



ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología



eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco **Euskal Herriko Unibertsitatea**

FISIKA KUANTIKA

8 Gaia

Bi partikulen spin osoaren autofuntzioak

1. Bi elektroien spin osoa nulua izanik, zein da $\hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y}$ eragilearen batezbesteko balioa?

2. Egin bedi, $\{H, S^2, S_z\}$ behagarrien aldibereko autoegoerek osatzen duten oinarriarekiko, dimentsio bakarreko oszilatzaile harmonikoarena bezalako potentzialaren eraginpeko bi Z^0 bosoik osaturiko (Z^0, Z^0) bikotearen oinarritzko egoeren eta lehen egoera kitzikatuen azterketa.

3. Bi elektroien spin-egoera zehazten duen Hamiltondarra ondorengoa da:

$$\hat{H} = -\alpha \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \beta (\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z})^2,$$

non α eta β konstante positiboak eta errealak diren. Zenbat balio du oinarritzko egoeraren energia? Honetarako kontutan izan $\alpha \gg \beta$ dela.

4. Elektroia eta positroiaren arteko egoera lotuak positronioak deitzen dira. Sistemaren $1s$ egoera bakarrik kontutan hartuz eta $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ eremu magnetikoaren barruan egonik, positronioari dagokion Hamiltondar efektiboa ondorengo eran adieraz dezakegu:

$$\hat{H} = E_0 + D \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \frac{2\mu_B B}{\hbar} (\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}),$$

non E_0 eta D konstanteak diren, eta $\mathbf{S}_1$ eta $\mathbf{S}_2$ elektroiaren eta positroiaren spinak, hurrenez hurren.

- Kalkula ezazu aurreko Hamiltondarraren autofuntzioak eta autobalioak eremu magnetikorik ez dagoenean ($B = 0$).
- $B \neq 0$ izanik, zein da energia baxuena duen aurreko autofuntzioari dagokion Hamiltondarraren batezbestekoa?

5. Bi protoi L zabalera duen dimentsio bakarreko potentzial-osin infinituan daude. Bi protoien arteko elkarrekintza perturbatiboki azter dezakegu, eta ondorengo adierazpena du:

$$\hat{H}_{\text{int}} = V_0 L \delta(x_1 - x_2) + J \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2,$$

non V_0 eta J positiboak diren. Zein da bete behar den erlazioa bai oinarrizko eta lehenengo egoera kitzikatuaren spin egoera singletea izan dadin?

6. Bi positroi L zabalera duen dimentsio bakarreko potentzial osin infinituan daude. Bi positroien arteko alderapena perturbatiboki azter dezakegu, eta ondorengo adierazpena du:

$$\hat{H}_{\text{int}} = V_0 L \delta(x_1 - x_2)$$

Kalkula ezazu sistemaren bigarren egoera kitzikatuaren (hirugarren energia-maila) energiaren adierazpena (V_0 -ren lehenengo ordenean).

7. Demagun $s_1 = s_2 = 1$ spin-eko partikulek osaturiko sistemaren hamiltondarra hauxe dela: $H = A \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$, $A > 0$ izanik.

- Lor bitez H Hamiltondarraren energiak eta endekapenak. Egin bedi energia-mailen eskema.
- Idatz bitez H hamiltondarraren autoegoerak, S_{1z} eta S_{2z} eragileen al-dibereko autoegoeren konbinazio linealaz.

8. $j_1 = 1$ eta $j_2 = 1/2$ momentu angeluar osoaren zenbaki kuantikoak dituen bereizgarriak diren bi partikulen Hamiltondarra ondorengo da:

$$\hat{H} = A \hat{\mathbf{J}}_1 \cdot \hat{\mathbf{J}}_2,$$

non A konstante bat den. Hasierako aldiunean neurtutako $\hat{J}_{1z}$ eta $\hat{J}_{2z}$, 0 eta $\hbar/2$ dira, hurrenez hurren. Zein da edozein t aldiunetan izango genukeen $\langle \hat{J}_{1z} \rangle (t)$.

9. Izan bedi $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ momentu angeluarra, $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = 0$ izanik. Froga bedi, $\mathbf{J}_\pm$ eragileak erabiliz, $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$ eragilearen itxarotako balioak m zenbaki kuantikoarekiko menpekotasunik ez duela. Ondoren, froga bedi $|j_1 j_2 j m\rangle$ egoera $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_1$ eta $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_2$ eragileen autoegoera dela, eta autobalioak lortu.

10. Hidrogeno atomoan protoia eta elektroiaren spinen arteko akoplamendua (akoplamendu hipermehea) kontutan hartzen duen Hamiltondarra ondorengo dugu:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \alpha \hat{\mathbf{S}}_e \cdot \hat{\mathbf{S}}_p,$$

non $\alpha > 0$ den eta $\hat{H}_0$ hidrogeno atomoa deskribatzen duen ohiko Hamiltondarra:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

- Sistema $|n = 3, l = m_l = 1; m_s^{(e)} = 1/2, m_s^{(p)} = -1/2\rangle$ egoeran egonik $\mathbf{J}^2$ ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, $\mathbf{L}$ elektroiaren momentu angeluarra izanik eta $\mathbf{S} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p$ bi partikulen spin osoa) neurtzen badugu, zeintzuk dira lor ditzakegun balioak eta hauen probabilitateak?
- $\alpha = 100 \text{ meV}/\hbar^2$ izanik eta protoiaren masa infinitoa dela kontsideratuz, zein da sistemaren oinarritzko energiari dagokion **balioa (eV-etan adierazita)**?

11. Hidrogeno atomoan protoia eta elektroiaren spinen arteko akoplamendua (akoplamendu hipermehea) kontutan hartzen duen Hamiltondarra ondorengo da:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \alpha \hat{\mathbf{S}}_e \cdot \hat{\mathbf{S}}_p,$$

non α parametro bat den eta $\hat{H}_0$ hidrogeno atomoa deskribatzen duen ohiko Hamiltondarra:

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

- Zein da ondorengo bi egoeren arteko energia diferentzia: a) $n = 5$, $j = 3$, eta simetrikoa (espazioaren inbertsioarekiko); eta b) $n = 2$, $j = 0$, eta antisimetrikoa (espazioaren inbertsioarekiko)?
- Hasierako aldiune batean ($t = 0$) sistemaren egoera zehazten dituen zenbaki kuantikoak ondorengoak dira: $n = 4$, $l = 2$, $m_l = -1$ (aurreko hirurak elektroien higidura orbitalaren ohiko zenbaki kuantikoak izanik), $m_{S_x}^e = 1/2$ (elektroien $\hat{S}_x$ eragilearen zenbaki kuantikoa) eta $m_s^p = 1/2$ (protoien $\hat{S}_z$ eragilearen zenbaki kuantikoa). Zein da beste t aldiune batean sistemaren egoera berdina izateko probabilitatea?