

Análisis Matemático y Aplicaciones: Análisis Numérico

Francisco de la Hoz³, Carlos Gorria², Judith Rivas¹, Fernando Vadillo² y Luis Vega¹

J. Aguirre¹, M.A. Alejo¹, N. Arribalaga¹, I. Basabe¹, J.B. Bru^{1,4}, J. Duoandikoetxea¹, L. Escauriaza¹, M. Escobedo¹, L. Fanelli¹, A. García¹, A. Moyua¹, O. Oruetxebarria¹, F. Pezzotti¹, E. Seijo³ y M. Zubeldia¹

¹Dpto. Matemáticas; ²Dpto. Matemática Aplicada y Estadística e I.O.; ³Dpto. Matemática Aplicada; ⁴IKERBASQUE, Basque Foundation for Science.

Ecuaciones de Dirac no lineales

En [1] hemos considerado la ecuación de Dirac no lineal, con una, dos y tres variables espaciales:

$$\Psi_t = A_1 \Psi_x + A_2 \Psi_y + A_3 \Psi_z + i f(|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 - |\Psi_3|^2 - |\Psi_4|^2) B \Psi, \quad (1)$$

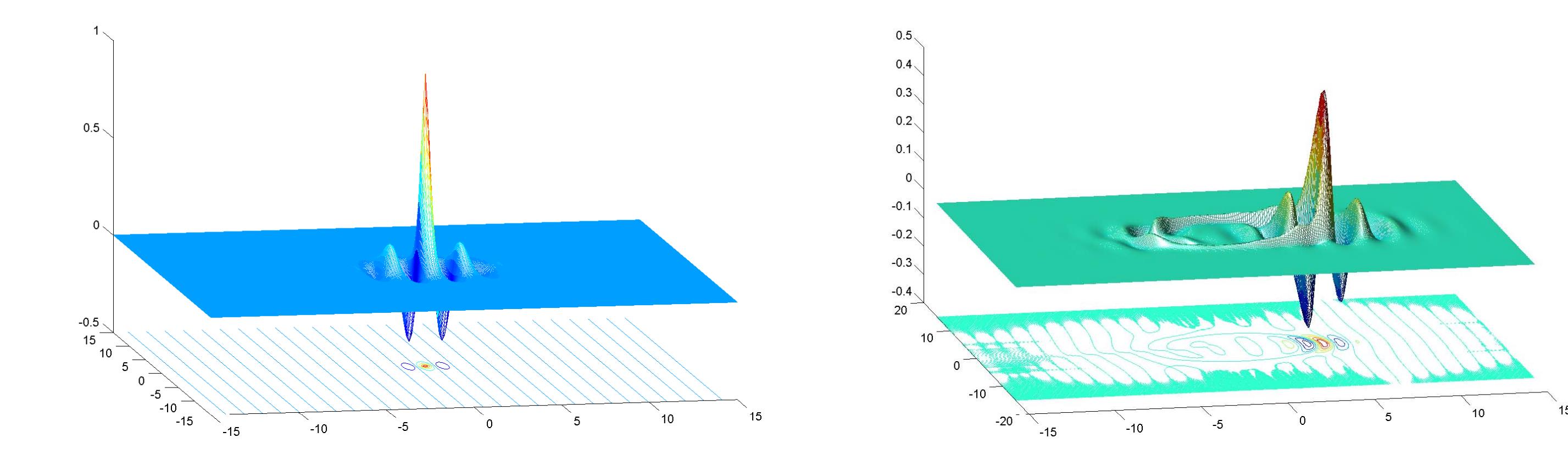
para $-\infty < x, y, z < +\infty$, $0 \leq t \leq T$, $\Psi \in \mathbb{C}^4$. A_j y B son matrices 4×4 :

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \quad B = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde σ_j son las matrices de Pauli y $f(s)$ es una función real de variable real s . Hemos considerado el caso importante $f(s) = m - 2\lambda s$, $m, \lambda \in \mathbb{R}$, donde λ es el parámetro no lineal; si $0 < \lambda \ll 1$, tenemos un problema débilmente no lineal.

La idea del factor integrante consiste en realizar un cambio de variable para resolver de manera exacta la parte lineal de la ecuación [3]. Tras calcular los respectivos factores integrantes para las ecuaciones no lineales de Dirac en dimensión uno, dos y tres, hemos discretizado los sistemas no lineales resultantes mediante un Runge-Kutta de orden cuatro.

La gráfica de la izquierda muestra el dato inicial para el caso bidimensional; se trata de un dromío [2]. La gráfica de la derecha corresponde al estado de dicho dromío en $t = 5$.

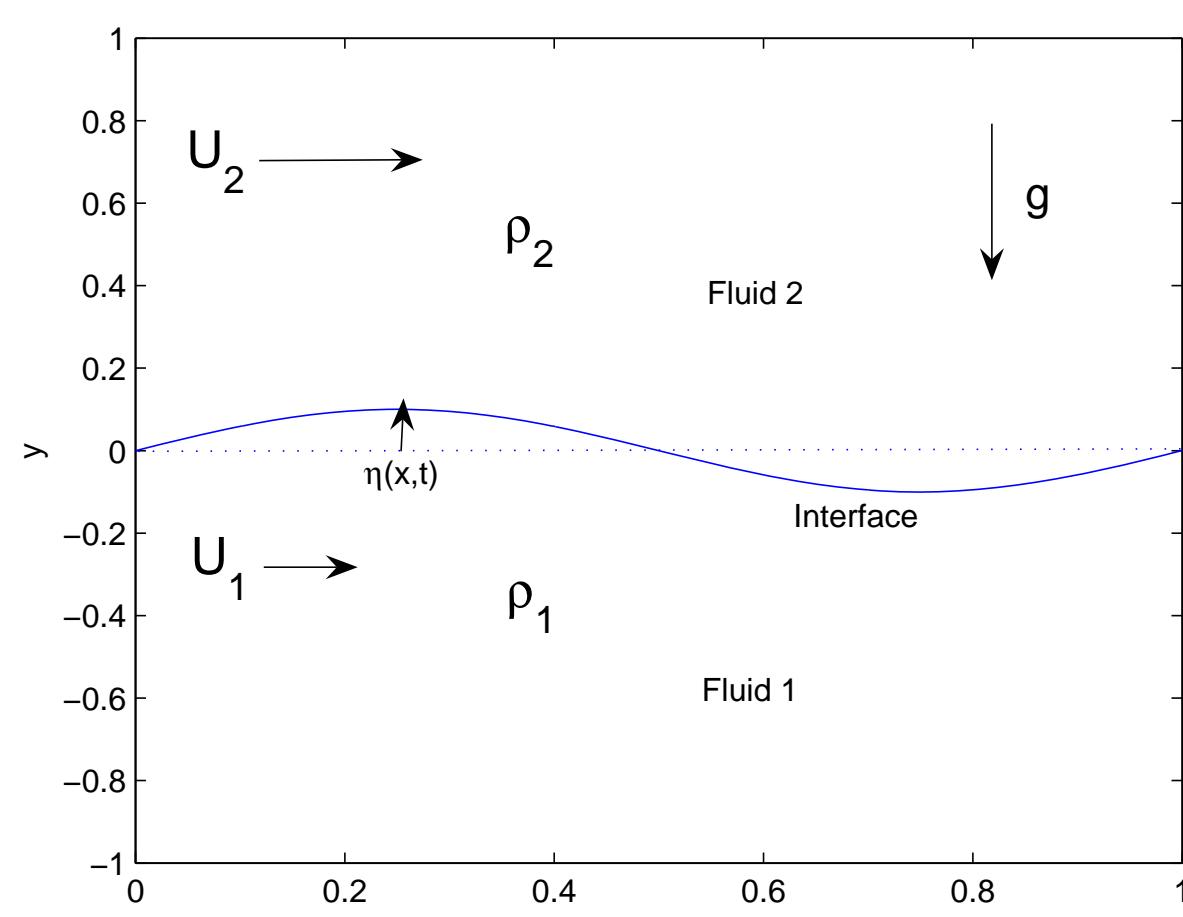


Bibliografía

- [1] F. de la Hoz, F. Vadillo, An Integrating Factor for Nonlinear Dirac Equations, *Computer Physics Communications*, accepted (2010).
- [2] A. Maccari, Chaos, solitons and fractals in the nonlinear Dirac equation, *Physics Letter A*, 336, 2005.
- [3] L. N. Trefethen, Spectral Methods in MATLAB, SIAM, 2000.

Singularidades en hidrodinámica

Uno de los problemas más importantes en hidrodinámica implica la evolución de una interfase entre dos fluidos infinitos, de densidades ρ_1 y ρ_2 , perfectos, incompresibles e irrotacionales en dos dimensiones bajo la acción de la gravedad g , siendo de particular interés la estructura de las diferentes singularidades que puede desarrollar dicha interfase.



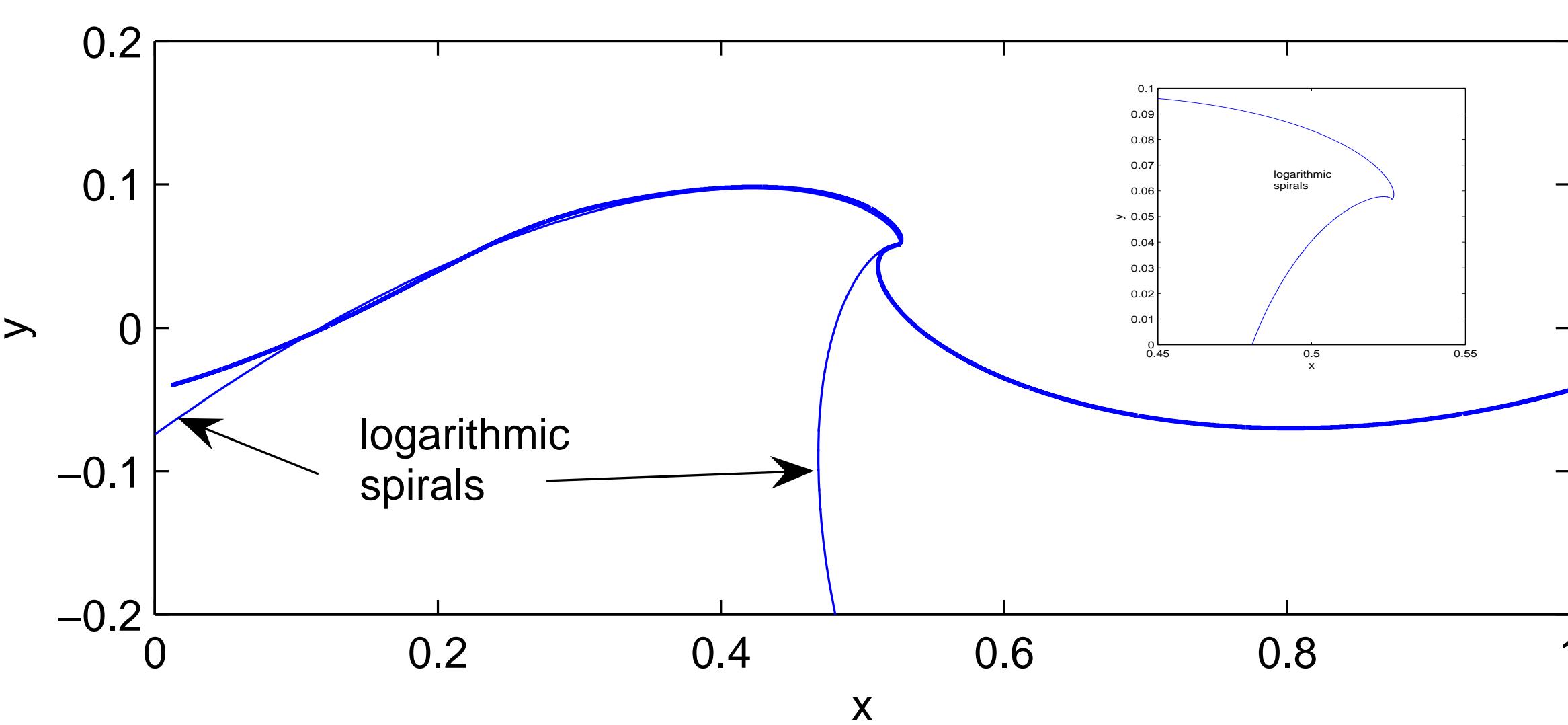
Clasificaremos las singularidades en función del número de Atwood, $A_\rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$:

- $A_\rho = -1 \Rightarrow$ Inestabilidad de Rayleigh-Taylor.
- $A_\rho = 0 \Rightarrow$ Hojas de vorticidad, inestabilidad de Helmholtz-Kelvin.
- $A_\rho = 1 \Rightarrow$ Problema de waterwaves, inestabilidad de Thomson.

Asimismo, también podemos estudiar el problema de waterwaves cuando $\rho_2 > 0$ y $0 < A_\rho < 1$; y la inestabilidad de Helmholtz-Kelvin cuando $\rho_1 > 0$ y $-1 < A_\rho < 0$. Los casos $A_\rho = 1$ y $A_\rho = -1$ corresponden respectivamente a los problemas clásicos de waterwaves y de Rayleigh-Taylor, pudiendo considerarse tensión superficial, o no.

En [1], hemos demostrado que tanto los problemas de Rayleigh-Taylor como los de waterwaves desarrollan singularidades de tipo Moore en la curvatura, cuando ambas densidades son no nulas.

Para el problema clásico de waterwaves, hemos propuesto y dado evidencia del desarrollo de una singularidad en forma de espiral logarítmica de dos brazos, como se muestra en la gráfica inferior, mientras que para el problema clásico de Rayleigh-Taylor, no hemos encontrado singularidades.



Bibliografía

- [1] M. A. Fontelos, F. de la Hoz, Singularities in water waves and the Rayleigh-Taylor problem, *Journal of Fluid Mechanics*, accepted (2009).

Proyectos

Análisis Isogeométrico

El Análisis Isogeométrico se introdujo en [1] con la intención de mejorar la conexión entre la simulación numérica y el Diseño Asistido por Ordenador (CAD). La idea fundamental del Análisis Isogeométrico consiste en utilizar directamente la geometría obtenida a través de CAD en términos de B-Splines o B-Splines racionales no uniformes (NURBS) y aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales mediante el mismo tipo de funciones.

Los beneficios clave de los métodos basados en NURBS son: representación exacta del dominio físico, utilización directa de los datos obtenidos de CAD, un aumento del ratio precisión / coste computacional.

Los esquemas de NURBS ya han comenzado a aparecer en la literatura relacionada con la ingeniería y algunos resultados preliminares muestran un futuro prometedor. Sin embargo, la teoría de aproximación del Análisis Isogeométrico basado en NURBS no está en absoluto desarrollada.

En [2] se da un primer paso en la obtención de estimaciones del error de aproximación para espacios de NURBS en dos dimensiones. Estas estimaciones son explícitas en los tres parámetros de discretización: diámetro del mallado, h , grado de los polinomios, p , y regularidad en los nodos, k , bajo la restricción $2k - 1 \leq p$. Por tanto, los casos de mayor regularidad, hasta $k = p$, siguen suponiendo un problema abierto.

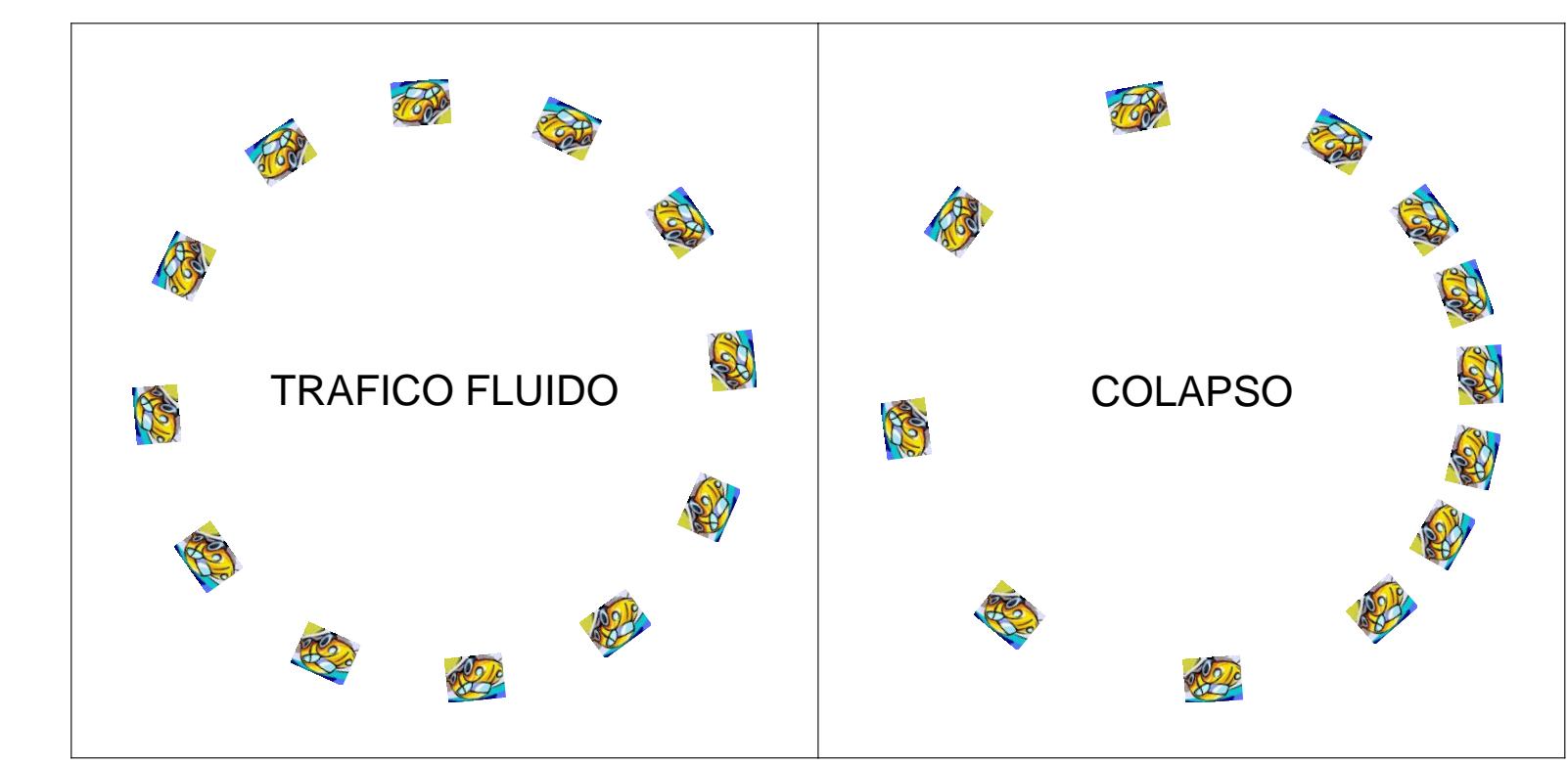
Por otro lado, en [3] se establecen las bases para la aproximación de campos vectoriales, con especial atención a los campos electromagnéticos. Se construyen espacios de Splines y operadores de proyección que satisfacen un diagrama de De Rham en dimensión 3. La regularidad de los B-Splines abre un camino hacia esquemas de discretización completamente nuevos para las ecuaciones de Maxwell, por ejemplo.

Bibliografía

- [1] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194 (2005), pp. 4135–4195.
- [2] L. Beirão da Veiga, A. Buffa, J. Rivas, and G. Sangalli, Some estimates for $h-p-k$ -refinement in Isogeometric Analysis *tech. report*, IMATI-CNR, 2009.
- [3] A. Buffa, J. Rivas, and G. Sangalli, R. Vazquéz, Isogeometric Analysis in Electromagnetism: theory and testing, *tech. report*, IMATI-CNR, 2010.

Modelo de tráfico: flujo / colapso

El flujo de tráfico de un grupo de vehículos, se puede modelizar mediante ecuaciones diferenciales [1]. El objetivo es calcular la velocidad que garantiza un flujo óptimo, evitando el colapso. Intervienen factores como la sensibilidad de reacción de los conductores, τ , y la distancia de seguridad, $h(t)$.



En el modelo simplificado anular de N vehículos, la posición angular del n -ésimo en el instante t es $x_n(t)$. La dinámica del movimiento [2] queda determinada por el sistema de segundo grado:

$$\tau \ddot{x}_n = -\dot{x}_n + F(x_{n+1} - x_n - h_n), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

La fuerza $F(\cdot) \approx \tanh(x)$ depende de la separación, $u_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$, de la distancia de seguridad, $h + h_n(t)$, de la velocidad, etc.

Solución de equilibrio: $h_n = h$ y los vehículos viajan equidistantes, $u_n(t) = d$, con velocidad, $v_0 = F(d - h)$. Linealizando alrededor del punto de equilibrio se obtiene el valor crítico [3], $\tau_c = 1/2F'(l)$.

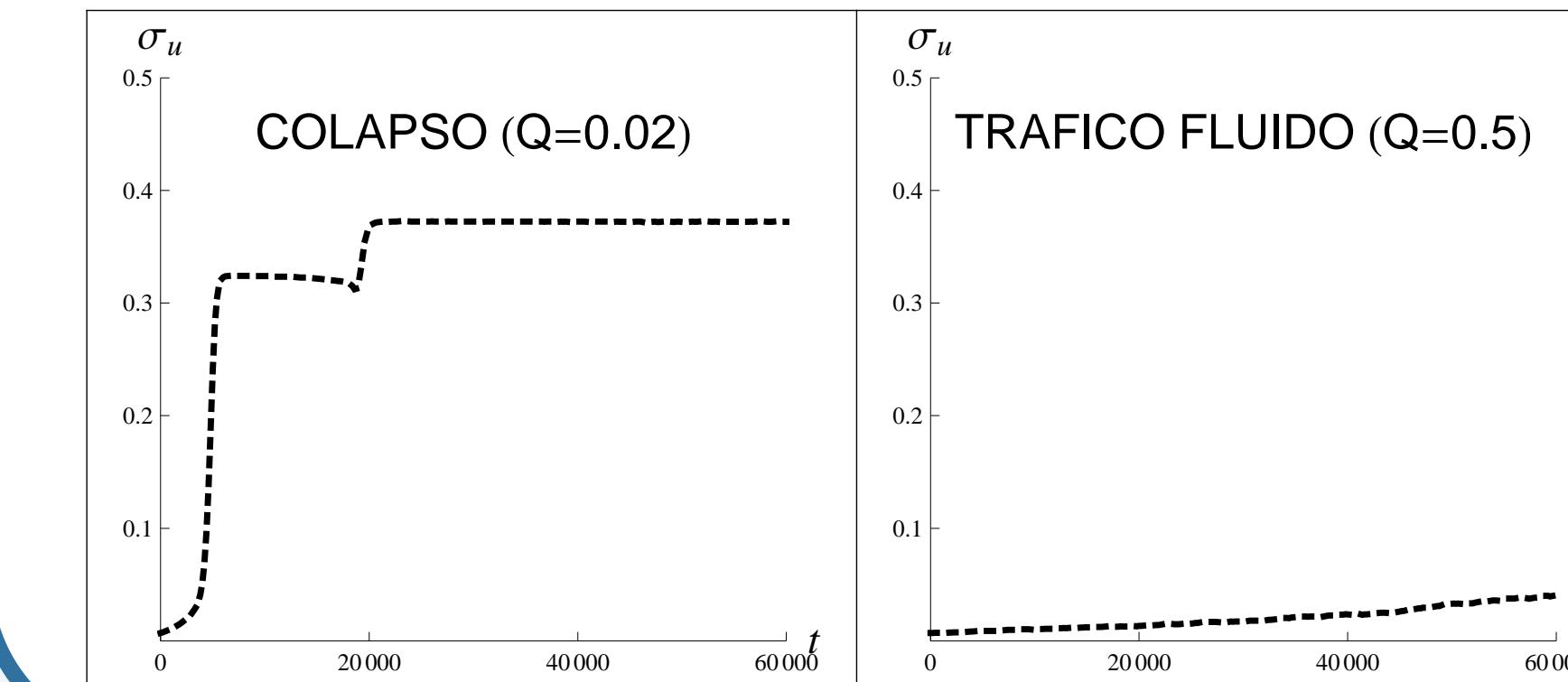
Modelo determinista $\tau < \tau_c \Rightarrow$ estable, flujo libre.
 $\tau \geq \tau_c \Rightarrow$ inestable, colapso.

Si hay componente estocástica $\langle \xi_n(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_n(t) \xi_j(s) \rangle = Q^2 \delta_{nj} \delta(t - s)$, el sistema para $u_n(t)$ es

$$\begin{cases} \ddot{u}_n = \frac{1}{\tau} (-\dot{u}_n + V(u_{n+1} - h_{n+1}(t)) - V(u_n - h_n(t))), & n = 1, \dots, N \\ \epsilon \dot{h}_n = h - h_n + f_n, & \theta \dot{f}_n = -f_n + \xi_n(t). \end{cases} \quad (4)$$

Se escribe el sistema de primer orden, $z'(t) = F(z, \xi)$, $z \in \mathbb{R}^{4N}$ con $u_n = z_n$, $u'_n = z_{n+n}$, $h_n = z_{2N+n}$ y $f_n = z_{3N+n}$, su aproximación $Z^{(k)} \approx z(k\Delta t)$ y se utiliza la regla del punto medio,

$$Z^{(k+1)} = Z^{(k)} + \Delta t F \left(\frac{Z^{(k)} + Z^{(k+1)}}{2} \right) + \sqrt{\Delta t} Q \nu^k, \quad \nu^k \in \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$



Parámetros: $N = 60$, $h = d = 1$, $\tau = 1.08 * \tau_0$ (inestable), intervalo temporal $0 \leq T \leq 6 \cdot 10^5$. Se concluye que la interacción de tipo estocástico ($Q = 0.5$) evita la formación de colapsos en el tráfico, que se reflejan en el crecimiento de $\sigma_u(t) = \text{varianza } (u_n(t) - d)$ muy por encima de 0.

Bibliografía

- [1] D.E. Wolf , M. Schreckenberg and A. Bachem. Traffic and Granular Flow. Singapore Word Sc. 1996
- [2] Yu. B. Gaididei, R. Berkemer, J.G. Caputo et al. Analytical solutions of jam pattern formation on a ring for a class of optimal velocity traffic models In *New Journal of Phys.*, 11 (2009)
- [3] Yu. B. Gaididei, R. Berkemer, C. Gorria et al. Complex spatiotemporal behavior in a chain of one-way nonlinearly coupled elements In *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S* (Accepted 2010)