofanamorphosis/exhibition/index.html>

Anamorphic art, <http://nth.s.newtrier.k12.il.us/academics/math/Connections/perception/anamorph.htm>

Anamorphic Art, <http://www.counton.org/explorer/anamorphic/cylmirror.html>

The Anamorphic Art of Kelly M. Houle, http://www.kellymhoule.com/anamorphic_art_frameset.htm

- Anamorphic photographs**, <http://www.physics.uoguelph.ca/morph/main.html>
- István Orosz**, <http://www.geocities.com/SoHo/Museum/8716/>
- Los Embajadores de Holbein**,
<http://www.math.nus.edu.sg/%7Emathelmr/teaching/holbein.html>
- Ilusiones ópticas**, <http://www.psicoactiva.com/ilusion.htm>
- Amazing Art: Illusions, hidden and impossible images**,
<http://members.lycos.nl/amazingart/>
- Masters of Deception (entrevistas, fotos y videos), del libro Masters of Deception: Escher, Dalí and the Artists of Optical Illusion, Sterling Publishing Co., 2004**,
<http://neuro.caltech.edu/~seckel/mod/>
- Un mondo di illusioni Ottiche**, <http://www.illuweb.it/>
- Unmögliche Konstruktionen und andere optische Illusionen**,
<http://www.kayestler.de/illusions/>
- Roger Shepard**, <http://www.rr0.org/ShepardRogerN.html>
- Sandro del Prete**,
http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/html/art_of_sandro_del_prete.html
- Gef's ambigram gallery**, <http://www2.iap.fr/users/esposito/ambigallery.html>
- Scott Kim**, <http://www.scottkim.com/>
- Akiyoshi Kitaoka**, <http://www.ritsumeai.ac.jp/~akitaoka/index-e.html>
- Bridget Riley**, <http://www.artguide.org/uk/AG.pl?Action=281047A&Axis=904980055P>
- Guido Moretti**, http://www.guidomoretti.it/S_terzavia.htm
- Shigeo Fukuda**, <http://members.aol.com/webcarlos2/Optical/Artists/Fukuda.htm>
- Meter Newell**, <http://wwar.com/masters/n/newell-peter.html>
- Gustave Verbeck**, http://cartoons.osu.edu/newspaper_artists/verbeck/verbeck.html
- Gustave Verbeck**, <http://www.lambiek.net/verbeck.htm>
- Rex Whistler**, <http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html>
- Salvador Dalí**, <http://www.salvador-dali.org/esp/>
- René Magritte**, <http://www.magritte.com/>
- Octavio Ocampo**,
http://www.visionsfineart.com/Merchant2/merchant.mv?Screen=CTGY&Store_Code=VFAG&Category_Code=oo
- Homemade Topological Shapes**, <http://web.meson.org/topology/>
- Andrew Lipson's LEGO® Page**,
<http://web.archive.org/web/20040211064801/www.lipsons.pwp.blueyonder.co.uk/lego.htm>
- Jean Giraud**, <http://www.bpib.com/illustrat/giraud.htm>
- Banda de Möbius en movimiento (short looping animation by Vlad Holst of the endless cycle of reincarnation)**, <http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/strip.mov>

How to Knit a Möbius Strip, <http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/jbknitmobius.htm>

Crocheted Möbius scarf instructions,
<http://home.att.net/~susanBinKC/patterns/mobius.html>

Rainer Wonisch, http://www.rainerwonisch.de/mathematik_und_kunst_mit_povray.htm

Acme Klein Bottles, <http://www.kleinbottle.com/classicklein.htm>

Instrucciones para hacer una botella de Klein,
<http://www.math.gatech.edu/~berglund/OneSided/KBHat.pdf>