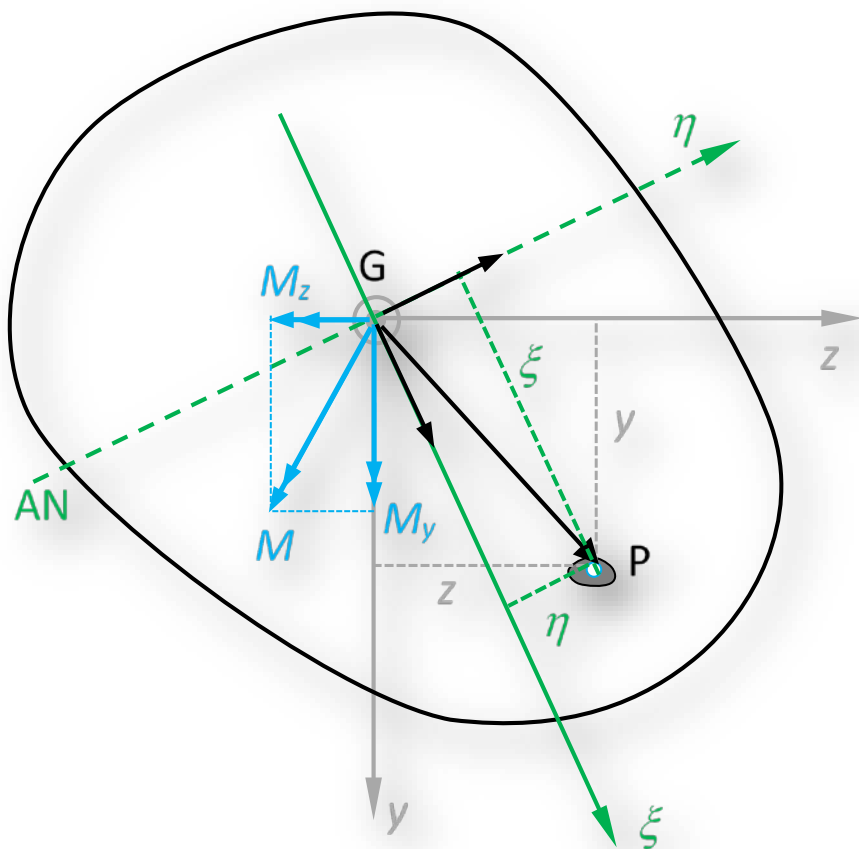




Ingeniaritza Mekanikoa Saila



Hitzaurrea

Liburu honen edukia Euskal Herriko Unibertsitateko (UPV/EHU) Ingeniaritza Mekanikoa Graduko *Elastikotasuna eta Materialen Erresistentzia* irakasgaiari dagokio. Irakasgai honetan Egituren Kalkuluko eta Diseinu Mekanikoko oinarri batzuk aztertzen dira. Bi atal nagusi ditu: alde batetik *Elastikotasunaren Teoria* eta bestetik *Materialen Erresistentzia*. Lehen atalean, gorputz deformagarrien deskripzio matematikoa egiten da eta hauek bete behar dituzten ekuazio orokorrak aztertzen dira. Sortzen den problema matematikoaren zailtasuna dela eta, bigarren atala osatzen duen *Materialen Erresistentzian* hipotesi sinplifikatzaileak erabiltzen dira, pieza prismatikoen geometria duten gorputzetan.

Lehenengo gaia irakasgaiaren deskribapena da eta ondoren Elastikotasunaren Teoriako lau gaiak datoz. Bigarren gaian *tentsioak* edo gainazal unitateko barne indarrak aztertzen dira. Tentsioa bektorea, tentsio tentsorea eta bere osagaiak jorratzen dira, beraiekin erlazionatutako autobalio eta autobektoreen problema ere barneratuz. Tentsio egoera laua, duen garrantziagatik, berezitatea aztertzen da eta Mohr-en zirkuluaren erabilpena azaltzen da.

Hirugarren gaian *deformazio unitarioak* aztertzen dira. Hauek, luzera aldaketa erlatiboak edo angelu zuzenen txikitzeak adierazten dituzte. Beren analisi matematikoa tentsioen kasuan garatutakoaren parekoa dela ikusten da, eta ondorioz bigarren gaian garatutako prozedura matematiko berak erabiliko dira deformazioen kasuan ere.

Laugarren gaian tentsioak eta deformazioak materialen ezaugarrien menpeko diren ekuazio linealen bidez erlazionatzen dira, gorputz isotropoen kasuan. Elastikotasun edo Young-en modulua eta Poisson-en koefizientea erabiliz, tentsioak eta deformazioak erlazona daitezke. Deformazio energia elastikoa ere gai honetan aztertzen da. Bostgarren gaian, aurrekoetan lortutako ekuazioak elkartzen dira, problema elastikoa eta bere zailtasun matematikoa deskribatzeko.

Seigarren gaian, pieza baten hutsegitea eragiten duten tentsio edo deformazio egoera determinatzeko irizpideak aztertzen dira. Hutsegitean piezaren haustura da material hauskorren kasuan eta isurpen plastikoa material harikorren kasuan. Zazpigarren gaian pieza prismatikoen sekzioetan tentsioek sortzen dituzten erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak aztertzen dira, sekzioko indar eta momentu deitzen direnak.

Sekzio indarrak indar normala eta ebakitzailan dira. Sekziko momentuak berriz, momentu makurtzailea eta momentu bihurtzailea dira. Gai honetan Solido Zurrunaren Estatikako ekuazioak erabiltzen dira bakarrik.

Zortzigarren gaian Materialen Erresistentzia hasten da, trakzioa eta konpresioa jasten duten pieza eta sistemak hipotesis sinplifikatzaileak erabiliz aztertzen baitira. Gai honetan, trakzioa eta konpresioa jasaten duten lodiera txikiko egiturak ere jorratzen dira. Bederatzigarren gaian, momentu makurtzaileak jasaten dituzten pieza prismatikoen tensio egoera aztertzen da, makurdura hiru kasutan sailkatuz: makurdura hutsa, makurdura bakuna eta makurdura konposatua. Makurdura hutsean, sekzioari momentu makurtzaileak bakarrik eragiten dio. Makurdura bakunean, momentu makurtzaileaz gain indar ebakitzailak ere eragiten dio eta makurdura konposatuan, indar normalak ere sekzioari eragiten dio.

Hamargarren gaian, pieza prismatikoen makurduran sortzen diren desplazamendu bertikalak eta sekzioek biratzen dituzten angeluak aztertzen dira. Hamaikagarren gaian, aurreko gaian erabilitako metodoak sistema hiperestatikoetan baldintzak ezartzeko eta horrela problemaren ezezagun guztiak determinatzeko erabiltzen dira. Hamabigarren gaian, bihurtura aztertzen da, lau sekzio mota barneratuz: zirkularra, laukizuzena, lodiera txikiko sekzio irikia eta lodiera txikiko sekzio itxia. Makurdurak eta bihurturak batera eragiten duteneko kasua ere aztertzen da.

Hamairugarren gaian deformazio energiarekin eta deformazio koenergiarekin erlazionatutako kalkuluak burutuko dira, Engesser-Castigliano-ren teorema erabiliz nagusiki. Honen bidez, aurreko gaietan kalkulaturako puntuen desplazamenduak eta angeluak, teorema bakarrarekin determinatu ahal izango dira eta sistema hiperestatikoetan, baldintza bezala erabili ahal izango da. Indar ebakitzailak makurdura bakuneko zurruntasunean duten eragina eta tenperaturak makudurako kasuetan izan dezakeen eragina aztertzeko ere erabilgarria da.

Hamalugarren gaian konpresioa jasaten duten pieza prismatikoen oreka egonkorra aztertzen da, oreka ezegonkorra edo gilbordura ekiditeko. Kasu honetan, problemaren analisisa egoera deformatuan egin behar da, karga kritikoa lortu ahal izateko. Bukatzeko, zutabe lerdunen konpresio eszentrikoa ere aztertzen da, hemen ere, piezaren konfigurazio deformatua erabiliz azterketarako.

Aurkibidea

1. IRAKASGAIAREN DESKRIBAPENA -----	1
1.1. SARRERA.....	1
1.2. ELASTIKOTASUNA.....	2
1.3. MATERIALEN ERRESISTENTZIA.....	3
2. TENTSIOAK -----	5
2.1. SARRERA.....	5
2.2. TENTSIO BEKTOREA ETA OSAGAIK.....	5
2.3. OREKA EKUAZIOAK.....	7
2.4. TENTSIO EGOERA OROKORRA.....	11
2.4.1 Tentsio tentsorea.....	11
2.4.2 Bektoreen eta tentsoreen transformazioa.....	13
2.4.3 Tentsio nagusiak.....	16
2.4.4 Osagai eskerikoa eta desbideratze osagaia.....	21
2.5. TENTSIO EGOERA LAUA.....	22
2.6. MOHR-EN ZIRKULUA.....	25
2.6.1 Tentsio egoera laua.....	25
2.6.2 Tentsio egoera orokorra.....	29
3. DEFORMAZIOAK -----	31
3.1. SARRERA.....	31
3.2. ELEMENTU DIFERENTZIALAREN DEFORMAZIOA.....	31
3.3. DEFORMAZIO UNITARIOAK.....	34
3.3.1 Deformazio unitario normalak.....	34
3.3.2 Deformazio unitario tangentialak.....	35
3.4. DEFORMAZIO ETA ERROTAZIO TENTSOREAK.....	37
3.5. DEFORMAZIO ETA ERROTAZIO BEKTOREAK.....	40
3.5.1 Errotazio bektorea.....	40
3.5.2 Deformazio bektorea.....	41
3.6. TENTSIOEN ETA DEFORMAZIOEN PAREKOTASUNA.....	44
3.7. FORMA ETA BOLUMEN ALDAKETAK.....	45
3.8. BATERAGARRITASUN BALDINTZAK.....	46
3.9. GALGA EXTENSIOMETRIKOAK.....	47
4. GORPUTZ ELASTIKOA -----	49

4.1.	SARRERA.....	49
4.2.	DEFORMAZIOAK TENTSIOEN MENPE.....	49
4.3.	TENTSIOAK DEFORMAZIOEN MENPE.....	51
4.4.	TENPERATURAREN ERAGINA.....	53
4.5.	TENTSIO ETA DEFORMAZIO EGOERA LAUA.....	54
4.5.1	Tentsio egoera laua.....	54
4.5.2	Deformazio egoera laua.....	55
4.6.	DEFORMAZIO ENERGIA.....	55
5.	PROBLEMA ELASTIKOA -----	59
5.1.	SARRERA.....	59
5.2.	ELASTIKOTASUNAREN TEORIAKO EKUAZIOAK.....	59
5.3.	PROBLEMA ELASTIKOAREN PLANTEAMENDUA.....	61
5.3.1	Desplazamenduak ezezagun bezala hartuta.....	61
5.3.2	Tentsioak ezezagun bezala hartuta.....	61
5.3.3	Materialen erresistentzia.....	62
5.3.4	Metodo numerikoak.....	63
6.	HUTSEGITE IRIZPIDEAK -----	65
6.1.	SARRERA.....	65
6.2.	TENTSIO MAXIMOAREN IRIZPIDEA: RANKINE.....	66
6.3.	DEFORMAZIO MAXIMOA: SAINT VENANT.....	66
6.4.	MOHR-EN EGOERA LIMITEAK.....	67
6.5.	TENTSIO EBAKITZAILE MAXIMOA: TRESCA.....	70
6.6.	DISTORTSIO ENERGIA MAXIMOA: VON MISES.....	71
7.	PIEZA PRISMATIKOAK: SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK -----	75
7.1.	SARRERA.....	75
7.2.	SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK.....	76
7.3.	IKUR HITZARMENA.....	80
7.4.	ZERRADA DIFERENTZIALAREN OREKA.....	81
7.5.	SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUEN DIAGRAMAK.....	83
7.6.	ARDATZ KURBOKO PIEZA PRISMATIKOAK.....	84
8.	TRAKZIOA ETA KONPRESIOA -----	89
8.1.	SARRERA.....	89

8.2.	DEFORMAZIOAK ETA TENTSIOAK	90
8.3.	LUZERA ALDAKETA.....	92
8.4.	EGITURA GILTZATUAK: BARREN DEFORMAZIO PROZESUA.....	92
8.5.	LODIERA TXIKIKO EGITURAK.....	94
8.5.1	Biltegiak	94
8.5.2	Eraztunak.....	96
9.	MAKURDURA: TENTSIOAK -----	99
9.1.	SARRERA.....	99
9.2.	MAKURDURA HUTSA.....	100
9.2.1	Kasu orokorra.....	100
9.2.2	Mohr-en zirkulua inertzia momentuentzat.....	104
9.2.3	Kasu partikularrak	107
9.3.	MAKURDURA BAKUNA	108
9.3.1	Tentsio normalak.....	108
9.3.2	Fluxu ebakitzaileren teorema.....	108
9.3.3	Tentsio ebakitzailak	111
9.3.4	Tentsio nagusiak.....	115
9.3.5	Habe konposatuak	116
9.4.	MAKURDURKA KONPOSATUA	118
9.4.1	Tentsio normalak eta ebakitzailak	118
9.4.2	Trakzio eta konpresio eszentrikoa	119
9.4.3	Sekzioaren Nukleoa.....	122
10.	MAKURDURA: ZURRUNTASUNA -----	125
10.1.	SARRERA.....	125
10.2.	KURBA ELASTIKOAREN EKUAZIO DIFERENTZIALA	125
10.3.	EED INTEGRAZIOA: BAKUNTASUN FUNTZIOAK	129
10.4.	MOHR-EN TEOREMAK	132
10.4.1	Lehenengo teorema (M1)	132
10.4.2	Bigarren teorema (M2).....	132
10.5.	HABE KONJOKATUAREN METODOA.....	133
11.	MAKURDURA: HIPERESTATIZITATEA -----	137
11.1.	SARRERA.....	137
11.2.	TARTE BAKARREKO HABEAK	137
11.3.	HIRU MOMENTUEN TEOREMA	138
12.	BIHURDURA -----	143

12.1. SARRERA.....	143
12.2. SEKZIO ZIRKULARRA	143
12.3. SEKZIO LAUKIZUZENA.....	148
12.4. LODIERA TXIKIKO SEKZIO IREKIAK.....	149
12.5. LODIERA TXIKIKO SEKZIO ITXIAK	151
12.6. BIHURDURA ZENTRUA	154
12.7. BIHURDURA-MAKURDURA	156
13. TEOREMA ENERGETIKOAK -----	159
13.1. SARRERA.....	159
13.2. KANPOKO INDARREN LANA ETA LAN OSAGARRIA	159
13.3. ELKARREKIKOTASUN TEOREMAK.....	162
13.4. CASTIGLIANO ETA ENGESSE-EN TEOREMAK.....	163
13.5. DEFORMAZIO ENERGIA ETA KOENERGIA.....	165
13.5.1 Tentsioen menpe.....	165
13.5.2 Sekzioko indarren menpe	166
13.6. SEKZIOKO INDARREN DERIBATUAK. INDAR UNITARIOAREN METODOA	173
13.7. ENGESSE-CASTIGLIANOREN TEOREMAREN APLIKAZIOA	174
13.7.1 Sistema isostatikoak	174
13.7.2 Sistema hiperestatikoak	175
14. EZEGONKORTASUNA. GILBORDURA -----	177
14.1. SARRERA.....	177
14.2. EULER-en KARGA KRITIKOA.....	178
14.3. LOTUREN ERAGINA.....	180
14.4. TENTSIO KRITIKOA ETA LERDENTASUNA	181
14.5. ZUTABE LERDENEN KONPRESIO ESZENTRIKOA.....	182

1. IRAKASGAIAREN DESKRIBAPENA

1.1. SARRERA

Mekanika, gorputzen *higidura* aztertzen duen Zientziako adarra da. Higidura bere zergatiak kontuan hartu gabe aztertzen dituen atala *Zinematika* da eta higidura eta bere zergatiak, hau da indarrak, aztertzen dituen, *Dinamika* da. Ingeniaritzan, gorputz isolatu bati eragiten dioten indar sistemaren erresultantea eta momentu erresultantea nuluak direneko kasuak interes berezia du. Egoera honetan, gorputza orekan dagoela esaten da eta orekan dauden gorputzak aztertzen dituen Mekanikako atala *Estatika* da.

Gorputz motaren ikuspuntutik, errealitateranzko lehen hurbilpena *partikula* aztertuz egiten da, bere ezaugarri matematikoak puntu baten koordinatuak eta bere masa izanik. Hurrengo urratsa, *jarraituak* edo *diskretoak* izan daitezkeen partikula sistemak jorratzea da. Ingurune jarraituek gainera *solidoak* edo *fluidoak* izan daitezke. Ingurune jarraitu solido baten kasuan, errealitateranzko hurrengo urratsean, puntuen arteko distantzia erlatiboak ez direla aldatzen onartzen da, *Solido Zurrunera* iritsiz. Puntuen arteko distantziak aldatzen direla onartzen bada, *Solido Deformatuari* modelora iristen da. Baina distantzia aldaketa erlatiboek solidoaren osotasunari aldaketa nabarmenik ez badiote eragiten, solidoaren higidura orokorra edo oreka, Solido Zurrunaren Mekaniko legeak erabiliz azter daitezke. Hau da, solidoa deformatuta egonik ere, bere orobateko analisisa deformatu gabeko konfigurazioarekin egin daiteke.

Irakasgai honetako kasu gehienetan, Solido Zurrunaren legeak deformatu gabeko konfigurazioari aplikatuko zaizkio, konfigurazio deformatuaren eta deformatu gabekoaren alde txikiaren ondorioz. Beste alde batetik, gorputza orekan ez dagoenean, D'Alembert-en printzipioa aplikatuko da, Dinamikako problema Estatikako batean bihurtuz. Solido deformagarriko puntuen arteko distantzia aldaketa erlatiboak eta beren zergatiak analizatzeko, bi magnitude definitzen dira: *tentsioak* eta *deformazio unitarioak*.

Tentsioak, gainazal unitateko barne indarrak dira eta *normalak* edo *tangentzialak* izan daitezke, gainazalarekiko elkartzut edo bertan barneratuak badira, hurrenez hurren. Beste alde batetik, *deformazio unitario normalek* luzera aldaketa erlatiboak adierazten dituzte eta *tangentzialek*, hasieran zuzenak ziren angeluen txikitzea. Tentsioak deformazioak eragiten dituzten zergatiak direla onartuz, batzuk eta besteak, parametroak barneratzen dituzten ekuazioen bidez erlazionatuta daude matematikoki. Parametro hauek, gorputza osatzen duen materialaren ezaugarri fisiko-kimikoen menpekak dira.

Irakasgai honetan, tentsio eta deformazio unitarioak biunibokoki erlazionatuta daudela suposatzen da, hau da, tentsio egoera bakoitzari deformazio egoera bat dagokiola, eta alderantziz. Honen ondorioz, gorputz bat kargatzen bada eta ondoren deskargatu, tentsioak eta deformazioak erlazionatzen dituzten kurbek ibilbide bera jarraitzen dute karga eta deskargan. *Portaera* honi *elastiko* deritzo. Gainera, tentsioak eta deformazioak erlazionatzen dituzten ekuazioak *linealak* direla suposatzen da. Honen ondorioz *gainjarpen prinzipioa* erabil daiteke, zeinaren arabera, zergati multzo baten ondorioa, zergati bakoitzak eragiten dituen ondorien batura den. Irakasgaia, ondorengo ataletan azaltzen diren bi zati nagusitan banatzen da: *Elastikotasuna* eta *Materialen Erresistentzia*.

1.2. ELASTIKOTASUNA

Tentsioak, *deformazioak* eta *beren arteko erlazio legeak* aztertzen dira. Tentsioen analisitik *oreka ekuazioak* lortzen dira, Estatikako legeak aplikatuz. Deformazioen analisisian, deformazio prozesuaren geometria aztertzen da eta puntu bateko *deformazio unitarioak* bertako *desplazamenduen deribatuekin* erlazionatzen dira. Tentsio eta deformazioen arteko erlazioei konstitutibo deritze, materialaren propietateen menpeko baitira. Beren azterketan, materiala, *elastikoa* eta *lineala* izateaz gain, *isotropoa* dela

suposatzen da. Horrela, *bi konstante elastiko* independente behar dira tentsio eta deformazioen arteko erlazio legeak ezartzeko.

Tentsioen, deformazioen eta ekuazio konstitutiboetatik lortutako ekuazio multzoak, errealitateko kasu gehienetan ebazteko oso zaila den ekuazio sistema bat osatzen dute. Horregatik, geometria ezaugarri jakina duten *pieza prismatiko*, *plaka* eta *oskolen* kasuan bezalako solidoetan, deformazioei eta tentsioei buruzko hipotesi sinplifikatzaileak erabiltzen dira.

1.3. MATERIALEN ERRESISTENTZIA

Irakasgaiaren atal honetan, ingeniartzan ohikoa den solido tipologia bat aztertuko da: pieza prismatikoez osatutako sistemak. *Pieza prismatikoa* honela definitzen da: gainazal lau baten grabitate zentruak kurba bat deskribatzerakoan sortutako bolumena, gainazala eta kurbak elkartut irauten dutelarik. Gainazal lau sekzio zuzena edo *sekzioa* deitzen da eta kurba, *zuzentzailea* edo *ardatza* da. Gainera, piezaren luzera sekzioaren dimentsioak baino nabarmenki handiagoa da. Aztertzen diren kasu gehienetan zuzentzailea zuzena da, *habe*, *zutabe* eta *ardatzetan* gertatzen den bezala.

Sekzio bateko tentsioen erresultantea eta momentu erresultantea determinatzen dira bertako grabitate zentruan. Irakasgaiaren garapenean, sekzioen deformazioari buruzko hipotesi sinplifikatzaileak egin ondoren, sekzioko indar eta momentu bakoitzak berau eragiten duten tensio banaketarekin erlazionatzen da. Analisi honen bidez, tentsio maximoak materialaren tensio onargarriarekin konparatzen dira, eta *erresistentzia analisia* deitzen zaio. Beste alde batetik, pieza prismatikoaren desplazamendu eta biraketak aztertzen dira, *zurruntasun analisia* eginez. Azken gaian, konpresioa jasaten duten piezen *egonkortasuna* aztertzen da, gilbordura. Hemen, oreka baldintzak konfigurazio deformatuan ezartzen dira eta konpresio indarrek piezaren makurdura ezegonkorra eragiten duten egoera aztertzen da.

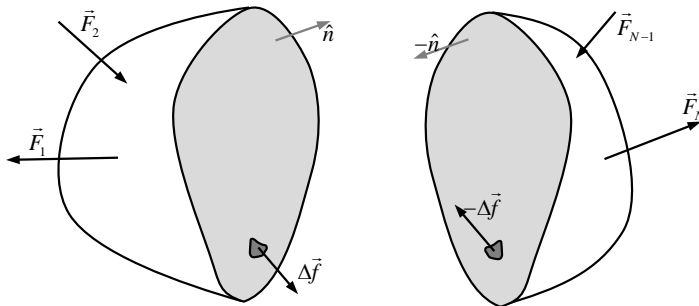
2. TENTSIOAK

2.1. SARRERA

Gorputz batean diharduten gainazal unitateko barne indarrak tentsioak dira. Tentsioa planoarekiko elkartuta den osagai normalean eta banaketa gainazalean barneratuta dagoen osagai tangenzialean deskonposa daiteke.

2.2. TENTSIO BEKTOREA ETA OSAGAIAK

Izan bedi indar sistema bat jasaten duen eta oreka estatikoan dagoen gorputz bat. Plano baten bidez banatuta suposatzen bada, alde bakoitzaren oreka mantentzeko ebaketa planoan barne indarrak azaltzen dira, 2.1 irudian ikus daitekenez.

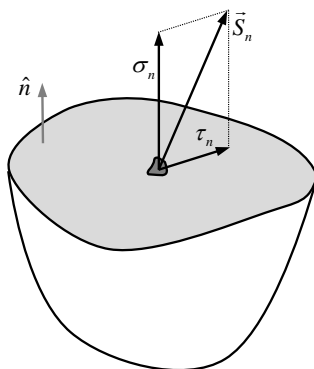


2.1 irudia

\hat{n} bektore unitario normala duen planoko *tentsio bektorea* honela definitzen da:

$$\vec{S}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta A} \quad (2.1)$$

$\Delta \vec{f}$ barne indarra eta ΔA barne indarraren eragite azalera izanik. Ebaketa planoarekiko normala den osagai batean eta plano horretan barneratuta dagoen beste osagai batean deskonposa daiteke 2.2 irudian azaltzen den bezala. Osagai normala σ_n tentsio normala deitzen da eta plano barneko osagaia τ_n tentsio ebakitzaila edo tangenziala deitzen da. Osagai hauek erreferentzia sistema baten menpekoak ez direnez, tentsio bektorearen *osagai intrintsekoak* deitzen dira.



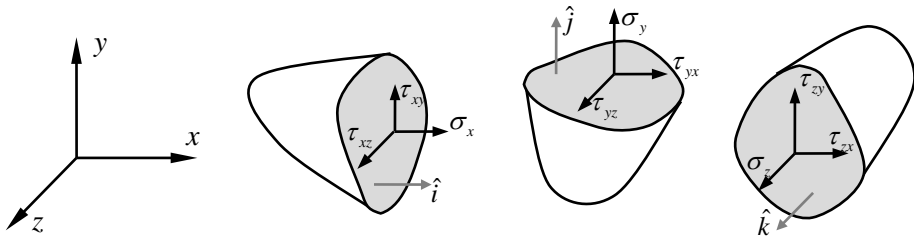
2.2 irudia

2.2 irudiaren arabera, osagai intrintsekoak honakoak dira:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{n} \\ \tau_n \hat{t} &= \vec{S}_n - (\vec{S}_n \cdot \hat{n}) \hat{n} = \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{S}_n)\end{aligned}\quad (2.2)$$

\hat{t} τ_n ren norabideko bektore unitarioa izanik.

Erreferentzia sistema bat erabiliz, osagai tangenziala ardatzen norabidea duten beste bitan deskonposatzen da, 2.3 irudian ikus daitekenez.

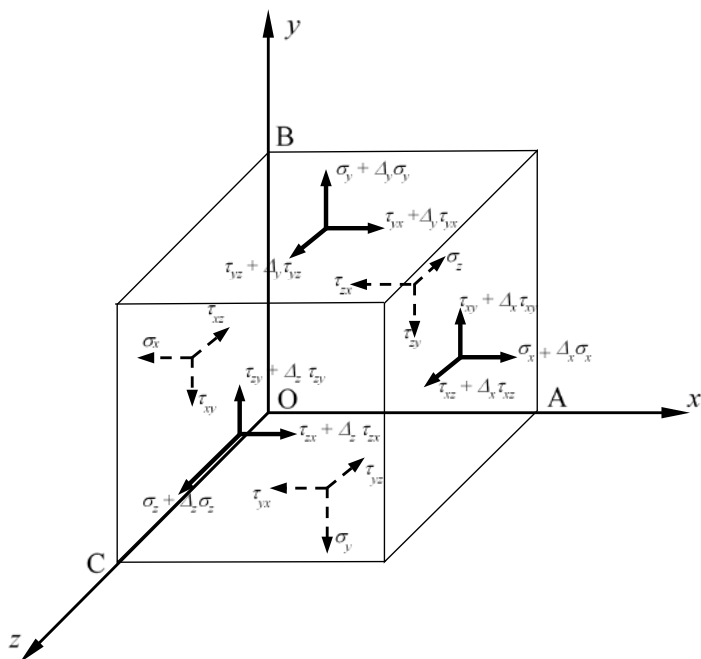


2.3 irudia

σ_i tentsio normalen kasuan, i azpiindizeak planoaren norabide normala adierazten du. τ_{ij} tentsio ebakitzailen kasuan i azpiindizeak norabide normala eta j azpiindizeak osagaiaren norabidea adierazten du. Tentsio osagaien ikurrentzat honako hitzarmena ezartzen da: plano positiboan norantza positiboa duenean edo plano negatiboan norantza negatiboa duenean osagaia positiboa da. Plano positiboa normal positiboa duena da, adibidez, 2.3 irudian azaltzen diren mozte planoak.

2.3. OREKA EKUAZIOAK

Solido baten barneko $O(x,y,z)$ puntuaren inguruko paralelepipedo zuzen diferentziala isolatuko da. Aurpegien zentruetan tentsio osagaiak eta grabitate zentruan, 2.4 irudian azaltzen ez diren bolumen unitateko indarrek dihardute. Tentsioak O puntuaren koordinatuen menpeko funtzio bezala hartuko dira, eta funtzio jarraituak direla onartuko da. Ondorioz, i ($i = x, y, z$) norabidearekiko elkartzut diren bi planoetan, funtzioari i koordinatuari dagokion aldaketa gehitu behar zaio. Hau da, O -tik igarotzen den planoan balioa $f(x, y, z)$ izanik, plano paraleloko balioa $f(x, y, z) + f_i(x, y, z)di$ da. Bien arteko aldaketa honela izendatuko da: $\Delta_i f = f_i di$.

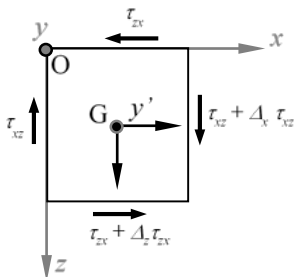


2.4 irudia

Indarren oreka ekuazioak erabiliz honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 \\
 (\sigma_x + \sigma_{x,x} dx) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \tau_{yx,y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz + (\tau_{zx} + \tau_{zx,z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy + F_x dx dy dz &= 0 \\
 \sum F_y &= 0 \\
 (\tau_{xy} + \tau_{xy,x} dx) dy dz - \tau_{xy} dy dz + (\sigma_y + \sigma_{y,y} dy) dx dz - \sigma_y dx dz + (\tau_{zy} + \tau_{zy,z} dz) dx dy - \tau_{zy} dx dy + F_y dx dy dz &= 0 \\
 \sum F_z &= 0 \\
 (\tau_{xz} + \tau_{xz,x} dx) dy dz - \tau_{xz} dy dz + (\tau_{yz} + \tau_{yz,y} dy) dx dz - \tau_{yz} dx dz + (\sigma_z + \sigma_{z,z} dz) dx dy - \sigma_z dx dy + F_z dx dy dz &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

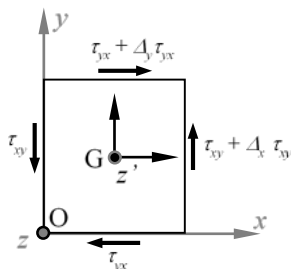
(2.3) ekuazioetan eragiketak egin eta atalez atal $dx dy dz$ zatitu ondoren, honakoa gelditzen da:



2.6 irudia

2.6 irudian y' ardatzarekiko momentua ematen duten osagaiak azaltzen dira. Aurreko kasuaren antzera garatuz, honakoa lortzen da

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.7)$$



2.7 irudia

2.7 irudian z' ardatzarekiko momentua ematen duten osagaiak azaltzen dira. Honakoa lortzen da:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.8)$$

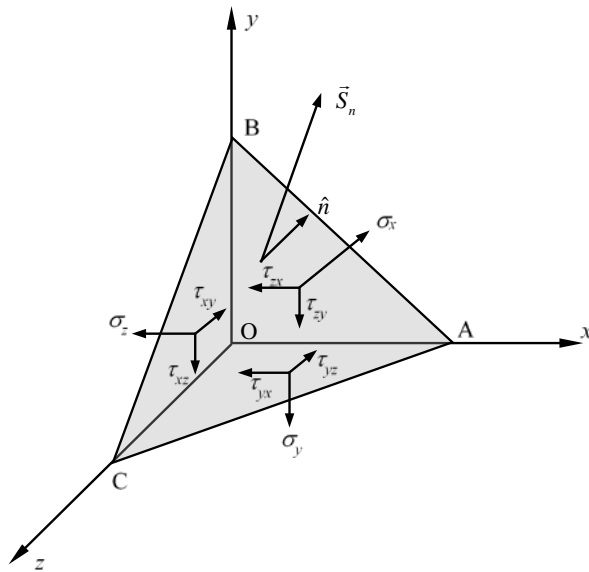
(2.6)-(2.8) ekuazioen arabera, tentsio osagai tangenzialak simetrikoak dira edozein $Oxyz$ erreferentzia sistemetan.

2.4. TENTSIO EGOERA OROKORRA

2.4.1 Tentsio tentsorea

O-n sorrera duen erreferentzia sistema bat erabiliz, 2.8 irudian azaltzen den tetraedro elementala isolatuko da, O puntutik igarotzen den edozein planoko tentsio bektorearen osagaiak determinatzeko. Plano koordinatuei dagokien tentsio bektoreak osagai normal batean eta ardatzen arabera bi osagai tangenzialetan deskonposatzen dira, lehen esan den bezala:

$$\begin{aligned}\vec{S}_x &= -\sigma_x \hat{i} - \tau_{xy} \hat{j} - \tau_{xz} \hat{k} \\ \vec{S}_y &= -\tau_{yx} \hat{i} - \sigma_y \hat{j} - \tau_{yz} \hat{k} \\ \vec{S}_z &= -\tau_{zx} \hat{i} - \tau_{zy} \hat{j} - \sigma_z \hat{k}\end{aligned}\tag{2.9}$$



2.8 irudia

Elementuak 2.8 irudian azaltzen ez den bolumen unitateko \vec{F} indarra ere jasaten du, F_x, F_y, F_z osagaiak dituena. Indar hori grabitatorioa, elektromagnetikoa edo inertzia indarra izan daiteke. Indarren oreka ekuazio bektoriala honakoa da:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \vec{S}_n \widehat{ABC} + \vec{S}_x \widehat{OBC} + \vec{S}_y \widehat{OAC} + \vec{S}_z \widehat{OAB} + \vec{F}dV = \vec{0} \quad (2.10)$$

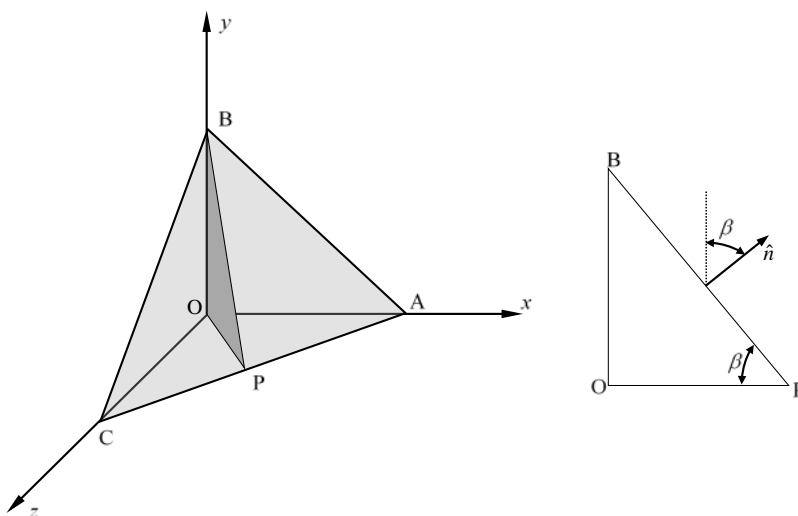
n_x , n_y eta $n_z \hat{n}$ bektore normalaren osagaiak izanik, azalaren arteko honako erlazioak betetzen dira:

$$\widehat{OBC} = n_x \widehat{ABC} \quad \widehat{OAC} = n_y \widehat{ABC} \quad \widehat{OAB} = n_z \widehat{ABC} \quad (2.11)$$

(2.11) ekuazioko emaitzak justifikatzeko, n_y -ren kasua azaltzen da 2.9 irudian. \overline{OP} eta \overline{BP} zuzenkiak elkartutak eta $n_y = \cos \beta$ izanik:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= \frac{1}{2} \overline{ACPB} \\ \widehat{OAC} &= \frac{1}{2} \overline{ACOP} \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12) ekuazioko bi azalera zatituz eta 2.9 irudia kontuan izanik, $\widehat{OAC} = n_y \widehat{ABC}$ lortzen da. (2.11)-ko beste erlazioak antzera lor daitezke.



2.9 irudia

(2.11) ekuazioa (2.10) ekuazioan ordezkaturaz, \widehat{ABC} azaleragatik zatituz eta ardatzen arabera deskonposaturaz, tentsio bektorearen osagai kartesiarrak honakoak dira:

$$\begin{aligned} S_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ S_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ S_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) ekuazioan bolumen indarrei dagokien batugaiak ez dira barneratu, arbuigarriak baitira $\frac{dV}{ABC}$ gai diferentzialagatik bidertuta egoteagatik. Matrize moduan honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \\ S_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \{S_n\} = [\sigma] \{n\} \quad (2.14)$$

(2.14) ekuazioaren arabera, $Oxyz$ erreferentzia sisteman adierazitako $\{n\}$ bektorea $\{S_n\}$ bektorean transformatzen da $[\sigma]$ matrize simetrikoaren bidez. Erreferentzia sistemaren menpekoa ez den adierazpena honakoa da:

$$\vec{S}_n = \vec{\sigma} \hat{n} \quad (2.15)$$

Transformazioari dagokion eragile matematikoa tentsorea deitzen da. (2.15) ekuazioan $\vec{\sigma}$ tentsio tentsorea da eta erreferentzia sistema kartesiar batean 3×3 matrize baten bidez adierazten da. Tentsio bektorearen osagai intrintsekoak ez dira erreferentzia sistemaren menpekoak eta honakoak dira:

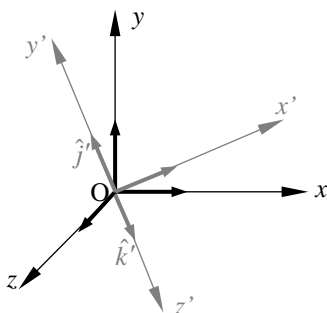
$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{n\}^t \{S_n\} = \{n\}^t [\sigma] \{n\} \\ \tau_n^2 &= |\vec{S}_n|^2 - \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.4.2 Bektoreen eta tentsoreen transformazioa

2.10 irudian $Oxyz$ eta $Ox'y'z'$ erreferentzia sistemak azaltzen dira. Bektore baten osagaien arteko erlazioa aztertzen lehenik. Edozein \vec{v} bektoreren adierazpena bi erreferentzia sistemetan honakoa da:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (2.17)$$

$$\vec{v} = v_{x'} \hat{i}' + v_{y'} \hat{j}' + v_{z'} \hat{k}' \quad (2.18)$$



2.10 irudia

Erreferentzia sistema bakoitzeko bektore unitarioak beste erreferentzia sisteman adieraz daitezkenez:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= r_{x'x} \hat{i}' + r_{y'x} \hat{j}' + r_{z'x} \hat{k}' \\ \hat{j} &= r_{y'x} \hat{i}' + r_{yy'} \hat{j}' + r_{z'y} \hat{k}' \\ \hat{k} &= r_{z'x} \hat{i}' + r_{zy'} \hat{j}' + r_{zz'} \hat{k}' \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{i}' &= r_{xx'} \hat{i} + r_{xy'} \hat{j} + r_{xz'} \hat{k} \\ \hat{j}' &= r_{y'x} \hat{i} + r_{y'y} \hat{j} + r_{y'z} \hat{k} \\ \hat{k}' &= r_{z'x} \hat{i} + r_{z'y} \hat{j} + r_{z'z} \hat{k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

r_{ij} eta $r_{ij'}$ koefizienteak bektore unitarioen norabidetako kosinu zuzentzaileak direnez, honakoa betetzen da: $r_{ij} = r_{ji'}$. (2.19) ekuazioa (2.17) ekuazioan ordezkatu:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v_x \left(r_{xx'} \hat{i}' + r_{xy'} \hat{j}' + r_{xz'} \hat{k}' \right) \\
&+ v_y \left(r_{yx'} \hat{i}' + r_{yy'} \hat{j}' + r_{yz'} \hat{k}' \right) \\
&+ v_z \left(r_{zx'} \hat{i}' + r_{zy'} \hat{j}' + r_{zz'} \hat{k}' \right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

(2.21) ekuazioko osagaiak (2.18) ekuaziokoekin berdinduz eta $r_{ij} = r_{ji}$ dela kontuan izanik, matrize moduan honakoa lortzen da:

$$\begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{x'y} & r_{x'z} \\ r_{y'x} & r_{y'y} & r_{y'z} \\ r_{z'x} & r_{z'y} & r_{z'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \{v\}_{Ox'y'z'} = [R] \{v\}_{Oxyz} \tag{2.22}$$

(2.22) ekuazioak bektorearen bi adierazpenak $[R]$ matrizearen bidez erlazionatzen ditu. Matrize honen errenkadak biratutako sistemaren bektore unitarioen osagaiak biratu gabeko sisteman dira, (2.20) ekuazioan ikus daitekeenez. (2.20) ekuazioa (2.18) ekuazioan ordezkatzuz eta lehen bezalako prozedura jarraituz honakoa lortzen da:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x'x} & r_{y'x} & r_{z'x} \\ r_{x'y} & r_{y'y} & r_{z'y} \\ r_{x'z} & r_{y'z} & r_{z'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{v\}_{Oxyz} = [R]^t \{v\}_{Ox'y'z'} \tag{2.23}$$

(2.22) eta (2.23) ekuazioetatik honakoa ondoriozta daiteke:

$$[R]^t [R] = [R][R]^t = [I] \Rightarrow [R]^t = [R]^{-1} \tag{2.24}$$

(2.24) ekuazioaren arabera $[R]$ matrizearen alderantzizkoa eta iraulia berdina direnez, ortogonal da.

Adibidea: x ardatzarekiko θ angeluko errotazioa egiten bada, bektore unitario berrien adierazpena eta errotazio matrizea honakoak dira:

$$\left. \begin{aligned} \hat{j}' &= \cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{k} \\ \hat{k}' &= -\sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Aztertutako transformazioak tentsioen analisisian aplikatukoa dira. (2.14) ekuazioa bi erreferentzia sistemetan honela adierazten da:

$$\{S_n\}_{Oxyz} = [\sigma]_{Oxyz} \{n\}_{Oxyz} \quad (2.25)$$

$$\{S_n\}_{Ox'y'z'} = [\sigma]_{Ox'y'z'} \{n\}_{Ox'y'z'} \quad (2.26)$$

(2.25) ekuazioan $[R]$ aurrebidertuz eta (2.22) kontuan izanik, $\{n\}_{Oxyz}$ bektore normalarentzat (2.23) ekuazioa erabiliz eta (2.26) ekuazioarekin alderatuz, honakoa lortzen da:

$$[\sigma]_{Ox'y'z'} = [R][\sigma]_{Oxyz} [R]^t \quad (2.27)$$

(2.26) ekuazioan $[R]^t$ aurrebidertuz eta (2.23) kontuan izanik, $\{n\}_{Ox'y'z'}$ bektore normalarentzat (2.22) ekuazioa erabiliz eta (2.25) ekuazioarekin alderatuz, alderantzizko erlazioa lortzen da:

$$[\sigma]_{Oxyz} = [R]^t [\sigma]_{Ox'y'z'} [R] \quad (2.28)$$

(2.28) ekuazioko erlazio bera (2.27) ekuazioan $[R]^t$ aurretik bidertuz eta $[R]$ atzetik bidertuz lor daiteke.

2.4.3 Tentsio nagusiak

Problemaren bi formulazio

(2.14) ekuazioko transformazioaren arabera, erreferentzia sistemari dagokion tentsio matrizea ezagutuz, O puntutik igarotzen den edozein planotako tentsio bektorearen osagaiak determina daitezke. Planoren batean *osagai tangentziala nuloa*

den jakin nahi da. Horrela bada, tentsio bektoreak osagai normala du bakarrik eta transformazioa honela gelditzen da:

$$\tau_n = 0 \Rightarrow \vec{S}_n = \sigma_n \hat{n} \Rightarrow \{S_n\} = \sigma_n \{n\} \quad (2.29)$$

(2.14) ekuazioeko transformazio orokorra ere bete behar duenez, $Oxyz$ erreferentzia sisteman honakoa betetzen da:

$$\sigma_n \{n\} = [\sigma] \{n\} \Rightarrow ([\sigma] - \sigma_n [I]) \{n\} = \{0\} \quad (2.30)$$

(2.30) ekuazioak autobalio eta autobektore problema adierazten du. Baldintza betetzen duten hiru tentsioak *tentsio nagusiak* eta dagozkien norabideak *norabide nagusiak* dira. Norabide nagusiekiko elkartut diren planoak *plano nagusiak* dira eta bertan tentsio nagusiek dihardute.

Beste alde batetik, *norabideren batean* σ_n *tentsio normalak balio estazionariorik*, hau da, *maximo eta minimo erlatiborik* duen determinatu nahi da. Tentsio normala (2.16) ekuazioan emanda dago eta bektore normalak modulu unitarioaren baldintza bete behar du. Maximo eta minimo baldintzatuen problema da, aldagaia $\{n\}$ bektorea eta baldintza $\{n\}^t \{n\} = 1$ izanik. Funtzio lagrangearra honakoa da:

$$F(\{n\}, \lambda) = \{n\}^t [\sigma] \{n\} - \lambda (\{n\}^t \{n\} - 1) \quad (2.31)$$

Balio estazionarioak honako baldintzatik lortzen dira:

$$\frac{\partial F(\{n\}, \lambda)}{\partial \{n\}} = 0 \Rightarrow 2[\sigma] \{n\} - 2\lambda \{n\} = \{0\} \quad (2.32)$$

(2.32) ekuazioan gaiak ordenatuz, (2.30) ekuazioeko autobalio eta autobektoreen problema bera lortzen da, $\lambda = \sigma_n$ izanik, hau da:

$$([\sigma] - \lambda [I]) \{n\} = \{0\} \quad (2.33)$$

Ondorioz, *norabide nagusietan tentsio normalek balio estazionarioak dituzte.*

Problemaren ebazpena eta inbariantek

(2.30) ekuazioko matrizeak garatuz:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

(2.34) ekuazioak sistema homogeneoa adierazten du eta soluzio nuluz gain besteren bat izan dezan, sistemaren determinanteak nulua izan behar du. Determinantea garatuz, sistemaren ekuazio karakteristikoak honela gelditzen da:

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad (2.35)$$

Ekuazio karakteristikoaren erroak tentsio nagusiak dira eta balio horiek ez dira erabilitako erreferentzia sistemaren menpekoak. Ondorioz, I_1 , I_2 eta I_3 inbariantek dira, O puntuan sorrera duen edozein erreferentzia sistema kartesiarrentzat honakoak izanik:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

(2.35) ekuazioko hiru tentsio nagusiak determinatu ondoren, (2.34) sisteman ordezkaten dira norabide nagusiak determinatzeko. Norabide nagusiak 1, 2 eta 3 azpiindizeekin izendatzen dira eta eskuarki honela ordenatzen dira: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. (2.34) sisteman ekuazio bat gutxienez konbinazio lineala denez, norabide nagusi bakoitzaren n_x , n_y eta n_z kosinu zuzentzaileak determinatzeko modulu unitarioaren baldintza erabiltzen da:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2.37)$$

Tentsio nagusiak zenbaki errealak dira

Ondoren, *hiru tentsio nagusiak zenbaki errealak direla* frogatuko da. (2.35) ekuazio karakteristikoa kubikoa denez, bere erroak determinatzerakoan bi aukera daude: hirurak errealak izatea edo bat erreala eta beste biak konplexu konjokatuak izatea. Gutxienez erro batek erreala izan behar duenez, erro horri dagokion norabidea x dela suposatuko da. x norabide nagusia denez, ekuazio karakteristikoa honako determinantetik lortzen da:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.38)$$

Beste bi tentsio nagusiak lortzeko honakoa bete behar da:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.39)$$

(2.39) ekuazioko determinantea garatuz honako ekuazio kuadratikoa lortzen da:

$$\sigma_n^2 - (\sigma_y + \sigma_z)\sigma_n - (\tau_{yz}^2 - \sigma_y\sigma_z) = 0 \quad (2.40)$$

(2.40) ekuaziotik lortzen diren erroak honakoak dira:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \left[(\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_y + \sigma_z)^2 + 4(\tau_{yz}^2 - \sigma_y\sigma_z)} \right] \quad (2.41)$$

Erroak errealak izan daitezen, (2.41)eko diskriminantearen ikurrak positiboa izan behar du:

$$(\sigma_y + \sigma_z)^2 - 4(\sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2) > 0 \quad (2.42)$$

Eragiketak eginez, (2.42)ko baldintza beti betetzen dela ikusten da, bi karratuen batura bezala adieraz baitaiteke:

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (2\tau_{yz})^2 > 0 \quad (2.43)$$

Norabide nagusiak elkartutak dira

1 eta 2 norabide nagusiak kontsideratuz:

$$\sigma_1 \{n_1\} = [\sigma] \{n_1\} \quad (2.44)$$

$$\sigma_2 \{n_2\} = [\sigma] \{n_2\} \quad (2.45)$$

(2.44) ekuazioa $\{n_2\}^t$ gatik eta (2.45) ekuazioa $\{n_1\}^t$ gatik aurrebidertuz, atalez atal kenketa eginez eta eskalar baten iraulia zenbaki bera dela kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \{n_1\} \{n_2\}^t = 0 \quad (2.46)$$

(2.46) ekuazioa bete dadin bi aukera daude:

- $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = 0$ Hau da, 1 eta 2 norabide nagusiak elkartutak dira.
- $\sigma_1 = \sigma_2$ Ekuazioa identikoki betetzen da eta ondorioz 3 norabidearekiko elkartuta den edozein norabide nagusia da.

Frogapena 1 eta 3 edo 2 eta 3 norabideentzat antzera egin daitekenez, hiru tentsio nagusiak desberdinak direnean hiru norabide nagusiak elkartutak dira. Bi balio berdinak badira, hirugarren balioari dagokion norabidearekiko elkartuta den planoko norabide guztiak nagusiak dira. Azkenik, hiru tentsio nagusiak berdinak badira, norabide guztiak nagusiak dira.

O sorrera eta ardatzak norabide nagusiak dituen $O123$ erreferentzia sistema kartesiarra definitu daiteke. Tentsorearen adierazpena honakoa da:

$$[\sigma]_{O123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Tentsio ebakitzaile maximoak

Tentsio ebakitzailearen karratua honakoa da:

$$\tau_n^2 = \{S_n\}^t \{S_n\} - \left(\{n\}^t [\sigma] \{n\} \right)^2 \quad (2.48)$$

Kosinu zuzentzaileak $\{n\}^t \{n\} = 1$ ekuazioagatik erlazionatuta daudenez, lagrangear funtzioa honakoa da:

$$G(\{n\}, \mu) = \tau_n^2(\{n\}) - \mu(\{n\}^t \{n\} - 1) \quad (2.49)$$

Balio estazionarioaren baldintza ezarriz, honakoa lortzen da:

$$\frac{\partial G(\{n\}, \mu)}{\partial \mu} = \{0\} \Rightarrow \left([\sigma]^2 - 2\sigma_n[\sigma] - \mu[I] \right) \{n\} = \{0\} \quad (2.50)$$

(2.50) ekuazioko sistema ez da lineala, σ_n kosinu zuzentzaileen menpekora baita. τ_n ren balio maximoak plano noagusietatik 45°ra daudela frogatu daiteke.

2.4.4 Osagai eskerikoa eta desbideratze osagaia

Definizioz, tentsio esferikoa honakoa da:

$$\sigma_e = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.51)$$

Oxyz erreferentzia sistemari dagokion tentsio matrizea honela deskonposatzen da:

$$[\sigma] = [\sigma_e] + [\sigma_d] \quad (2.52)$$

$[\sigma_e]$ matrize esferikoa da:

$$[\sigma_e] = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$[\sigma_d]$ *desbideratze matrizea* da. (2.52) ekuaziotik askatuz lortzen da:

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

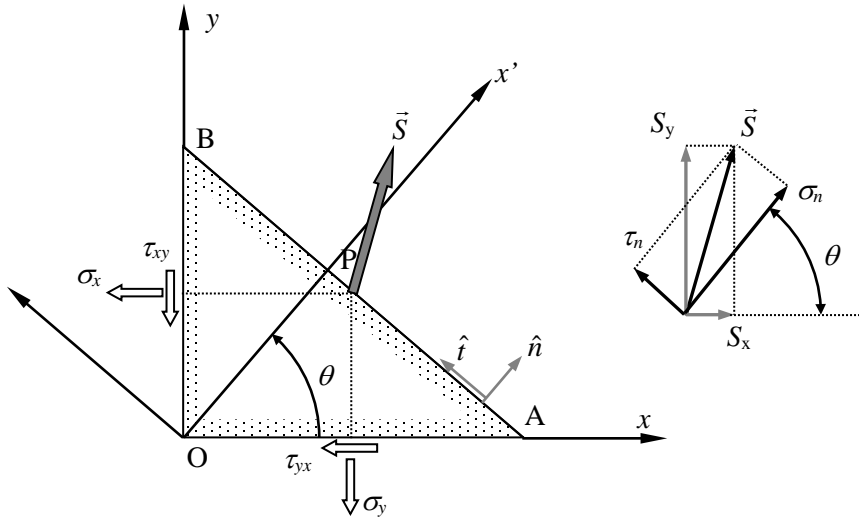
Aurrerago ikusiko denez, material isotropo batean osagai esferikoa gorputzaren bolumen aldaketarekin erlazionatua dago.

2.5. TENTSIO EGOERA LAUA

Tentsio osagai ez nuluak bakarrik xy planoan daudela suposatuko da, hau da $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Edozein planotako tentsio bektorearen osagaiak $Oxyz$ sisteman, (2.14) ekuazioaren arabera:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \\ S_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

(2.55) ekuazioaren arabera, edozein plano aukeratuta $S_{nz} = 0$. Beraz, analisia xy planoan egin daiteke. 2.11 irudian azaltzen den prisma trianguluarra analizatzen da, x eta y ardatzen araberako aldeak $\overline{OA} = dx$, $\overline{OB} = dy$ izanik, hurrenez hurren. Aldeak diferentzialak direnez, AB O puntutik igarotzen dela suposatzen da eta ondorioz AB gainazalaren tentsio bektorea analizatzen da. Beste alde batetik, z norabideko luzera 1 da. Analisia $0 < \theta < \pi$ tartean egiten da. Izan ere, $(\theta + \pi)$ angeluari dagokion planoak 2.11 irudian azaltzen denarekiko, bektore normala eta tentsio bektorea aurkakoak ditu. Plano hori, 2.1 irudian azaltzen den mozketaren beste aldeari dagokiona da.



2.11 irudia

$n_x = \cos \theta$ eta $n_y = \sin \theta$ denez, (2.55) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

2.11 irudian ikusten denez, \hat{n} norabide normaleko eta \hat{t} norabide tangenzialeko bektore unitarioak Oxy erreferentzia sisteman adieraziz honakoak dira:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{t} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Tentsio bektorearen osagai intrintsekoak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{n} = S_{nx} \cos \theta + S_{ny} \sin \theta \\ \tau_n &= \vec{S}_n \cdot \hat{t} = -S_{nx} \sin \theta + S_{ny} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.58)$$

(2.56) ekuazioko S_{nx} , S_{ny} osagaiak (2.58) ekuazioan ordezkatur honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_n &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\quad (2.59)$$

(2.59) ekuazioak erabiliz, σ_x , σ_y , τ_{xy} tentsio osagaiak eta θ angelua ezagutuz, O-tik igarotzen den edozein planori dagokion tentsio bektorearen osagai normala eta tangenziala determina daitezke. Ondoren, angelu bikoitzarekin erlazionatutako identitate trigonometriko batzuk azaltzen dira:

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} & \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} & \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (2.60)$$

(2.60) ekuazioak (2.59) ekuazioetan ordezkaturaz, tentsio bektorearen osagai normala eta tangenziala honakoak dira:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_n &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.61)$$

Ondoren tentsio egoera jakin batzurekin zerikusia duten bi alde interesgarri planteatzen dira:

1. σ_n estazionarioak direneko θ_I angeluak. (2.61)₁ deribatuz eta zerora berdinduz honakoa lortzen da:

$$\tan 2\theta_I = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\quad (2.62)$$

(2.62) ekuazioei dagokien norabideak norabide nagusiak dira. (2.62) ekuazioko angelua (2.61)₂ ekuazioan ordezkaturaz, norabide nagusietan τ_n tentsio ebakitzaila nulua dela ikus daiteke. β eta $\beta \pm \pi$ angeluek tangente bera izanik eta angeluak bikoitzak direnez, norabide nagusiak elkartzutak dira.

2. τ_n maximoa direneko θ_2 angeluak. (2.61)₂ deribatuz eta zerora berdinuz, honakoa lortzen da:

$$\tan 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\tan \theta_1} \quad (2.63)$$

(2.63)-n azaltzen den baldintza betetzeko angeluen arteko erlazioa honakoa izan behar da:

$$2\theta_2 = 2\theta_1 \pm \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \pm \frac{1}{4}\pi \quad (2.64)$$

(2.64) ekuazioaren arabera, norabide nagusiek 45° osatzen dute tentsio ebakitzailen maximoa norabideekin.

Tentsio normalen kasuan, ikurrak esanahi fisikoa du. Orohar, ez da berdin material batek trakzioan edo konpresioan lan egitea. Adibidez, material hauskor baten kasuan haustura trakzioko tentsio maximoen ondorioz gertatzen da. Material harikorren kasuan, haustura tentsio ebakitzailen maximoa norabideen inguruan gertatzen da, beren norantza edozein delarik ere.

Tentsio normal eta ebakitzailen maximoen arteko angelua 45° dela ikusteko, klarion zilindriko baten bihurturazko haustura ikus daiteke. Bihurturazko tentsio ebakitzailen maximoak zirkunferentzialak dira. Klarionaren materiala hauskorra denez, trakzio maximoa planoetatik haustea aurrirakusten da. Bihurtura aplikatzen zaionean, haustura helize moduan gertatzen da, trakzio maximoa plano nagusien arabera. Aplikaturako momentuaren norantza aldatzen bada, haustura aurrekoarekin 90° osatzen dituen helizearen arabera gertatzen da.

2.6. MOHR-EN ZIRKULUA

2.6.1 Tentsio egoera laua

(2.61) ekuazioak honela idatz daitezke:

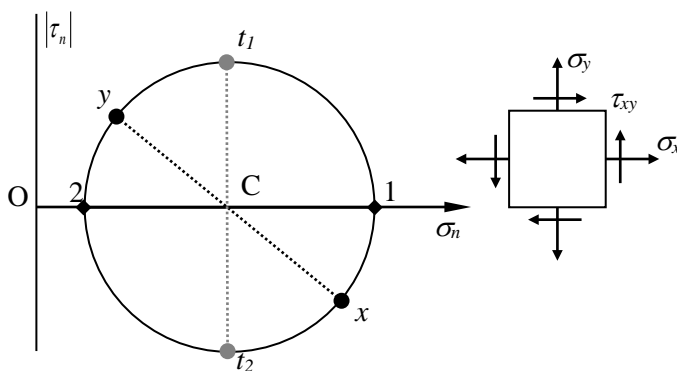
$$\begin{aligned} \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.65)$$

(2.65) ekuazioak zirkunferentzia baten ekuazio parametrikoak dira, parametroa 2θ izanik. Bi ekuazioak karratura jasoz eta atalez atal batuz honakoa lortzen da:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2.66)$$

(2.66) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$(\sigma_n - \sigma_C)^2 + \tau_n^2 = R^2 \quad (2.67)$$



2.12 irudia

Abzisa artatz bezala σ_n eta ordenatu ardatz bezala τ_n balio absolutuan hartuz, (2.67) ekuazioa bere zentroa abzisa ardatzean duen zirkunferentzia bati dagokiona da. Zentroaren posizioa eta erradioa honakoak dira:

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ R &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (2.68)$$

2.12 irudian $\sigma_x > \sigma_y > 0$ eta $\tau_{xy} > 0$ direneko tentsio egoera azaltzen da. Zirkunferentziako puntu bakoitzak σ_n , τ_n osagai intrintsekoek eragiten duten planoarekiko norabide elkartuta adierazten du. (2.62) eta (2.63) ekuazioetako informazio bera lor daiteke. Honela, 1, 2 norabideetan tentsio normalak hurrenez hurren maximoa eta minimoa direla ikusten da, eta puntu horietan tentsio ebakitzailea nulua

dela. Norabide hauek norabide nagusiak dira eta dagozkien tentsioak tentsio nagusiak dira. Norabide nagusiak 90° -ra daude, zirkuluko angeluak bikoitzak baitira. Tentsio ebakitzaille maximoak erradioaren balioa duela ikusten da. Zirkunferentziaren goi eta behe aldean hurrenez hurren dauden t_1 eta t_2 norabideak Mohr-en zirkuluan norabide nagusietatik 90° -ra daude eta ondorioz erreallitatean 45° -ra.

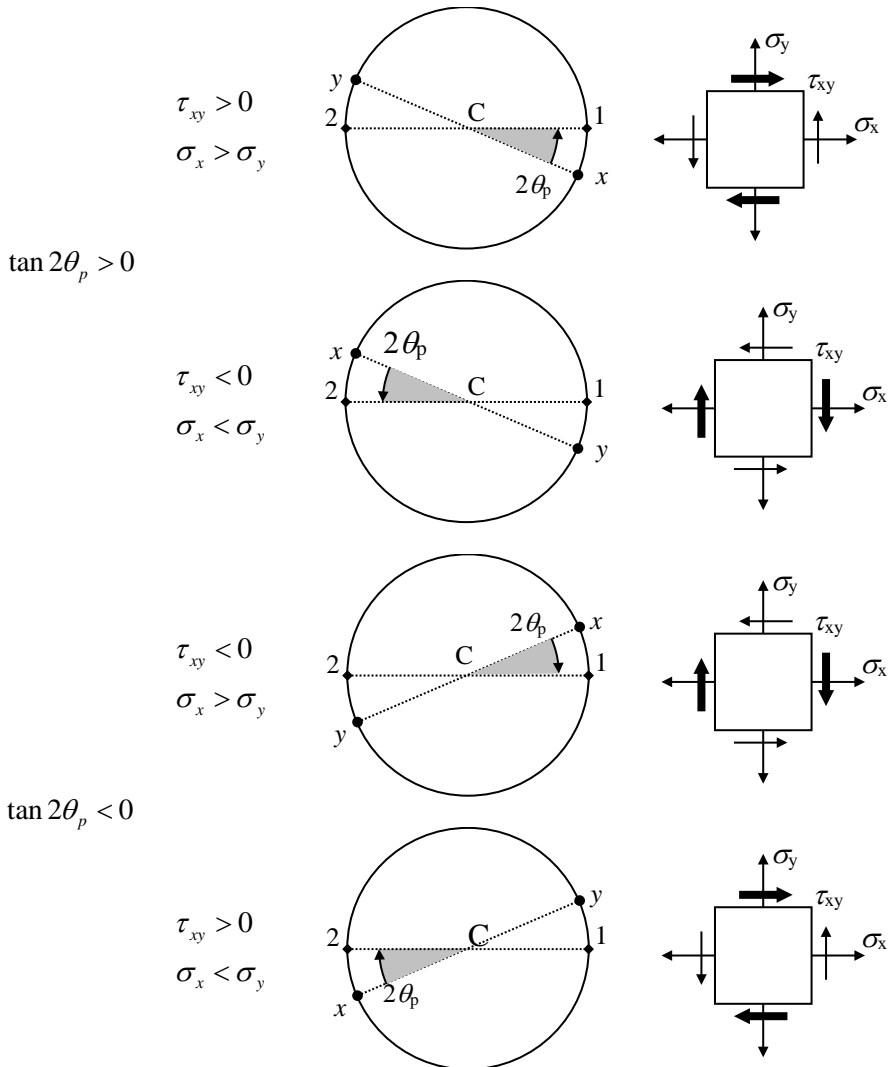
Mohr-en zirkuluaren marrazte prozedura honakoa da:

1. (2.68) ekuazioan azaltzen diren zirkuluaren zentroa eta erradioa kalkulatzen dira. 2.12 irudiaren arabera, tentsio nagusiak honakoak dira:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_c + R \\ \sigma_2 &= \sigma_c - R\end{aligned}\tag{2.69}$$

2. Zirkunferentzia eta σ_n abzisa ardatza marrazten dira. Tentsio ebakitzailen $|\tau_n|$ ardatz bertikala O sorreran kokatzen da, zentruaren σ_c posizioa kontuan izanik. σ_x abzisa bezala eta τ_{xy} ordenatu bezala hartuz, x ardatzari dagokion puntua zirkuluan adieraz daiteke. Baina honako arazoa sortzen da: x ardatza goiko aldean badago y ardatza beheko aldean dago eta alderantziz. Beraz, badirudi τ_{xy} -ren ikur berarentzat balio positiboa eta negatiboa daudela. Horregatik, tentsio ebakitzailen ardatza balio absolutuan adierazten da, $|\tau_n|$ deituz. Mohr-en zirkuluaren erabilpenerako dagoen arazo nagusia honakoa da: *zein da (σ_x , τ_{xy}) balio pareari dagokion ardatza zirkuluaren goi edo beheko erdian kokatzeko irizpidea?*

(2.62) ekuazioaren arabera, norabide nagusiak ematen dituen $\tan(2\theta)$ positiboa edo negatiboa izan daiteke, zenbakitzaileren eta izendatzailearen ikurren arabera. 2.13 irudian egon daitezkeen lau kasuak azaltzen dira. 2.11 irudiaren arabera tangentea positiboa bada angelua erlojorratzen kontrakoa da eta tangentea negatiboa bada angelua erlojorratzen aldekoa da. 2.13 irudian tentsio egoerak ere azaltzen dira, gezi lodiz erlojorratzen aldeko pareak eragiten dituzten tentsio ebakitzailak adieraziz. Kasu guztietan **erlojorratzen aldeko pare** eragiten duten tentsio tangenzialekiko ardatz perpendikularra zirkuluaren **goiko erdian** kokatuta dago.

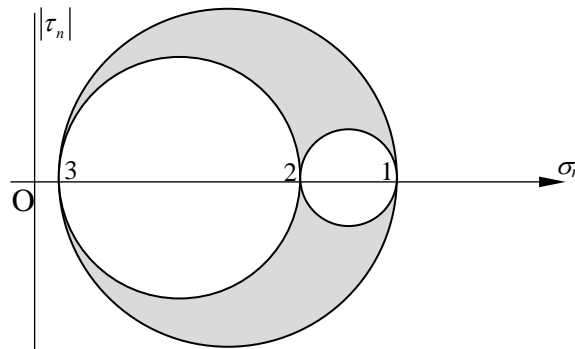


2.13 irudia

2.13 irudia aztertuz, honako irizpidea ezar daiteke puntu bat zirkuluaren goi edo behe aldean kokatzeko: *plano paralelotan eragiten duten tentsio ebakitzazileei dagokien para erlojorratzen aldekoa denean, plano hauekiko ardatz elkartzuta zirkuluaren goiko erdian kokatzen da*. Horregatik, 2.12 irudian x ardatza beheko aldean eta y ardatza goiko aldean daude. Alderantziz, ardatz bat zirkuluaren goi edo behe aldean egoteak, tentsio ebakitzazileen norantzari buruzko informazioa ematen du.

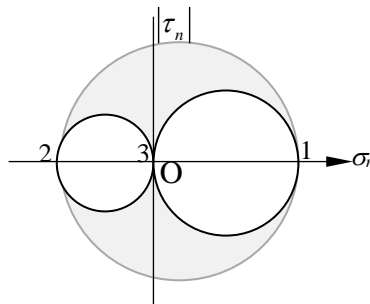
2.6.2 Tentsio egoera orokorra

Tentsio egoera orokorrean, hiru zirkulu azaltzen dira: 1-2, 2-3 eta 3-1 plano nagusiei dagokiena hain zuzen ere, 2.14 irudian ikus daitezenez. O puntutik igarotzen den edozein planotako tentsio bektorearen osagai intrintsekoak ilundutako azaleran daudela frogatu daiteke. Tentsio ebakitzaile maximoa zirkulu handienaren erradioa da.

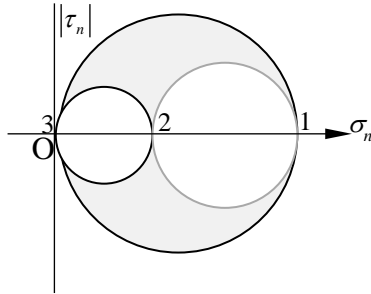


2.14 irudia

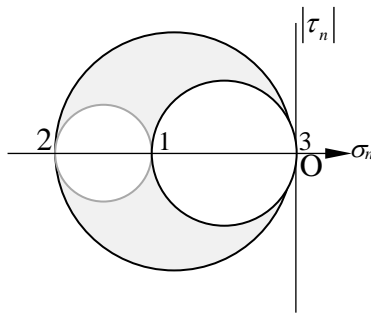
Tentsio egoera lauean, z norabidea norabide nagusia da eta 2.15 irudian azaltzen diren hiru egoerak gerta daitezke. Tentsio ebakitzaile maximoa ez dago beti Oxy planoan. z norabideko tentsio nagusia nulua denez, 3 zenbakiarekin izendatu da. Kasu bakoitzean, Oxy planoari dagokion zirkuluak 1 eta 2 norabide nagusiak ditu eta grisez marraztuta dago.



$$a/ \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$



$$\text{b/ } \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sigma_1$$



$$\text{c/ } \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(-\sigma_2)$$

2.15 irudia

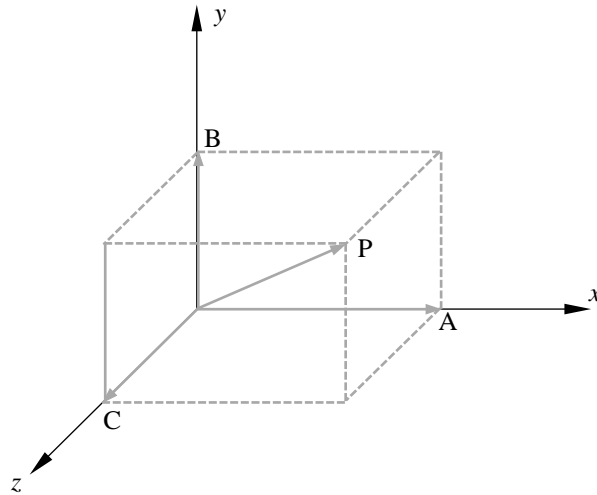
3. DEFORMAZIOAK

3.1. SARRERA

Indarren eraginpean dagoen gorputza deformatu egiten da. Gorputz barneko O puntuaren inguruko elementu diferentziala kontsideratuz, elementuren ertzek luzera aldaketa jasaten dute eta hasierako angelu zuzenak aldatu egiten dira. Gainera, elementuak solido zurrun gisako translazioa eta errotazioa ere jasaten ditu. Gai honetan deformazio unitario normalak eta tangentialak aztertuko dira. Bukaeran, analisia tentsioen gaian garatutakoaren parekoa dela ikusiko da.

3.2. ELEMENTU DIFERENTZIALAREN DEFORMAZIOA

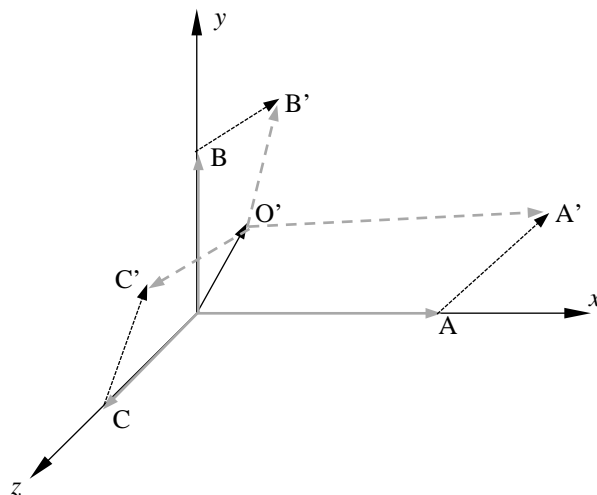
Gorputzaren $O(x,y,z)$ puntuaren inguruan bolumeneko elementu diferentziala analizatzen da. 3.1 irudian ikus daitekenez, deformatu aurretik bere ertzak \overline{OA} , \overline{OB} eta \overline{OC} bektoreak eta bere diagonalak \overline{OP} dira. Atal honetan, gorputza deformatzen denean ertzek jasaten dituzten aldaketak aztertuko dira.



3.1 irudia

Deformatu ondoren, puntuak primadun posizioetara mugitzen dira eta ertz berriak $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$ eta $\overline{O'C'}$ dira, 3.2 irudian ikus daitezenez. O puntuaren desplazamendu bektorea honakoa da:

$$\overline{OO'} = \vec{\delta}(x, y, z) = u(x, y, z)\hat{i} + v(x, y, z)\hat{j} + w(x, y, z)\hat{k} \quad (3.1)$$



3.2 irudia

(3.1) ekuazioaren arabera, u , v eta w ardatzen norabidetako desplazamendu osagaiak dira. Gutxienez hirugarren deribaturarte funtzio jarraituak direla onartuko da. x ardatzeko ertza aztertuz, deformatu ondoren A puntua A' igarotzen da. O-tik A-rako aldaketa bakarrik x ardatzean gertatzen denez, desplazamendua honakoa da:

$$\overline{AA'} = \bar{\delta} + \Delta_x \bar{\delta} = (u + u_{,x} dx) \hat{i} + (v + v_{,x} dx) \hat{j} + (w + w_{,x} dx) \hat{k} \quad (3.2)$$

Hasierako ertza $\overline{OA} = dx \hat{i}$ izanik, 3.2 irudia kontuan hartuz, honakoa betetzen da:

$$\overline{OA} + \overline{AA'} = \overline{OO'} + \overline{O'A'} \quad (3.3)$$

(3.3) ekuaziotik, deformazioaren ondoren x ardatzeko ertzari dagokion bektorea honakoa da:

$$\overline{O'A'} = \overline{OA} + \overline{AA'} - \overline{OO'} = (1 + u_{,x}) dx \hat{i} + (v_{,x}) dx \hat{j} + (w_{,x}) dx \hat{k} \quad (3.4)$$

$\overline{OB} = dy \hat{j}$ eta $\overline{OC} = dz \hat{k}$ deformazioa baino lehen y eta z ardatzei dagokien ertzen bektoreak izanik, B eta C puntuen desplazamenduak honakoak dira:

$$\overline{BB'} = \bar{\delta} + \Delta_y \bar{\delta} = (u + u_{,y} dy) \hat{i} + (v + v_{,y} dy) \hat{j} + (w + w_{,y} dy) \hat{k} \quad (3.5)$$

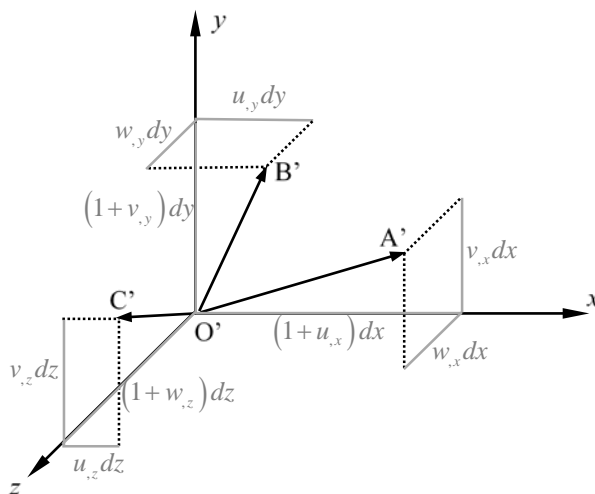
$$\overline{CC'} = \bar{\delta} + \Delta_z \bar{\delta} = (u + u_{,z} dz) \hat{i} + (v + v_{,z} dz) \hat{j} + (w + w_{,z} dz) \hat{k} \quad (3.6)$$

Deformazio ondorengo bektoreak, 3.2 irudia eta (3.1), (3.5) eta (3.6) ekuazioak kontuan izanik honakoak dira:

$$\overline{O'B'} = \overline{OB} + \overline{BB'} - \overline{OO'} = (u_{,y}) dy \hat{i} + (1 + v_{,y}) dy \hat{j} + (w_{,y}) dy \hat{k} \quad (3.7)$$

$$\overline{O'C'} = \overline{OC} + \overline{CC'} - \overline{OO'} = (u_{,z}) dz \hat{i} + (v_{,z}) dz \hat{j} + (1 + w_{,z}) dz \hat{k} \quad (3.8)$$

Irudian ertz berriak eta beren osagaiak 3.3 irudian azaltzen dira. Paralelepipedo zuzena paralelepipedo zeharrean bihurtzen da.



3.3 irudia

3.3. DEFORMAZIO UNITARIOAK

3.3.1 Deformazio unitario normalak

Definizioz, puntu bateko norabide baten *deformazio unitario normala*, norabideak puntu horretan jasaten duen luzera aldaketa erlatiboa da. O puntuan, x norabidean:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{O'A'} - \overline{OA}}{\overline{OA}} \quad (3.9)$$

Zuzenkien luzerak bektoreen moduluak direnez, (3.9) ekuazioak honakoa ematen du:

$$\varepsilon_x = \sqrt{(1+u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2} - 1 \quad (3.10)$$

Erroketa barnean, 1 zenbakia batzen duen α zenbakia honako aproximazio erabili ahal izateko nahiko txikia dela onartuko da: $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$. Beraz, (3.10) honela gelditzen da:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} \left[(u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2 \right] \quad (3.11)$$

y eta z ardatzetako deformazio unitarioak, antzera, honakoak dira:

$$\varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2} \left[(u_{,y})^2 + (v_{,y})^2 + (w_{,y})^2 \right] \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_z = w_{,z} + \frac{1}{2} \left[(u_{,z})^2 + (v_{,z})^2 + (w_{,z})^2 \right] \quad (3.13)$$

Desplazamenduen deribatuek ez dute dimentsiorik. Zenbaki txikiak direla suposatzen bada, 0,02 baino txikiagoak, bigarren mailako gaiak arbuigarriak dira lehen mailakoen parean eta deformazio unitario normalak honela gelditzen dira:

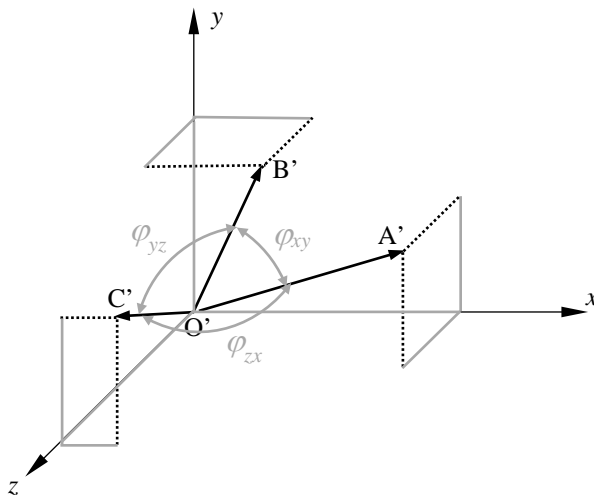
$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad \varepsilon_z = w_{,z} \quad (3.14)$$

Desplazamenduen deribatuak txikiak izatearen baldintza betetzen denean, *desplazamendu gradiente txikien problema* edo *desplazamendu txikien problema* dela esaten da. *Deformazio txikien problema* batean aldiz, ε_x , ε_y eta ε_z zenbaki txikiak dira, baina baliteke desplazamenduen deribatuen karraturen bat arbuigarria ez izatea.

3.3.2 Deformazio unitario tangenzialak

3.4 irudian deformatu ondorengo ertzen arteko angeluak azaltzen dira. *Deformazio tangenzial* edo ebakitzaile unitarioa, *hasieran elkartzutak diren bi norabideren arteko angelu zuzenaren txikitzea bezala definitzen da*. x eta y norabidei dagokien *deformazio tangenzial unitarioa* honakoa da:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \pi - \varphi_{xy} \quad (3.15)$$



3.4 irudia

x eta y norabideek deformatu ondoren osatzen duten angelua φ_{xy} izanik. Beraz, honakoa betetzen da:

$$\overline{O'A'} \cdot \overline{O'B'} = (\overline{O'A'}) (\overline{O'B'}) \cos \varphi_{xy} \quad (3.16)$$

(3.15) ekuaziotik askatuz, $\cos \varphi = \sin \gamma_{xy}$ dela ikusten da. (3.16) ekuazioa kontuan izanik:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{\overline{O'A'} \cdot \overline{O'B'}}{(\overline{O'A'}) (\overline{O'B'})} \quad (3.17)$$

(3.17) ekuazioan (3.4) eta (3.7) ekuazioak ordezkatzuz eta izendatzailean $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$ sinplifikazioa egin daitezkeela onartuz:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{(1+u_{,x})u_{,y} + v_{,x}(1+v_{,y}) + w_{,x}w_{,y}}{\left[1+u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2)\right] \left[1+v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2)\right]} \quad (3.18)$$

Desplazamendu txikien problema batean, bigarren mailako eta maila altugoko gaiak arbuaiatuz:

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{u_{,y} + v_{,x}}{(1 + u_{,x} + v_{,y})} \quad (3.19)$$

(3.19) ekuazioan, izendatzaileko deribatuak 1 baino askoz ere txikiagoak direnez, honako hurbilpena aplika daiteke: $\left(\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \dots\right)$. Berrito 2. mailatik gorako gaiak arbuaiatuz:

$$\sin \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (3.20)$$

Azkenik, deribatuak txikiak izanik $\sin \gamma_{xy} = \gamma_{xy}$ betetzen da. Beste angelu zuzenentzat antzera jokatuz, *desplazamendu txikien problema batean deformazio unitario tengentzialak* honakoak dira:

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \quad \gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} \quad (3.21)$$

3.4. DEFORMAZIO ETA ERROTazio TENTSOREAK

Orain arte, 3.1 irudian azaltzen den elementu diferentzialaren ertzen aldaketak aztertu dira. Oraingoan elementuaren \overline{OP} diagonalaz aztertuko da. Deformatu baino lehen, diagonalaz honakoa da:

$$\overline{OP} = d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (3.22)$$

Deformatu ondoren, diagonalaz $\overline{O'P'} = d\vec{r}'$ izango da. O eta P puntuen arteko koordinatu aldaketak hiru norabidetan gertatzen direnez, P puntuaren desplazamendua honakoa da.

$$\overline{PP'} = \vec{\delta} + d\vec{\delta} = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{,x}dx + \vec{\delta}_{,y}dy + \vec{\delta}_{,z}dz \quad (3.23)$$

Bektoreen arteko erlazioa kontuan izanik:

$$\overline{OP} + \overline{PP'} = \overline{OO'} + \overline{O'P'} \quad (3.24)$$

(3.24), (3.1) eta (3.23) ekuazioetatik, honako erlazioa lortzen da:

$$\overline{O'P'} - \overline{OP} = \overline{PP'} - \overline{OO'} = d\vec{\delta} \quad (3.25)$$

(3.25) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} d\vec{r}' - d\vec{r} &= d\vec{\delta} = \vec{\delta}_{,x} dx + \vec{\delta}_{,y} dy + \vec{\delta}_{,z} dz \\ &= (u_{,x} \hat{i} + v_{,x} \hat{j} + w_{,x} \hat{k}) dx \\ &\quad + (u_{,y} \hat{i} + v_{,y} \hat{j} + w_{,y} \hat{k}) dy \\ &\quad + (u_{,z} \hat{i} + v_{,z} \hat{j} + w_{,z} \hat{k}) dz \end{aligned} \quad (3.26)$$

(3.26) ekuazioa honela idatz daiteke matrize moduan Oxyz erreferentzia sisteman:

$$\{dr'\} = \{dr\} + [g]\{dr\} \quad (3.27)$$

(3.27) ekuazioan $[g]$ *desplazamenduen gradiente matrizea* deitzen da eta ez da simetrikoa:

$$[g] = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Erreferentzia sistemarekiko menpekotasunik ez duen adierazpena erabiliz, \vec{g} *desplazamendu gradienteen tentsorea* azaltzen da:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{g}d\vec{r} \quad (3.29)$$

3x3 mailako edozein matrize, matrize simetriko eta ez simetriko baeen deskonposa daiteke. $[g]$ -ren kasuan, g_{ij} edozein elementu izanik, honakoa betetzen da:

$$g_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.30)$$

e_{ij} elementu simetrikoa eta ω_{ij} elementu antisimetrikoa izanik:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) \quad (3.31)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) \quad (3.32)$$

$[e]$ eta $[\omega]$ matrizeak (3.28), (3.31) eta (3.32) ekuazioak kontuan hartuz, honakoak dira:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(v_{,x} + u_{,y}) & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(w_{,x} + u_{,z}) & \frac{1}{2}(w_{,y} + v_{,z}) & w_{,z} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} - w_{,x}) \\ \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}) & 0 & \frac{1}{2}(v_{,z} - w_{,y}) \\ \frac{1}{2}(w_{,x} - u_{,z}) & \frac{1}{2}(w_{,y} - v_{,z}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Desplazamendu txikien problema bati dagokien (3.14) ekuazioko *deformazio unitario normalak* eta (3.21) ekuazioko *deformazio unitario tangenzialak* kontuan izanik, $[e]$ matrize simetrikoa deformazio unitarioekin erlazionatua dago:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$[e]$ matrize simetrikoa, $[\varepsilon]$ *deformazio matrizea* deitzen da. (3.34) ekuazioko $[\omega]$ matrize antisimetrikoa solido zurrun gisako errotazio batekin erlazionatua dago, ondorengo atalean ikusiko denez, eta *errotazio matrizea* deitzen da. (3.29) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + (\vec{\varepsilon} + \vec{\omega})d\vec{r} \quad (3.36)$$

3.5. DEFORMAZIO ETA ERROTAZIO BEKTOREAK

3.5.1 Errotazio bektorea

(3.36) ekuazioko transformazioaren zati antisimetrikoa hartuz:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\omega} d\vec{r} \quad (3.37)$$

(3.37) ekuazioko 2. batugaia, (3.34) ekuaziko matrizea kontuan hartuz honakoa da:

$$[\omega]\{dr\} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{xz} dz - \omega_{yx} dx \\ \omega_{yx} dx - \omega_{zy} dz \\ -\omega_{xz} dx + \omega_{zy} dy \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

(3.38) ekuazioko emaitza honako biderketa bektorialari dagokiona da:

$$[\omega]\{dr\} = \begin{Bmatrix} \omega_{xz} dz - \omega_{yx} dx \\ \omega_{yx} dx - \omega_{zy} dz \\ -\omega_{xz} dx + \omega_{zy} dy \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_{zy} & \omega_{xz} & \omega_{yx} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times d\vec{r} \quad (3.39)$$

$\vec{\omega} = \omega_{yz} \hat{i} + \omega_{zx} \hat{j} + \omega_{xy} \hat{k}$ izanik. Beraz, (3.37) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r} \quad (3.40)$$

Ondoren, *desplazamendu txikien problema batean* transformazio antisimetrikoa solido zurrun gisako errotazioa dela frogatuko da. Horretarako, honako bi aldeak frogatu behar dira:

- Elementuaren luzera ez da aldatzen
- Bi elementuren arteko angelua ez da aldatzen

Elementuaren luzera ez da aldatzen

Luzera berria $d\vec{r}'$ denez, (3.40) ekuazioa erabiliz bere moduluaren karratua determina daiteke:

$$d\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = dr'^2 = (d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}) \cdot (d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}) = dr^2 + (\omega^2 \sin^2 \theta) dr^2 \quad (3.41)$$

$\vec{\omega}$ eta $d\vec{r}$ bektoreek osatzen duten angelua θ izanik. (3.41) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$dr' = dr\sqrt{1 + \omega^2 \sin^2 \theta} \quad (3.42)$$

Desplazamendu txikien problema batean, erro barneko bigarren batugaia arbuigarria denez, $dr' = dr$. (qed).

Bi elementuren arteko angelua ez da aldatzen

Hasierako $d\vec{r}_1$ eta $d\vec{r}_2$ elementuek deformazio aurretik φ angelua eta $d\vec{r}'_1$ eta $d\vec{r}'_2$ elementuek deformazio ondoren φ' angelua osatzen dutela suposatuko da. Elementuen transformazio ekuazioak honakoak dira:

$$\begin{aligned} d\vec{r}'_1 &= d\vec{r}_1 + \vec{\omega} \times d\vec{r}_1 \\ d\vec{r}'_2 &= d\vec{r}_2 + \vec{\omega} \times d\vec{r}_2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

(3.43) ekuazioko elementu transformatuaren arteko biderketa eskalarra eginez:

$$d\vec{r}'_1 \cdot d\vec{r}'_2 \cos \varphi' = d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \cos \varphi + (\omega dr_1 \sin \theta_1)(\omega dr_2 \sin \theta_2) \cos \beta \quad (3.44)$$

$\vec{\omega} \times d\vec{r}_1$ eta $\vec{\omega} \times d\vec{r}_2$ bektoreek osatzen duten angelua β izanik. Elementuen luzera aldatzen ez dela frogatu denez, hau da, $dr'_1 = dr_1$ eta $dr'_2 = dr_2$ atalez atal $(dr_1 dr_2)$ -gatik zatituz:

$$\cos \varphi' = \cos \varphi + \omega^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \beta \quad (3.45)$$

Desplazamendu txikien problema batean (3.45) ekuazioko bigarren batugaia arbuigarria denez, $\cos \varphi' = \cos \varphi$. (qed).

3.5.2 Deformazio bektorea

Trasformazioaren zati simetrikoa hartuz:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{\varepsilon} d\vec{r} \quad (3.46)$$

Definizioz, *deformazio bektorea* honakoa da:

$$\bar{D}_u = \frac{d\bar{r}' - d\bar{r}}{dr} \quad (3.47)$$

(3.46) ekuazioa kontuan hartuz, (3.47) ekuazioa honela gelditzen da:

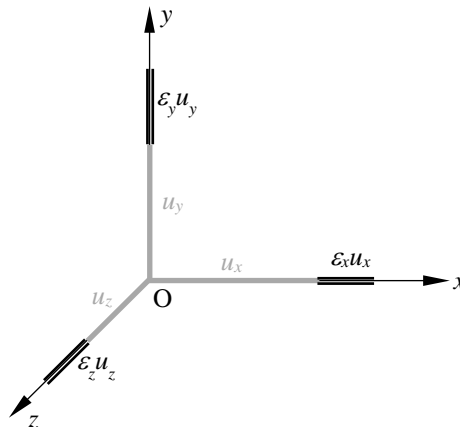
$$\bar{D}_u = \tilde{\varepsilon} \hat{u} \quad (3.48)$$

$d\bar{r}$ bektorearen norabideko bektore unitarioa $\hat{u} = \frac{d\bar{r}}{dr}$ izanik. Matrize moduan, (3.48) ekuazioa honakoa da:

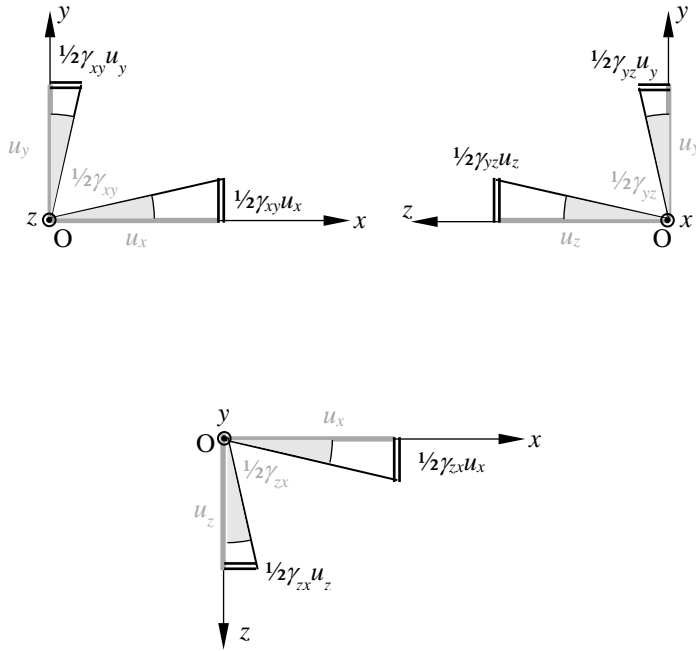
$$\{D_u\} = [\varepsilon] \{u\} \quad (3.49)$$

(3.49) ekuazioa modu hedatuan honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} D_{ux} \\ D_{uy} \\ D_{uz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$



3.5 irudia



3.6 irudia

(3.50) ekuazioko deformazio bektorearen osagaiak, deformazio unitario normalek eta tangenzialek ardatz bakoitzean eragiten dituzten deformazio ekarpenak barneratzen dituzte. 3.5 irudian \hat{u} bektore direktorearen osagaiak deformazio normalen ondorioz nola aldatzen diren azaltzen da. 3.6 irudian bektore unitarioaren osagaiak deformazio tangenzialen ondorioz nola aldatzen diren azaltzen da. Ardatz bakoitzean 3.5 irudian eta 3.6 irudian marra bikoitzez azaltzen diren ekarpenen batura, ardatz horretako deformazio bektorearen osagaia da.

\vec{D}_u deformazio bektorea bere osagai intrintsekotan deskonposa daiteke. \hat{u} -ren norabidean projektatuz, norabidearen ε_u deformazio unitario normala lortzen da:

$$\varepsilon_u = \vec{D}_u \cdot \hat{u} \tag{3.51}$$

(3.51) ekuazioa matrize moduan adieraziz eta (3.49) ekuazioa kontuan izanik:

$$\varepsilon_u = \{u\}^t \{D_u\} = \{u\}^t [\varepsilon] \{u\} \tag{3.52}$$

Deformazio bektorearen osagai tangenzial intrintsekoa honakoa da:

$$\frac{1}{2}\gamma_u = \sqrt{D_u^2 - \varepsilon_u^2} \quad (3.53)$$

Norabide bateko deformazio normalaren formula galga extensiometrikoekin deformazioak neurtzerakoan erabiltzen denez, (3.51) ekuazioa garatuz honakoa lortzen da:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x u_x^2 + \varepsilon_y u_y^2 + \varepsilon_z u_z^2 + \gamma_{xy} u_x u_y + \gamma_{yz} u_y u_z + \gamma_{zx} u_z u_x \quad (3.54)$$

Neurketa plano xy bada, $u_z = 0$ eta (3.54) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x u_x^2 + \varepsilon_y u_y^2 + \gamma_{xy} u_x u_y \quad (3.55)$$

3.6. TENTSIOEN ETA DEFORMAZIOEN ANTZEKOTASUNA

(3.48) ekuazioak, tentsioen $\vec{S}_n = \vec{\sigma} \hat{n}$ transformazioaren parekoa adierazten du. Beraz, tentsioen analisisan garatutako atalak deformazioetan aplikatu daitezke. Parekotasuna ondorengo taulan azaltzen da:

	Tentsioak	Deformazioak
Transformazioa	$\vec{S}_n = \vec{\sigma} \hat{n}$	$\vec{D}_u = \vec{\varepsilon} \hat{u}$
Osagai kartesiar normalak	σ_i	ε_i
Osagai kartesiar tangenzialak	τ_{ij}	$\frac{1}{2}\gamma_{ij}$
Osagai intrintseko normala	$\sigma_n = \vec{S}_n \cdot \hat{n}$	$\varepsilon_u = \vec{D}_u \cdot \hat{u}$
Osagai intrintseko tangenziala	$\tau_n = \sqrt{S_n^2 - \sigma_n^2}$	$\frac{1}{2}\gamma_u = \sqrt{D_u^2 - \varepsilon_u^2}$
Mohr-en zirkuluko ardatzak	$\sigma_n, \tau_n $	$\varepsilon_u, \frac{1}{2} \gamma_u $

Mohr-en zirkulua marrazterakoan, deformazio tangenzialen ondorioz ardatzak erojorratzen alde biratzen badu, zirkuluaren goiko aldean adierazten da.

3.7. FORMA ETA BOLUMEN ALDAKETAK

3.1 irudian azaltzen den elementuaren deformatu ondorengo bolumena determinatzeko, deformazio ondorengo ertzen arteko biderketa mistoa eginez:

$$dV' = \overline{O'A'} \cdot (\overline{O'B'} \times \overline{O'C'}) = \begin{vmatrix} (1+u_{,x}) & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & (1+v_{,y}) & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & (1+w_{,z}) \end{vmatrix} dV \quad (3.56)$$

Hasierako bolumena $dV = dxdydz$ izanik. (3.56) ekuazioko determinantearen garapenean bigarren mailatik gorako gaiak arbuiatuz eta (3.14) ekuazioko deformazio normalak kontuan hartuz:

$$dV' = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dV \quad (3.57)$$

(3.57) ekuazioan lehen mailako gaiak bakarrik hartuz:

$$dV' = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dV \quad (3.58)$$

Deformazio bolumetrikotik unitarioa bolumen aldaketa erlatiboa bezala definitzen da. e-rekin izendatzen da eta (3.58) ekuaziotik, honakoa da:

$$e = \frac{\Delta dV}{dV} = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.59)$$

Gorputz osoaren bolumen aldaketa honakoa da:

$$\Delta V = \int_V \Delta dV = \int_V e dV \quad (3.60)$$

Bolumen aldaketa deformazio normalen ondoriozko ertzen luzera aldaketagatik gertatzen da, 3.5 irudian azaltzen denez. Elementuaren forma aldaketa, deformazio tangenzialen ondorioz gertatzen da. Hauek elementuaren angelu zuzenen aldaketa eragiten dute, elementuak bolumen aldaketarik gabeko distortsioa jasaten duelarik, 3.6 irudian azaltzen denez.

Orain arte azaldutakoagatik, 3.1 irudian azaltzen den elementuak desplazamendu txikien problema batean jasaten dituen aldaketak honakoak dira:

- Translazio hutsa, $\vec{\delta}$ desplazamendu bektorearen arabera.
- Solido zurrun gisako errotazioa, $\vec{\omega}$ bektorearen arabera.
- Deformazio hutsa:
 - Deformazio normalak, ε_i : bolumen aldaketa eragiten dute.
 - Deformazio tangentialak, γ_{ij} : distortsioa edo forma aldaketa eragiten dute.

3.8. BATERAGARRITASUN BALDINTZAK

Deformazio hutsa adierazten duten deformazio tentsorearen 6 osagaiak desplazamenduaren 3 osagaiekin erlazionatuta daude. Desplazamenduak deformazioak integratuz lortu ahal izateko, integragarritasun baldintza batzuk bete behar dira. Baldintza hauek *bateragarritasun ekuazioak* deitzen dira. Desplazamenduak eta errotazioak diferentzial exaktotak izatearen baldintzatik lor daitezke. Honen arabera, desplazamenduak eta errotazioak puntuaren funtzioak dira eta ez integratzeko ibilbidearen menpekoak. Frogapena xy planorako garatzen da, baina antzekoa da 3 dimentsioen kasuan. Desplazamendu osagaien diferentzialak deformazio unitario eta errotazioen menpe honakoak dira:

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon_x dx + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} + \omega_{xy}\right) dy \\ dv &= \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} - \omega_{xy}\right) dx + \varepsilon_y dy \end{aligned} \quad (3.61)$$

(3.61) ekuazioko bi diferentzialak exaktoak izan daitezen, deribatu gurutzatuek berdinak izan behar dute. Baldintza hau inposatuz errotazio osagaien deribatuak lortzen dira:

$$\begin{aligned} \omega_{xy,x} &= \varepsilon_{x,y} - \frac{1}{2}\gamma_{xy,x} \\ \omega_{xy,y} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Errotazioa diferentzial exaktoa izan dadin deribatu gurutzatuek berdinak izan behar dute. Baldintza hau (3.62) ekuazioko lehen deribatuei aplikatuz, honakoa lortzen da:

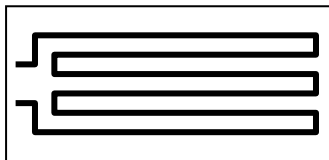
$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (3.63)$$

(3.63) ekuazioa lortzeko $\varepsilon_{xy,xy} = \varepsilon_{xy,yx}$ betetzen dela onartu da. Baldintza hori betetzeko deformazioen bigarren deribatuek jarraiak izan behar dute, Schwarz-en teoremaren arabera. Edo beste modu batera esanda, desplazamenduen hirugarren deribatuek jarraiak izan behar dute. Espazioko bateragarritasun baldintzak antzera lortzen dira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} &= \gamma_{xy,xy} & \varepsilon_{x,yz} &= \frac{1}{2} \left(-\gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} \right)_{,x} \\ \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} &= \gamma_{yz,yz} & \varepsilon_{y,zx} &= \frac{1}{2} \left(-\gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} \right)_{,y} \\ \varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} &= \gamma_{zx,zx} & \varepsilon_{z,xy} &= \frac{1}{2} \left(-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} \right)_{,z} \end{aligned} \quad (3.64)$$

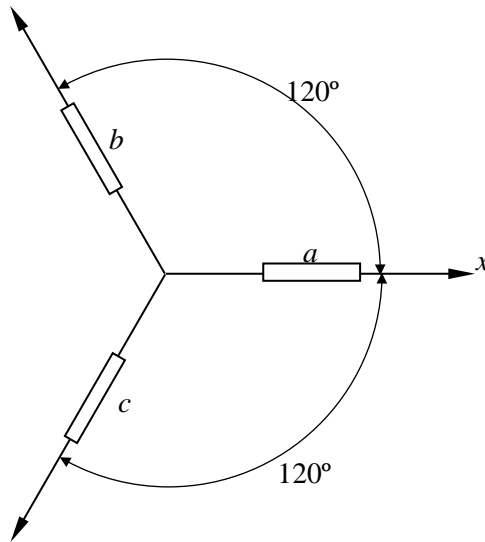
3.9. GALGA EXTENSIOMETRIKOAK

Deformazio unitario normalak esperimentalki neurtzeko erabiltzen diren gailuak dira. Piezen gainazalean itsasten diren erresistentzia elektrikoak dira, 3.7 irudian ikus daitezkeenez. Deformazioak galgaren erresistentzia aldaketa eragiten du eta gailu elektriko batekin neurtzen da. Erresistentzia aldaketa galgaren deformazioarekin erlazionatuta dagoenez, neurketa elektriko deformazio unitario normal batean bihurtzen da.



3.7 irudia

Galgen bidez bakarrik deformazio unitario normalak neurtzen direnez, hiru galgez osatutako konfigurazioak erabiltzen dira puntu baten inguruko deformazio egoera determinatzeko. Erabilienak galgak 45° eta 120° ra dituztenak dira. 3.8 irudian 120° dauden hiru galgako konfigurazioa azaltzen da.



3.8 irudia

b eta c galgen norabideentzat (3.55) ekuazioa erabiliz:

$$\begin{aligned}\varepsilon_b &= \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_c &= \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (3.65)$$

(3.65) emandako ekuazioak atalez atal batu eta kenduz eta $\varepsilon_x = \varepsilon_a$ kontuan izanik, ε_y eta γ_{xy} lortzen dira:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{3}\left[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a\right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)\end{aligned}\quad (3.66)$$

4. GORPUTZ ELASTIKOA

4.1. SARRERA

Tentsio eta deformazioen gaitan, materialaren homogenotasuna eta jarraitasuna bakarrik suposatu dira. Homogeneoa izanik, puntu guztietan propietateak berdinak dira. Gai honetan tentsio eta deformazio osagaien arteko erlazioak aztertuko dira material isotropo, elastiko eta lineal baten kasuan. Materiala isotropoa izateagatik, puntu bateko propietateak berdinak dira edozein norabidetan. Elastikoa izateagatik, materiala deformatu gabeko egoerara itzultzen da jasaten dituen indarrak kendu ondoren. Linealtasunak, tentsio eta deformazioen arteko erlazioak linealak direla adierazten du. Deformazio unitario normal eta tangenzialak txikiak dirlea onartuko da, 0,02 baino txikiagoak. Tentsio eta deformazioen arteko erlazioak materialaren propietate fisiko-kimikoen menpekoak dira. Erlazioak linealak izateagatik, *gainezarpenaren printzipioa* betetzen da, hau da: *eragin batzuri dagokion ondorioa, eragin bakoitzari dagokion ondorioen batura da.*

4.2. DEFORMAZIOAK TENTSIOEN MENPE

Material isotropoetan, portaera elastiko lineala denean, x norabidean traxzioa eragiterakoan, deformazio tangenzialak nuloak dira eta honako deformazio normalak sortzen dira:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.1)$$

E luzetarako elastikotasun modulua edo Young-en modulua da eta bere unitateak tentsioarenak dira. ν Poisson-en koefizientea da, adimentsionala izanik. Tentsio normalek hiru ardatzetan eragiten badute, deformazioak honako taulan adierazten dira:

	σ_x	σ_y	σ_z
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
ε_y	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
ε_z	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Gainezarpenaren printzipioaren arabera errenkada bakoitzeko gaiak batuz, ardatz bakoitzeko deformazioak lortzen dira:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]\end{aligned}\quad (4.2)$$

Tentsio ebakitzailak aplikatzerakoan, deformazio normalak nuluak dira eta bakarrik tentsioaren planoko deformazio tangentialak sortzen dira:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (4.3)$$

G ebakidurako modulu elastikoa edo modulu tangentiala izanik. (4.2) eta (4.3) ekuazioek Hookeren legea osatzen dute.

Ondoren E , G eta ν -ren arteko erlazioa deduzitzen da tentsio lau egoera batentzat. Erlazioa, materialaren propietatea izanik, edozein tentsio egoerarentzat egokia da. xy planoko tentsioen norabide nagusiak honakoak dira:

$$\tan(2\theta_{1ten}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_x} \quad (4.4)$$

Deformazioen norabide nagusiak plano berean honakoak dira:

$$\tan(2\theta_{1def}) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (4.5)$$

(4.3) ekuazioen arabera deformazio tangentialak nuluak dira tentsio tangentialak nuluak direnean eta alderantziz. Ondorioz, material isotropo batean tentsio eta deformazioen norabide nagusiak berdinak dira, hau da, $\tan(2\theta_{1def}) = \tan(2\theta_{1ten})$. (4.2) eta (4.3) ekuazioak (4.5) ekuazioan ordezkaturaz eta hau (4.4)-rekin berdinduz honakoa lortzen da:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.6)$$

Tentsio tangential batek ikur bereko deformazio tangentiala sortzen duenez, G -k positiboa izan behar du eta, ondorioz:

$$\nu > -1 \quad (4.7)$$

4.3. TENTSIOAK DEFORMAZIOEN MENPE

(4.2) ekuazioak atalez atal batuz honakoa lortzen da:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.8)$$

(4.8) ekuaziotik tentsioen batura askatuz:

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{E}{(1-2\nu)} e \quad (4.9)$$

$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ deformazio bolumetrikotik unitarioa izanik. (4.2)₁ ekuazioko eskuin atalarean $\nu\sigma_x$ gaia batuz eta kenduz, eta (4.9) ekuazioa ordezkaturik honakoa lortzen da:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x (1 + \nu) - \nu \frac{E}{(1 - 2\nu)} e \right] \quad (4.10)$$

(4.10) ekuaziotik σ_x askatuz:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \quad (4.11)$$

Beste ardatzetan antzera eginez, tentsio normalak deformazio normalen menpe honakoak dira:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ Lamé-ren koefizientea izanik. Tentsio tangentialak

deformazio tangentialen menpe zuzenean (4.3) ekuazioetatik lortzen dira:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (4.13)$$

“Tentsioak” gaian ikusi denez, tentsio esferikoa $\sigma_e = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ da. “Deformazioak” gaian, bolumen aldaketa e deformazio bolumetrikotik erlazionatua dagoela ikusi da. Beraz, (4.8) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$e = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_e \quad (4.14)$$

(4.14) ekuazioaren arabera, gorputzaren bolumen aldaketa tentsio esferikoarekin dago erlazionatua eta ondorioz, distortsioa tentsio tentsorearen desbideratze osagaiarekin erlazionatua dago.

Tentsio egoera hidrostatis batean, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$ izanik, (4.14) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$p = \frac{E}{3(1-2\nu)} e \quad (4.15)$$

(4.15) ekuaziotik, k bolumeneko elastikotasun moduluak honela definitzen da:

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.16)$$

p presioa positiboa bada bolumena handitzen da eta e positiboa da. Aldiz, p negatiboa bada bolumenta txikitu egiten da eta e negatiboa da. Ondorioz, (4.16) ekuazioko bolumeneko elastikotasun moduluak positiboa izan behar du eta honakoa bete behar da:

$$1 - 2\nu > 0 \Rightarrow \nu < 0,5 \quad (4.17)$$

(4.7) eta (4.17) ekuazioetako baldintzak elkartuz, Poisson-en koefizientearen mugak honakoak dira:

$$-1 < \nu < 0,5 \quad (4.18)$$

4.4. TENPERATURAREN ERAGINA

Temperatura aldaketak deformazio unitario normalak eragiten ditu. Deformazio hauen balioa $\alpha\Delta T$ da, α dilatazio koefizientea eta ΔT temperatura aldaketa izanik, erreferentziatzen deformazio termikorik gabeko egoera hartutua. α konstantea dela eta gainezarpenaren printzipioa erabil daitekela suposatuko da. Ondorioz, deformazio normalak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) ekuazioak honela idatz daitezke:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_x &= \varepsilon_x - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon'_y &= \varepsilon_y - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon'_z &= \varepsilon_z - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (4.20)$$

(4.20) ekuazioetatik, aurreko ataleko prozedura jarraituz, tentsioak deformazioen menpe honakoak dira:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon'_x + \lambda e' \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon'_y + \lambda e' \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon'_z + \lambda e'\end{aligned}\quad (4.21)$$

(4.21) ekuazioan e' honakoa izanik:

$$e' = \varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\alpha\Delta T = e - 3\alpha\Delta T \quad (4.22)$$

4.5. TENTSIO ETA DEFORMAZIO EGOERA LAUA

4.5.1 Tentsio egoera laua

Tentsio egoera lauean, honakoa betetzen da:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad (4.23)$$

Tentsio egoera laua, lodiera txikiko piezetan eta orohar, gorputzen kanpo aldean gertatzen da, z norabide normalean ez baitago deformazioa eragozten duen tentsiorik. (4.20) ekuazioetatik, deformazioak tentsioen menpe honakoak dira:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon'_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon'_z &= \frac{1}{E}[-\nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (4.24)$$

Galga extensiometrikoekin egiten diren neurketetan tentsio egoera laua kontsidera daiteke. (4.21) ekuazio orokorrak erabili ordeztuz, egokiagoa da zuzenean tentsio normalak analitikoki determinatzea. (4.24) ekuazioetako lehen bietatik honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon'_x + \nu\varepsilon'_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\nu\varepsilon'_x + \varepsilon'_y)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Temperaturaren eragina kontuan hartu gabe, (4.24) ekuazioan $\sigma_x = -\sigma_y$ bete behar da $\varepsilon_z = 0$ lortzeko.

4.5.2 Deformazio egoera laua

Deformazio egoera lauean honakoa betetzen da:

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.26)$$

Deformazio egoera laua, lodiera handiko gorputzen barne aldean gertatzen da, deformazio askatasunik ez dagoenean. Deformazioa eragozteko, z norabideko tentsio normalak sortzen dira. Deformazio eta tentsioen arteko erlazioak lortzeko, ekuazio orokorrak erabiltzen dira $\varepsilon_z = 0$ baldintzarekin. Temperaturaren eragina kontuan hartu gabe, (4.12) ekuazioan $\sigma_z = 0$ lortzeko, $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$ bete behar da.

4.6. DEFORMAZIO ENERGIA

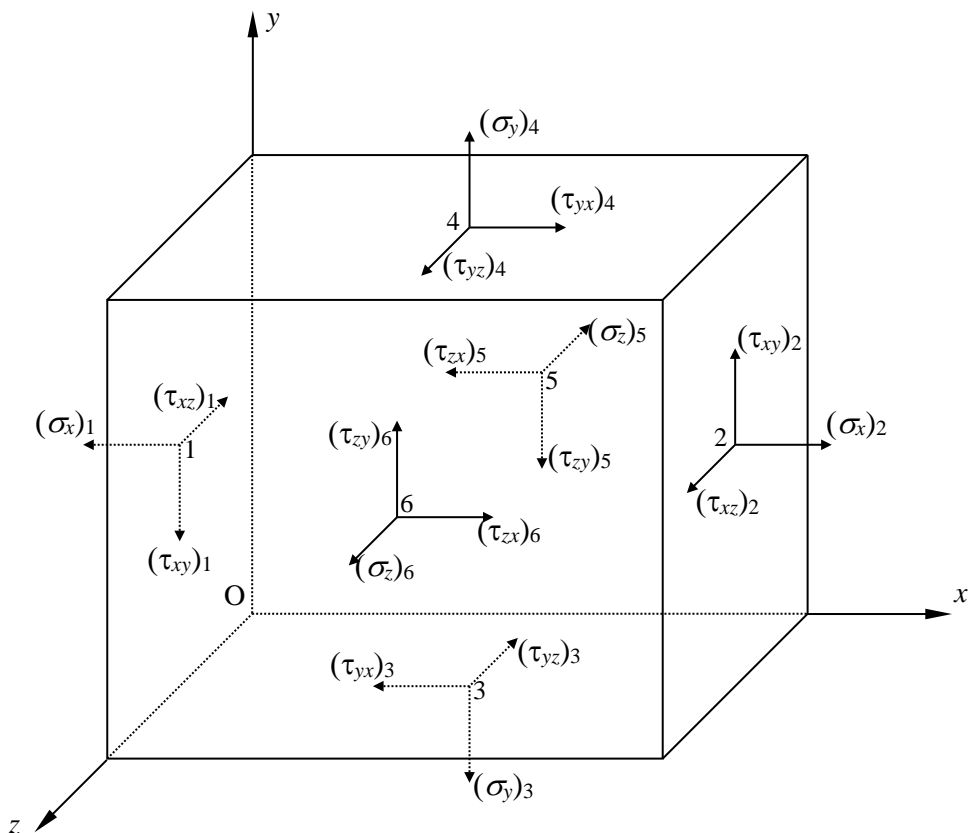
F indarra jasaten duen malguki lineal batean, bere luzapena edo laburpena x izanik, indarraren eta desplazamenduaren arteko erlazioa $F = kx$ da. Deformatu gabeko egoeratik indarrak egindako W lana U energia potentzial elastikoan bihurtzen da:

$$W = U = \frac{1}{2}Fx \quad (4.27)$$

$\frac{1}{2}$ gaia erlazio linealaren ondorio da. Gorputz elastiko baten kasuan, elementu diferentzial batean tentsioek eta bolumen indarrek egiten duten lana determinatuko da. 4.1 irudian elementu diferentziala eta bere aurpegietako tentsioak azaltzen dira.

Ezkerreko 1 aurpegian, tentsioen eta desplazamenduen norantzak aurkakoak izanik, lana honakoa da:

$$-\frac{1}{2} \left[(\sigma_x u)_1 + (\tau_{xy} v)_1 + (\tau_{xz} w)_1 \right] dydz \quad (4.28)$$



4.1 irudia

2 aurpegian, 1 aurpegiarekiko aldageta x ardatzean gertatzen da eta tentsioek eta desplazamenduek norantza bera dute. Ondorioz, lana positiboa da:

$$\frac{1}{2} \left[(\sigma_x u)_1 + (\sigma_x u)_{,x} dx + (\tau_{xy} v)_1 + (\tau_{xy} v)_{,x} dx + (\tau_{xz} w)_1 + (\tau_{xz} w)_{,x} dx \right] dydz \quad (4.29)$$

(4.28) eta (4.29) ekuazioetatik, 1 eta 2 aurpegietan tentsioek egindako lana honakoa da.

$$\frac{1}{2} \left[(\sigma_x u)_{,x} dx + (\tau_{xy} v)_{,x} dx + (\tau_{xz} w)_{,x} dx \right] dydz \quad (4.30)$$

Beheko aurpegia 3 eta goikoa 4 izanik, bertako tentsioek egindako lana antzera determina daiteke, aldaketak y ardatzean direlarik:

$$\frac{1}{2} \left[(\tau_{yx} u)_{,y} dy + (\sigma_y v)_{,y} dy + (\tau_{yz} w)_{,y} dy \right] dx dz \quad (4.31)$$

Atzeko aurpegia 5 eta aurrekoa 6 izanik, tentsioek egindako lana honakoa da:

$$\frac{1}{2} \left[(\tau_{zx} u)_{,z} dz + (\tau_{zy} v)_{,z} dz + (\tau_{yz} w)_{,z} dz \right] dx dy \quad (4.32)$$

Azkenik, 4.1 irudian azaltzen ez diren bolumeneko indarren lana honakoa da:

$$\frac{1}{2} (F_x u + F_y v + F_z w) dV \quad (4.33)$$

Elementu osoan indarrek egindako lana determinatzeko, (4.30)-(4.33) gaietako ekarpenak batu behar dira. Desplazamenduen deribatuak dituzten batugaiak desplazamenduak dituzten batugaietatik bereiziz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} dV \left[(\sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + F_x) u + (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y) v + (\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z) w \right] \\ & + \frac{1}{2} dV \left[\sigma_x u_{,x} + \sigma_y v_{,y} + \sigma_z v_{,z} + \tau_{xy} (v_{,x} + u_{,y}) + \tau_{yz} (w_{,y} + v_{,z}) + \tau_{zx} (w_{,x} + u_{,z}) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

“Tentsioak” gaian ikusitako orekaren ekuazio diferentzialen arabera, (4.34)-ko lehen lerroko batugaiak nuluak dira. Bigarren lerroan berriz, “Deformazioak” gaian, desplazamendu txikien problema batean, aztertutako deformazio normal eta tangentialak azaltzen dira. Beraz, elementu diferentzialean tentsioek egindako lana honakoa da:

$$dW = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (4.35)$$

Malgukiaren kasuan bezala, lan hori U deformazio energia elastikoan bihurtzen dela onartzen da, hau da: $dU = dW$. (4.35) ekuaziotik, *bolumen unitateko energia potentzial elastikoa edo deformazio energia honakoa da:*

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (4.36)$$

Gorputz osoaren *energia potentzial elastikoa edo deformazio energia honakoa da:*

$$U = \int_V U_0 dV \quad (4.37)$$

5. PROBLEMA ELASTIKOA

5.1. SARRERA

”Tentsioak” gaian oreka ekuazioak lortu dira. “Deformazioak” gaian, desplazamenduen eta deformazio unitarioen arteko erlazioez gain, bateragarritasun ekuazioak lortu dira. “Gorputz Elastikoa” gaian, tentsioen eta deformazioen arteko erlazioak aztertu dira. Gai honetan, ekuazio guztiak bildu eta *Elastikotasunaren Teoriako problema orokorra* nola planteatu daitekeen azalduko da.

5.2. ELASTIKOTASUNAREN TEORIAKO EKUAZIOAK

“Tentsioak” gaian, elementu diferentzial batean indarren oreka planteatuz, honako ekuazioak lortu dira:

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + F_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + F_y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

Momentuen oreka ekuezioetatik, tentsio ebakitzzaileak simetrikoak direla ondorioztatu da, hau da $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Ekuazio diferentzial hauek ingurune baldintzak bete behar dituzte. Gorputzaren ingurunean eragiten duten gainazal indarrak \vec{T}_n eta gainazalaren normala \hat{n} izanik, baldintza horiek honakoak dira:

$$\begin{aligned}
T_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\
T_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\
T_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z
\end{aligned} \tag{5.2}$$

“*Deformazioak*” gaian honako erlazioa lortu da desplazamendu osagaien eta deformazio unitarioen artean:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= u_{,x} & \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \\
\varepsilon_y &= v_{,y} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} \\
\varepsilon_z &= w_{,z} & \gamma_{zx} &= w_{,x} + u_{,z}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Gainera, (5.3) ekuazioetako 6 deformazioak integratuz 3 desplazamendu osagaiak lortzeko baldintzak deduzitu dira. Hauek bateragarritasun ekuazioak dira:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} &= \gamma_{xy,xy} & \varepsilon_{x,yz} &= \frac{1}{2} \left(-\gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} \right)_{,x} \\
\varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} &= \gamma_{yz,yz} & \varepsilon_{y,zx} &= \frac{1}{2} \left(-\gamma_{zx,y} + \gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} \right)_{,y} \\
\varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} &= \gamma_{zx,zx} & \varepsilon_{z,xy} &= \frac{1}{2} \left(-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{zx,y} \right)_{,z}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Hooke-ren legeak tentsioak eta deformazioak erlazionatzeko beste 6 ekuazio ematen ditu. Deformazioak tentsioen menpe ematen dituztenak honakoak dira:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Tentsioak deformazioen menpe ematen dituztenak honakoak dira:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Beraz, problema elastikoaren ezezagunak honakoak dira:

- 6 tentsio osagai: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
- 3 desplazamendu osagai: u, v, w
- 6 deformazio osagai: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

15 ezezagunentzat beste 15 ekuazio ditugu:

- (5.1) ekuazioak: 3 oreka ekuazio
- (5.3) ekuazioak: desplazamenduen eta deformazio unitarioen arteko 6 erlazio
- (5.5) edo (5.6) ekuazioak: tentsioen eta deformazioen arteko 6 erlazio

5.3. PROBLEMA ELASTIKOAREN PLANTEAMENDUA

5.3.1 Desplazamenduak ezezagun bezala hartuta

Ingurune baldintzak desplazamendu baldintza bezala ematen direnean, desplazamenduak ezezagun bezala hartzea da egokiena. Tentsioak deformazioen menpe ematen dituzten (5.6) ekuazioak (5.1) oreka ekuazioetan ordezkaturik, hauek deformazioen menpe adierazten dira. Desplazamendu eta deformazio unitarioak erlazionatzen dituzten (5.3) ekuazioak erabiliz, 3 oreka ekuazioak 3 desplazamendu ezezagunen menpe gelditzen dira. Lortzen diren ekuazioak Navier-en ekuazioak deitzen dira eta honakoak direla frogatu daiteke:

$$\begin{aligned}
 F_x + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,x} + G(u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz}) &= 0 \\
 F_y + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,y} + G(v_{,xx} + v_{,yy} + v_{,zz}) &= 0 \\
 F_z + (\lambda + G)(u_{,x} + v_{,y} + w_{,z})_{,z} + G(w_{,xx} + w_{,yy} + w_{,zz}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

5.3.2 Tentsioak ezezagun bezala hartuta

Ingurune baldintzak kanpo indarren moduan ematen direnean, ezezagun bezala tentsioak hartzea da egokiena. (5.5) ekuazioak erabiliz, deformazioak tentsioen menpe lortzen dira. Hauek (5.4) bateragarritasun ekuazioetan ordezkaturik eta (5.1) oreka baldintzak barneraturik, Beltrami-Michell-en 6 ekuazioak lortzen direla frogatu daiteke:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,xx} + \sigma_{x,yy} + \sigma_{x,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,xx} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{x,x} \\
\sigma_{y,xx} + \sigma_{y,yy} + \sigma_{y,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,yy} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{y,y} \\
\sigma_{z,xx} + \sigma_{z,yy} + \sigma_{z,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,zz} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (F_{x,x} + F_{y,y} + F_{z,z}) - 2F_{z,z} \\
\tau_{yz,xx} + \tau_{yz,yy} + \tau_{yz,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,yz} &= -(F_{y,z} + F_{z,y}) \\
\tau_{zx,xx} + \tau_{yz,yy} + \tau_{yz,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,zx} &= -(F_{z,x} + F_{x,z}) \\
\tau_{xy,xx} + \tau_{xy,yy} + \tau_{xy,zz} + \frac{1}{1+\nu} I_{1,xy} &= -(F_{x,y} + F_{y,x})
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ tentsio tentsorearen lehen inbariantea izanik.

5.3.3 Materialen erresistentzia

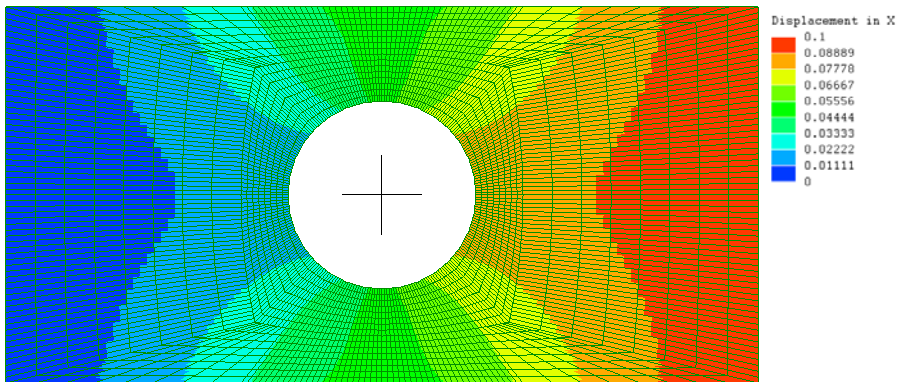
Kasu askotan, gorputzaren ezaugarri geometrikoek hipotesi sinplifikatzaileak egitea ahalbideratzen dute. Adibidez:

- *Pieza prismatikoak*: luzera beren sekzioko dimentsioak baino nabarmenki handiagoa dute
- *Kableak*: trakzio tentsioak bakarrik jasan dezaketela suposatzen da
- *Plakak*: gainazal lauak dira, azaleraren dimentsioak lodierarenak baino nabarmenki handiagoak izanik
- *Oskolak*: gainazal kurbatuak dira, azaleraren dimentsioak lodierarenak baino nabarmenki handiagoak izanik
- *Mintzak*: lodiera txikiko oskolak dira. Trakzio edo konpresioan lan egiten dute

Ikasgai honetan, *pieza prismatikoak* eta *mintzak* aztertuko dira. Pieza prismatikoetan, sekzioko tentsio eta deformazioei buruzko hipotesi sinplifikatzaileak egiten dira. Horrela, Elastikotasunaren Teoriako ekuazioak sinplifikatu egiten dira. Hipotesi sinplifikatzaile horiek erabilia sortzen den ebazpen eremuari *Materialen Erresistentzia* deitzen zaio.

5.3.4 Metodo numerikoak

Konputagailuen garapenari esker, problema elastikoa metodo numeriko desberdinak erabiliz ebatz daiteke modu hurbilduan. Ingeniaritzan hedatu den dagoen metodoa Elementu Finituen Metodoa da: ingurune jarraitua elementu finituetan zatitzen da eta elementuen arteko korapiloen desplazamenduak hartzen dira ezezagun bezala. Deformazio energiarekin erlazionatutako metodoak erabiliz, oreka baldintzak ezartzen dira eta korapilo horietako desplazamenduak lortzen dira ekuazio sistema bat ebatziz. Elementu baten edozein puntutako desplazamendua interpolazio funtzioen bidez determinatzen da. Desplazamendu horiek deribatuz, deformazio unitarioak lortzen dira eta Hooke-ren legea erabiliz tentsioak lortzen dira. 5.1 irudian azaltzen den adibidean, gorputzaren ezkerreko aldeko inguruneak desplazamendua eragotzita du eta eskuin aldeko ingurunean 0,1 mm-ko desplazamendua inposatzen da.



5.1 irudia

6. HUTSEGITE IRIZPIDEAK

6.1. SARRERA

Trakzio saiakuntza batean, σ_e muga elastikoa determina daiteke. *Material harikor* batean, muga horren ondoren materialak egoera plastikoan deformatzen jarraitzen du eta *material hauskor* baten kasuan hautsi egiten da. Bi egoera horietan, materialak huts egin duela esaten da, material harikorraren kasuan hautsi ez bada ere. Tentsio egoera orokor batean, hutsegitea noiz gertatzen den jakitea zailagoa da. Edozein punturen tentsio egoera 3 tentsio nagusiekin adieraz daiteke. Honako galdera planteatu daiteke: tentsio nagusien zein konbinazioentzat iristen da materiala bere hutsegite egoerara? Galdera horri erantzuteko irizpide desberdinak erabil daitezke, baina denek ezaugarri komun bat dute: tentsio egoera orokorra norabide bakarreko egoeran bihurtzen dute, σ_{bal} tentsio baliokidea definituz. Ondoren, kasu guztietan tentsio baliokide hori norabide bakarreko saiakuntzan lortutako muga balioarekin alderatzen da. Ondorioz, $\sigma_{bal} < \sigma_e$ betetzen bada, hutsegiterik ez da gertatzen.

Gai honetan, huts egitetik zein urrun gauden adierazteko, edozein irizpidetan *Segurtasun Faktorea* (SF) honela definituko da:

$$SF = \frac{\sigma_e}{\sigma_{bal}} \quad (6.1)$$

Segurtasun faktorea determinatzeko tentsio egoera ezagutu behar da eta ondorioz konprobaketa kalkuluetan erabiltzen da.

Segurtasun Kofizientea ($SK = n$) aldiz, diseinuko kalkuluak egiterakoan erabiltzen den zenbakia da. Kalkuluetan bi eragin izan ditzazke: materialaren propietateak murriztu edo sistemak jasaten dituen kargak handitu. Ikasgai honetan, materialaren propietateak murriztuko dira, *tentsio onargarria* σ_{on} honela definituz:

$$\sigma_{on} = \frac{\sigma_e}{n} \quad n > 1 \quad (6.2)$$

6.2. TENTSIO MAXIMOAREN IRIZPDIEA: RANKINE

Tentsio normalen balio absolutu maximoa muga elastikora iristen denan, hutsegitea gertatzen da. Tentsio baliokidea honakoa da:

$$\sigma_{bal} = |\sigma_{max}| \quad (6.3)$$

(6.3) ekuazioko tentsio maximoa honakoa izanik:

$$|\sigma_{max}| = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (6.4)$$

Trakzio eta konpresioko muga elastikoak desberdinak badira, σ_{et} eta σ_{ec} hurrenez hurren, (6.3) ekuazioko irizpidea honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} > 0 & \quad \sigma_{bal} < \sigma_{et} \\ \sigma_{max} < 0 & \quad \sigma_{bal} > \sigma_{ec} \end{aligned} \quad (6.5)$$

(6.5) ekuazioaren arabera, tentsio maximoa trazkiokoa bada, muga trakzioko limite elastikoa da eta tentsio maximoa konpresiokoa bada, muga konpresioko limite elastikoa da. Irizpide honek tentsio nagusien arteko elkarrekintzarik ez du kontuan hartzen. Irizpide hau material hauskorretan, σ_{bal} tentsio baliokidea beste tentsio nagusiak baino nabarmenki handiagoa denean erabil daiteke.

6.3. DEFORMAZIO MAXIMOA: SAINT VENANT

Deformazio unitario normalen balio absolutu maximoa balio kritikora iristen denan, hutsegitea gertatzen da. Tentsio baliokidea honakoa da:

$$\sigma_{bal} = E |\varepsilon_{max}| \quad (6.6)$$

Deformazio nagusiak honakoak izanik:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (6.7)$$

Deformazio maximoa balio absolutuan honakoa da:

$$|\varepsilon_{\max}| = \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|) \quad (6.8)$$

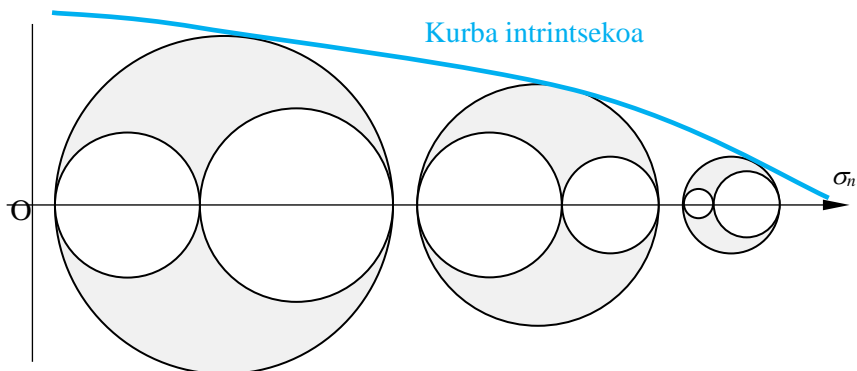
Deformazio maximoaren irizpidea honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\max} > 0 & \quad \sigma_{bal} < \sigma_{et} \\ \varepsilon_{\max} < 0 & \quad \sigma_{bal} > \sigma_{ec}\end{aligned}\quad (6.9)$$

Irizpide hau material hauskorretan deformazio nagusi bat besteak baino nabarmenki handiagoa denean da erabilgarria.

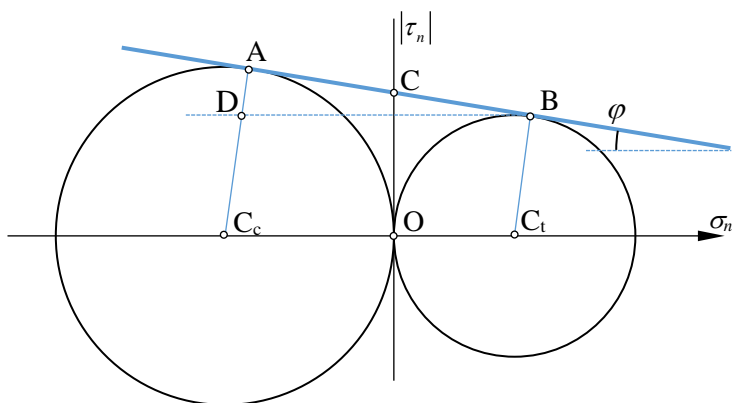
6.4. MOHR-EN EGOERA LIMITEAK

Hutsegitea gertatzen denean tentsio nagusien konbinazioa egoera kritikora heltzen da. Tentsioen egoera horri *Mohr-en zirkulu maximo* bat dagokio. Haustura eragiten duten tentsio egoera desberdinei dagokien Mohr-en zirkuluak marrazten badira, zirkulu horiek guztiak inguratzen dituen kurbari, *kurba intrintsekoa* deitzen zaio, 6.1 irudian azaltzen denez. Tentsio egoera edozein izanik ere, dagokion Mohr-en zirkulu maximoa kurba intrintsekoaren barnean baldin badago, ez da hausturarik gertatzen.



6.1 irudia

Kurba intrintsekoa lortzeak tentsio egoera kopuru desberdin batzuk aztertzea dakarrenez, kurba hori erresistentzia intrintsekoko zuzenagatik ordezkatzeko da, *trakzio hutsa* eta *konpresio hutsa* egoerei dagokien zirkuluak erabiliz, 6.2 irudian azalzen denez.



6.2 irudia

Zuzen intrintsekoaren ekuazioa honakoa da:

$$|\tau_n| = \overline{OC} - \sigma_n \tan \varphi \quad (6.10)$$

6.2 irudian ikusten denez:

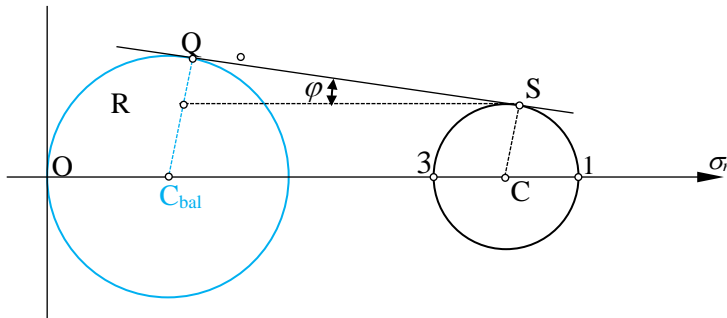
$$\sin \varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{ec} - \sigma_{et})}{\frac{1}{2}(\sigma_{ec} + \sigma_{et})} \quad (6.11)$$

$k = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}}$ izanik, (6.11) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\sin \varphi = \frac{1-k}{1+k} \quad (6.12)$$

Tentsio baliokidea lortzeko, tentsio egoerari dagokion eta σ_{bal} tentsioari dagokion zirkuluen ikutzaile komunak horizontalarekin zuzen intrintsekoaren φ angelu bera osatzen duela suposatzen da, 6.3 irudian ikus daitekenez. Bertan, tentsio egoerari dagokion zirkulu maximoa bakarrik adierazi da.

$|\tau_n|$



6.3 irudia

6.3 irudia aztertuz, honakoa betetzen da:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{QR}}{\overline{QS}} \quad (6.13)$$

(6.13) ekuazioko zuzenkien luzerak, 6.3 irudiaren arabera honakoak dira:

$$\begin{aligned}\overline{QR} &= \frac{1}{2}[\sigma_{bal} - (\sigma_1 - \sigma_3)] \\ \overline{QS} &= \sigma_C - \sigma_{Cbal} = \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_{bal}]\end{aligned}\quad (6.14)$$

(6.14) ekuazioak (6.13) ekuazioan ordezkaturaz eta (6.12) ekuazioa kontuan izanik, honakoa lortzen da:

$$\sigma_{bal} = \sigma_1 - k\sigma_3 \quad (6.15)$$

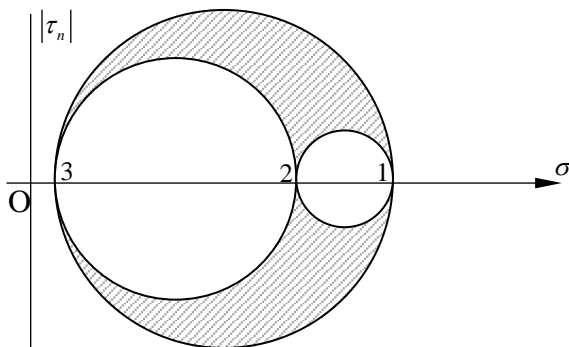
Hutsegitea ez gertatzeko baldintza honakoa da:

$$\sigma_{bal} < \sigma_{et} \quad (6.16)$$

(6.16) ekuazioak konpresio hutseko egoera ere kontuan hartzen du, σ_{et} bakarrik azaltzen bada ere. Izan ere, konpresiozko hutsegitean tentsio egoera $\sigma_1 = 0$ eta $\sigma_3 = -\sigma_{ec}$ izanik, (6.15) ekuaziotik $\sigma_{bal} = \sigma_{et}$ lortzen da. Irizpide hau material harikorrentzan eta hauskorrentzat erabil daiteke.

6.5. TENTSIO EBAKITZAILE MAXIMOA: TRESCA

Irizpide honen arabera, tentsio ebakitzaile maximoak balio kritikoa hartzen duenean hutsegitea gertatzen da.



6.4 irudia

Tentsio nagusiak $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ izendatuz 6.4 irudian azaltzen den bezala, tentsio ebakitzaille maximoa Mohr-en zirkulu maximoaren erradioa denez:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (6.17)$$

Tentsio baliokidearen kasuan tentsio ebakitzaille maximoa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_{bal} \quad (6.18)$$

(6.17) eta (6.18) ekuazioak berdinduz:

$$\sigma_{bal} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (6.19)$$

(6.19) ekuazioaren arabera, Trescaren irizpidea Mohr-en irizpidearen kasu partikularra da, $k = 1$ denean. Kasu honetan, trakzio eta konpresio zirkuluek erradio bera dutenez, zuzen intrintsekoa horizontala da. (6.12) ekuazioaren arabera ere $\sin \varphi = 0$ dela ikusten da. Irizpide hau material harikorrentzat da erabilgarria.

6.6. DISTORTSIO ENERGIA MAXIMOA: VON MISES

Irizpide honen arabera, distortsio energia balio kritikora iristen denean, hutsegitea gertatzen da. “Gorputz Elastikoa” gaian esan bezala, gorputzaren bolumen aldaketa tentsio tentsorearen $\vec{\sigma}_e$ osagai esferikoarekin dago erlazionatua. Bolumen unitateko deformazio energia bolumen aldaketari eta distortsioari dagozkion batugaietan banatuko da:

$$U_0 = U_0^b + U_0^d \quad (6.20)$$

U_0^b bolumen aldaketari dagokiona eta U_0^d distortsioari dagokiona izanik. (6.20) ekuaziotik, distortsio energia honakoa da:

$$U_0^d = U_0 - U_0^b \quad (6.21)$$

Bolumen unitateko deformazio energia elastikoa honakoa da:

$$2U_0 = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad (6.22)$$

(6.22) ekuazioan deformazioak tentsioen menpe idatziz:

$$2U_0 = \frac{1}{E} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) \right] + \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.23)$$

Tentsio esferikoari dagokion tentsio matrizea honakoa da:

$$[\sigma_e] = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad \sigma_e = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6.24)$$

(6.24) ekuazioko matrizea kontuan izanik eta osagaiak (6.23) ekuazioko adierazpen orokorrean barneratuz, bolumen aldaketari dagokion deformazio energia honakoa da:

$$2U_0^b = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_e^2 = \frac{(1-2\nu)}{3E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (6.25)$$

Distortsio energia determinatzeko, (6.23) eta (6.25) ekuazioak (6.21) ekuazioan barneratuz:

$$2U_0^d = \frac{(1+\nu)}{3E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.26)$$

(6.26) ekuazioa tentsio baliokidearen egoerari aplikatuz, $\sigma_x = \sigma_{bal}$ eta beste guztiak nulua direnez:

$$(2U_0^d)_{bal} = \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_{bal}^2 \quad (6.27)$$

Egoera orokorrak eta tentsio egoera baliokideak distortsio energia bera izan behar dutenez, (6.26) eta (6.27) ekuazioak berdinduz, honakoa lortzen da:

$$\sigma_{bal} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (6.28)$$

(6.28) ekuazioa norabide nagusietan honakoa da:

$$\sigma_{bal} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6.29)$$

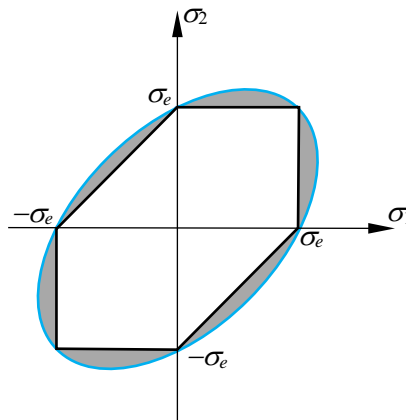
Tentsio egoera laua denean (6.28) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\sigma_{bal} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (6.30)$$

xy planoko tentsio nagusiak σ_1 eta σ_2 izanik, (6.29) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\sigma_{bal} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (6.31)$$

6.4 irudian Tresca eta Von Mises-en irizpidea adierazten da tentsio egoera lau batean. Hexagonoaren barnean dauden puntuak Trescaren irizpidea betetzen dute eta elipsearen barnean daudenak Von Mises-en irizpidea betetzen dute. Grisez azaltzen den gainazaleko tentsio egoerek Von Mises-en irizpidearen arabera ez dute huts egiten baina Trescaren irizpidearen arabera huts egiten dute. Ondorioz, Tresca-ren irizpidea segurtasunaren aldekoa da.



6.5 irudia

7. PIEZA PRISMATIKOAK: SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK

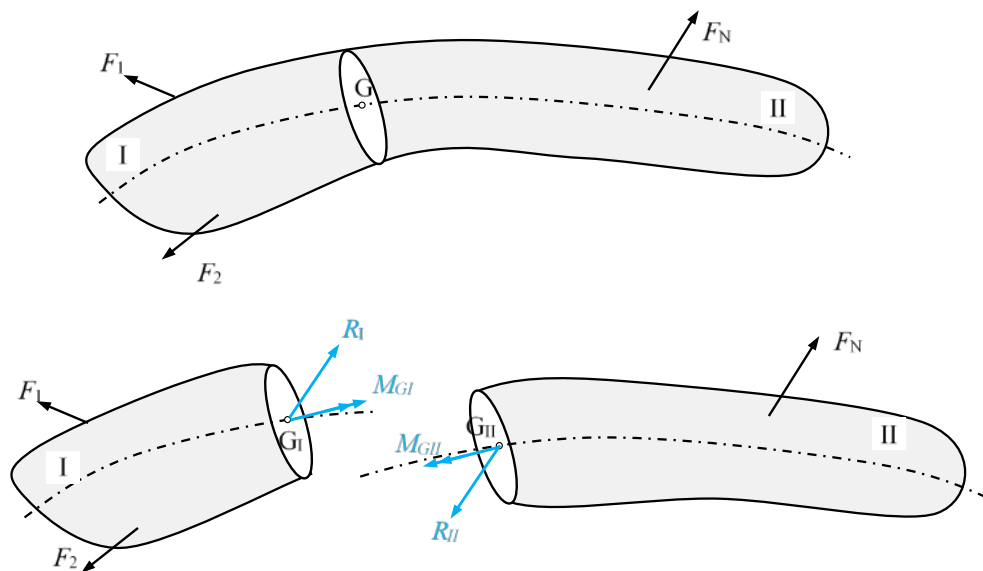
7.1. SARRERA

Gainazal lau baten grabitate zentruak kurba baten zehar ibiltzerakoan sortzen duen bolumena, gainazala eta kurba elkartutak izanik, *pieza prismatikoa bezala definitzen da*. Gainazalari pieza prismatikoaren *sekzio zuzena* edo *sekzioa* eta kurbari, piezaren *ardatza* deitzen zaio. Pieza prismatikoan, luzera dimentsioa sekzioko dimentsioak baino nabarmenki handiagoa da. Egiturretan, orientazio nagusia horizontala denean, *habea* deitzen zaio. Orientazio nagusia bertikala denean, *zutabea* deitzen zaio. Makinen potentzia transmisioko ardatzak eta egitura giltzatuetakoa barrak ere pieza prismatikoak dira.

Gai honetan, pieza prismatikoaren sekzio batean diharduten *barne indarren erresultantea eta momentu erresultantea* grabitate zentrura laburbilduko da. Bi bektore horien osagaiak, *sekzioko indar eta momentuak* dira hurrenez hurren. Tentsioak gainazal unitateko barne indarrak direnez, sekzioko indar eta momentuak sekzioko tentsio eremuaren erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak direla esango dugu.

7.2. SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUAK

7.1 irudian $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N$ kanpoko indar sistema jasaten duen pieza pramatikoaren Solido Askearen Diagrama (SAD) azaltzen da. Indar horien artean, piezak izan ditzaken loturei dagozkien erreakzioak ere barneratzen dira.



7.1 irudia

Pieza pramatikoa sekzio batetik mozten badugu, *I* eta *II* zatia lortzen dira. Mozte gainazalean barne indarrak azaltzen dira, zati bakoitzaren oreka baldintzak bete daitezten. Barne indar sistema hori sekzioaren grabitate zentruan laburbilduz, 7.1 irudian azaltzen diren \vec{R}_i erresultantea eta \vec{M}_{Gi} momentu erresultantea lortzen dira, $i = I, II$ izanik. *I* zatia orekan egon dadin honako ekuazioak bete beha dira:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \left(\sum \vec{F}_{kan} \right)_I + \vec{R}_I = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_G = \vec{0} &\Rightarrow \left(\sum \vec{M}_{Gkan} \right)_I + \vec{M}_{GI} = \vec{0} \end{aligned} \quad (7.1)$$

II zatia orekan egon dadin, honakoa bete behar da:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \left(\sum \vec{F}_{kan}\right)_{II} + \vec{R}_{II} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_G = \vec{0} &\Rightarrow \left(\sum \vec{M}_{Gkan}\right)_{II} + \vec{M}_{GII} = \vec{0}\end{aligned}\quad (7.2)$$

(7.1) eta (7.2) ekuazioetako batukarien esanahia honakoa da:

$\left(\sum \vec{F}_{kan}\right)_i$: $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N$ kanpoko indarren *erresultantea* *i* zatian

$\left(\sum \vec{M}_{Gkan}\right)_i$: $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N$ kanpoko indarren *momentu erresultantea* *i* zatian

Kanpoko indarrak ezagunak direnez, (7.1) eta (7.2) ekuazioen arabera, zati bakoitzaren oreka planteatuz barne indarren *erresultantea* eta *momentu erresultantea* determina daitezke. Kalkulu prozedura honi *A prozedura* deituko zaio.

Akzio-erreakzio printzipoaren arabera honakoa betetzen da:

$$\begin{aligned}\vec{R}_I &= -\vec{R}_{II} \\ \vec{M}_{GI} &= -\vec{M}_{GII}\end{aligned}\quad (7.3)$$

(7.3) ekuazioak (7.1) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\begin{aligned}\left(\sum \vec{F}_{kan}\right)_I &= \vec{R}_{II} \\ \left(\sum \vec{M}_{Gkan}\right)_I &= \vec{M}_{GII}\end{aligned}\quad (7.4)$$

(7.4) ekuazioen arabera, *I* aldeko kanpo indarren *erresultantea* eta *momentu erresultantea* *II* aldeko barne indarren *erresultantearen* eta *momentu erresultantearen* *berdinak dira*, hurrenez hurren. Orain (7.3) ekuazioak (7.2) ekuazioetan ordezkatzuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}\left(\sum \vec{F}_{kan}\right)_{II} &= \vec{R}_I \\ \left(\sum \vec{M}_{Gkan}\right)_{II} &= \vec{M}_{GI}\end{aligned}\quad (7.5)$$

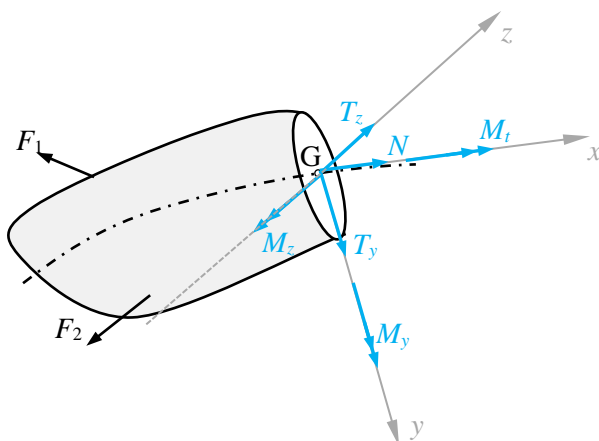
(7.5) ekuazioen arabera, *II aldeko kanpo indarren erresultantea eta momentu erresultantearen berdinak dira*, hurrenez hurren. (7.4) eta (7.5) ekuazioek barne indarren erresultantea eta momentu erresultantea determinatzeko beste bide bat ematen dute, alde bateko kanpo indarren eta beste aldeko barne indarren arteko baliokidetasuna ezarriz. Prozedura honi *B prozedura* deituko zaio.

Aurrerantzean ezker aldea hartuko da eta *I azpiindizea* ez da erabiliko. Honako baldintzak bete behar dituen $Gxyz$ erreferentzia sistema *definitzen* da:

- Sorrera sekzioaren G grabitate zentruan du
- x ardatza *piezaren ardatzarekiko ikutzailera*, hau da, *sekzioarekiko elkartuta* da
- y eta z ardatzak *sekzioaren planoan* daude

Barne indarren erresultantea eta momentu erresultantea ardatzen arabera deskonposatzen dira, 7.2 irudian azaltzenenez:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= N\hat{i} + T_y\hat{j} + T_z\hat{k} \\ \vec{M}_G &= M_t\hat{i} + M_y\hat{j} - M_z\hat{k}\end{aligned}\tag{7.6}$$

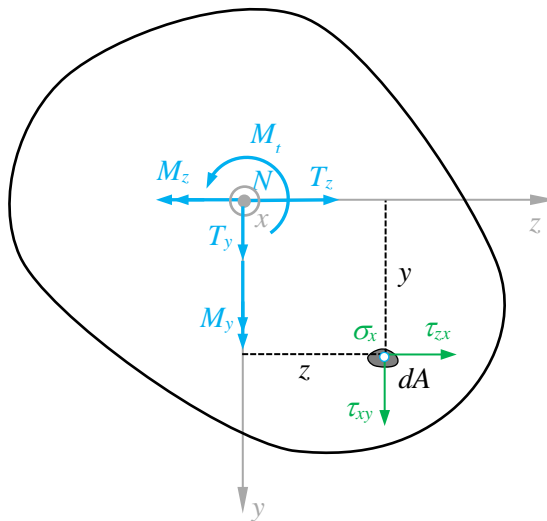


7.2 irudia

(7.6) ekuazioan azaltzen diren barne indarren erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak *sekzioko indar eta momentuak* dira. Izendapena eta esanahi fisikoa honakoa da:

- N : *indar normala, axiala*. Ondoz ondoko bi sekzioen desplazamendu axial erlatiboa eragotzen du
- T_y, T_z : *indar ebakitzaileak, tangentialak*. Ondoz ondoko bi sekzioen desplazamendua eragotzen dute sekzioaren planoan, y, z norabidetan, hurrenez hurren
- M_x : *momentu bihurtzailea*. Bi sekzioen arteko x ardatzarekiko biraketa erlatiboa eragozten du
- M_y, M_z : *momentu makurtzaileak*. Bi sekzioen arteko y, z ardatzekiko biraketa erlatiboak eragotzen ditu, hurrenez hurren

Tentsioak gainazal unitateko barne indarrak direnez, sekzioko indar eta momentuak bertako tentsio banaketarekin erlaziona daitezke. 7.3 irudian sekzioko indar eta momentuak eta y, z koordinatuak dituen dA azalera elementu batean diharduten tentsioak azaltzen dira, sekzioaren planoan. N indar normala eta σ_x tentsio normala planoarekiko elkartutak dira, kanporantz.



7.3 irudia

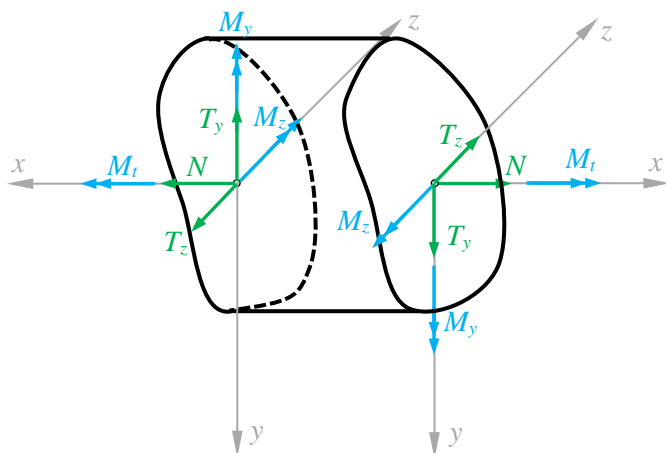
Tentsioen erresultantearen eta momentu erresultantearen osagaiak kalkulatu, *sezzioko indar eta momentuen eta tentsioen arteko erlazioak* honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA & M_t &= \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{xy}z) dA \\
 T_y &= \int_A \tau_{xy} dA & M_y &= \int_A \sigma_x z dA \\
 T_z &= \int_A \tau_{zx} dA & M_z &= \int_A \sigma_x y dA
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

(7.7) ekuazioetan, M_z momentu makurtzailea z ardatzaren aurkako norantzan da positiboa, σ_x tentsioek norantza horretako momentua ematen baitute.

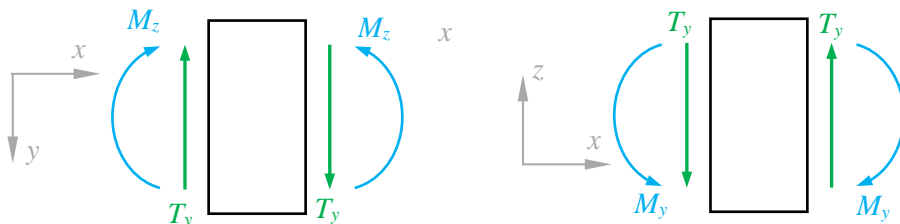
7.3. IKUR HITZARMENA

7.4 irudian azaltzen diren sekzioko indar eta momentuak positiboak direnaren hitzarmena ezarriko da. *Eskuin* sekzioan erreferentzia sistema *zuzena* da eta *ezker* sekzioan *alderantzizkoa*. Beraz, sekzioak eskuin edo ezker sekzio deituko dira bertan duten erreferentzia sistemaren arabera, pieza prismatikoaren orientazioa bertikala bada ere. 7.4 irudiak ez du elementu diferentziala adierazten, hitzarmena adierazteko bi sekzio baizik. Hain zuzen ere, eskuin sekzioa 7.1 irudian azaltzen den I zatiari dagokiona eta ezker sekzioa II zatiari dagokiona da.



7.4 irudia

7.5 irudian momentu hitzarmena xy, xz planoetan proiektatuta azaltzen da. Momentu makurtzaileak biraketa bezala adierazi dira, eskuin eskuaren arauaren arabera. x ardatzeko N indarra eta M_t momentu bihurtzailea ez dira barneratu.



7.5 irudia

z ardatzaren norabideko indarririk ez dagoenean $T_z = M_y = 0$. Ondorioz, bakarrik xy planoaz aztertu behar da. Orduan, $T_y = T$ eta $M_z = M$ izendapena erabiliko dugu.

7.4. ZERRADA DIFERENTZIALAREN OREKA

Ardatz zuzena duen pieza prismatikoarekin dx luzerako zerradaren oreka ekuazioak lortuko dira. 7.6 irudian ikus daitezenez, elementu diferentzialak jasaten dituen indarrak honakoak dira:

- q_x, q_y, q_z : luzera unitateko indar banatuak. q_x piezaren ardatzean aplikatzen da eta q_y, q_z -k piezaren ardatza mozten dute.
- m_t : luzera unitateko momentu bihurtzailea.

Indar eta momentu banatu hauek uniformetzat har daitezke dx luzera diferentzialean. Momentuak G_2 puntuan hartuko dira. x ardatzeko indar eta momentuen oreka planteatuz honakoa lortzen da:

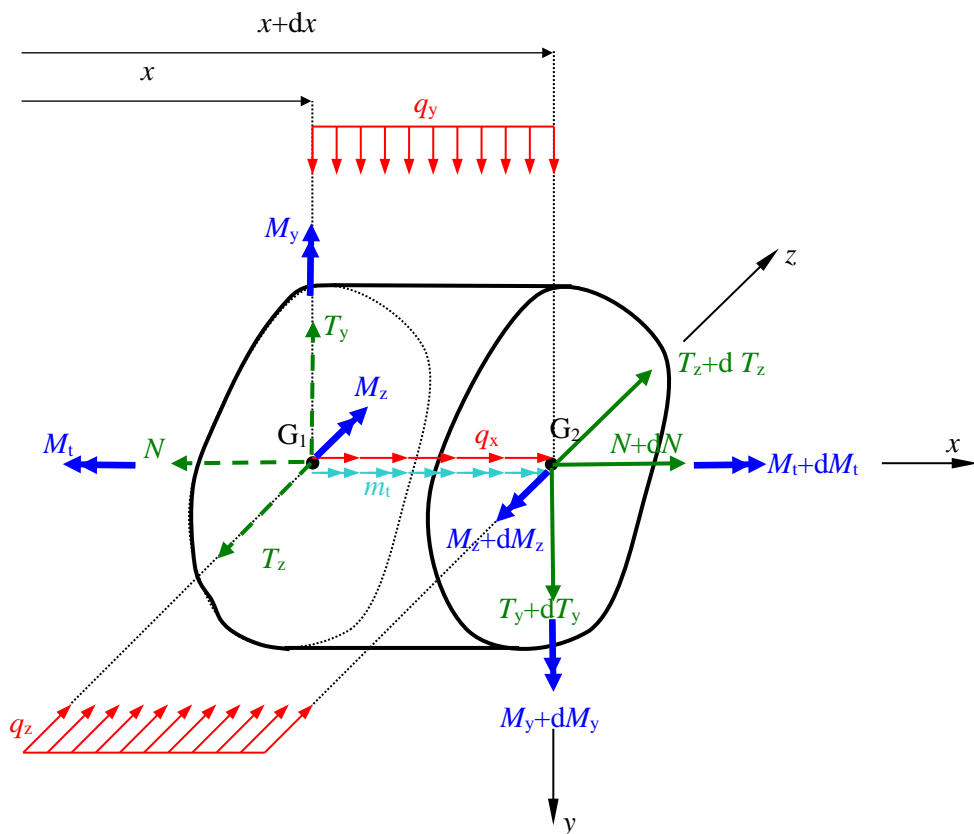
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (N + dN) + q_x dx - N = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = -q_x \tag{7.8}$$

$$\sum M_{G_2, x} = 0 \Rightarrow (M_t + dM_t) + m_t dx - M_t = 0 \Rightarrow \frac{dM_t}{dx} = -m_t \tag{7.9}$$

y ardatzeko indarren eta z ardatzeko momentuen oreka ekuazioak determinatzerakoan, xy planoan erabil daiteke, momentuak biraketa moduan adieraziz. Oreka ekuazioak honakoak dira:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (T_y + dT_y) + q_y dx - T_y = 0 \Rightarrow \frac{dT_y}{dx} = -q_y \quad (7.10)$$

$$\sum M_{G_2z} = 0 \Rightarrow (M_z + dM_z) - T_y dx - M_z + q_y dx \frac{1}{2} dx = 0 \Rightarrow \frac{dM_z}{dx} = T_y \quad (7.11)$$



7.6 irudia

(7.11) ekuazioan, q_y duen batugaia bigarren mailakoa da eta ondorioz arbuigarria. Azkenik, z ardatzeko indarren eta y ardatzeko momentuen oreka ekuazioak

determinatzerakoan, xz planoan erabil daiteke, momentuak biraketa moduan adieraziz. Oreka ekuazioak honakoak dira:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow (T_z + dT_z) + q_z dx - T_z = 0 \Rightarrow \frac{dT_z}{dx} = -q_z \quad (7.12)$$

$$\sum M_{G_{2y}} = 0 \Rightarrow (M_y + dM_y) - T_z dx - M_y + q_z dx \frac{1}{2} dx = 0 \Rightarrow \frac{dM_y}{dx} = T_z \quad (7.13)$$

(7.13) ekuazioan q_z duen batugaia bigarren mailakoa da eta ondorioz arbuigarria. Kasu askotan, z norabidean indarrak ez dago eta analisisia xy planoan egin daiteke. Hau da, $q_z = 0$ $T_z = 0$ $M_y = 0$ betetzen da. Horrelakoetan, $q_y = q$ $T_y = T$ $M_z = M$ izendapena erabiltzen da eta (7.10) eta (7.11) oreka ekuazioak honela gelditzen dira:

$$\frac{dT}{dx} = -q \quad (7.14)$$

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (7.15)$$

7.5. SEKZIOKO INDAR ETA MOMENTUEN DIAGRAMAK

Atal honetan indarrak y ardatzaren norabidea duteneko kasua aztertuko da bakarrik. Ondorioz, $T_y = T$ indar ebakitzzaileen eta $M_z = M$ momentu makurtzaileen diagramak aztertuko dira. Nagusiki erabiliko diren indar banatuak hiru motatakoak dira:

- $q = 0$; indar banatua nulua da. Indar bilduak egon daitezke
- $q = q_0$; indar banatua uniforme da
- $q = q_1 x + q_0$; indar banatua lineala da

Indar linealaren kasuak beste biak barneratzen ditu; izan ere, $q_1 = 0$ bada, indarra uniforme da; $q_0 = q_1 = 0$ bada, indar banatua nulua da. Beraz, indar lineala aztertuz beste birentzat ondorioak atera daitezke. (7.14) ekuazioa integratuz, indar ebakitzalea honakoa da:

$$T = -\frac{1}{2}q_1x^2 - q_0x + T_0 \quad (7.16)$$

T_0 integrazio konstantea izanik. (7.15) ekuazioa integratuz, momentu makurtzaileen ekuazioa honakoa da:

$$M = -\frac{1}{6}q_1x^3 - \frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0 \quad (7.17)$$

M_0 integrazio konstantea izanik. (7.16) eta (7.17) ekuazioak T eta M -ren ezaugarri nagusiak aztertzeko erabil daitezke, ondorengo taulan ikus daitekenez.

q	T	M
$q = 0$	T_0	$T_0x + M_0$
$q = q_0$	$-q_0x + T_0$	$-\frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0$
$q = q_1x + q_0$	$-\frac{1}{2}q_1x^2 - q_0x + T_0$	$-\frac{1}{6}q_1x^3 - \frac{1}{2}q_0x^2 + T_0x + M_0$

Beheko taulan, T eta M zein funtzio mota diren azaltzen da:

q	T	M
$q = 0$	Uniformea	Lineala
$q = q_0$	Lineala	Parabola
$q = q_1x + q_0$	Parabola	Funtzio kubikoa

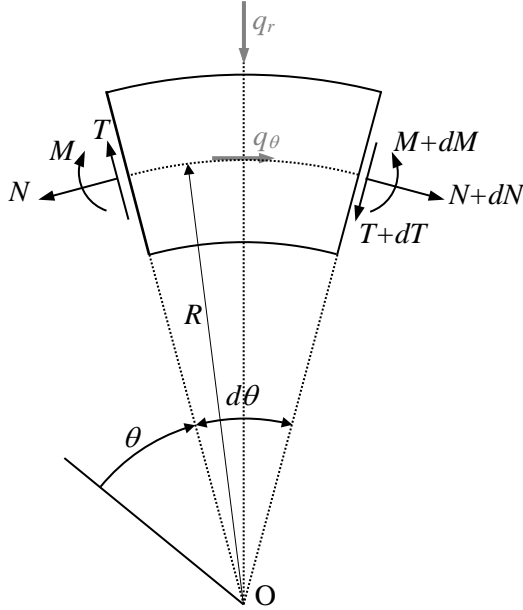
Diagramen beste ezaugarri batzuk honakoak dira:

- (7.15) ekuazioaren arabera, puntu batean $T = 0$ bada, M -k ikutzaile horizontala du
- Indar bildu bat aplikatuta dagoenean, T -ren diagraman aplikatutako indarraren balioko lehen mailako ezjarraitasuna dago
- Momentu bildu bat aplikatuta dagoenean, M -ren diagraman aplikatutako momentuaren balioko lehen mailako ezjarraitasuna dago

7.6. ARDATZ KURBOKO PIEZA PRISMATIKOAK

7.7 irudian ardatz kurbo planoaren duen pieza prismatiko baten elementu diferentziala azaltzen da. N , T eta M indarrak eta momentua θ angeluaren menpeko funtzioak direla

suposatzen da. R kurbadura erradioa da eta hau ere θ -ren menpekoa da. Pieza kurbatuak q_r eta q_θ indar banatu erradiala eta tangenziala jasaten ditu bere ardatzean, hurrenez hurren. Indar hauek piezaren ardatzean banatuta daude.



7.7 irudia

Norabide erradial eta tangenzialean indarren oreka ekuazioak aplikatuz eta $\sin(\frac{1}{2}d\theta) = \frac{1}{2}d\theta$ eta $\cos(\frac{1}{2}d\theta) = 1$ dela kontuan izanik, honakoa lortzen da.

$$\sum F_\theta = 0 \Rightarrow \frac{dN}{d\theta} = T - q_\theta R \tag{7.18}$$

$$\sum F_r = 0 \Rightarrow \frac{dT}{d\theta} = -N - q_r R \tag{7.19}$$

O rekiko momentuak hartuz honakoa lortzen da:

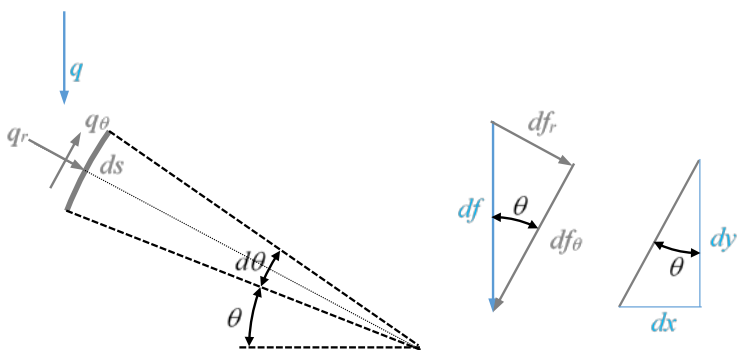
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \frac{dM}{d\theta} = R \frac{dN}{d\theta} + q_\theta R^2 \tag{7.20}$$

(7.20) ekuazioan (7.18) ekuazioa ordezkatzuz honakoa lortzen da:

$$\frac{dM}{d\theta} = TR \quad (7.21)$$

(7.18)-(7.21) ekuazioek adierazten dutenez, pieza prismatiko kurboetan indar normala momentu makurtzaile eta indar ebakitzailarekin erlazionatua dago.

Pieza prismatiko batek jasaten duen karga kasu askotan luzera horizontal unitateko q indar bertikala da. Ondoren, karga banatu horrek q_r , q_θ -rekin duen erlazioa aztertuko da.



7.8 irudia

7.8 irudian, alde batetik piezaren ds luzera elementua, jasaten duen q indarra eta lortu nahi diren q_r , q_θ azaltzen dira. q horizontalean banatutako indarra eta q_r , q_θ piezaren ardatzean banatutako indarrak direnez, ezin dira zuzenean deskonposatu. Horregatik, 7.8 irudian honako indarren hirukia barneratu da:

$$df = q dx \quad df_r = q_r ds \quad df_\theta = -q_\theta ds \quad (7.22)$$

(7.22) ekuazioan, df norabide erradial eta tangenzialean deskonposatzerakoan df_θ indarrak q_θ -ren aurkako norantza duela ikusten denez, ikur negatiboa barneratu da. ds eta dx luzeraren arteko erlazioa ikusteko hirukia ere barneratu da, hau da:

$$dx = \sin \theta ds \quad (7.23)$$

7.8 irudiaren arabera, indar erradial eta tangenziala df deskonposatuz lor daitezke, honakoak izanik:

$$\begin{aligned}df_r &= df \sin \theta \\df_\theta &= df \cos \theta\end{aligned}\tag{7.24}$$

(7.22)-ko df eta (7.23)-ko erlazioa (7.24) ekuazioetan barneratuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned}df_r &= q \sin^2 \theta ds \\df_\theta &= q \sin \theta \cos \theta ds\end{aligned}\tag{7.25}$$

Azkenik, (7.25) ekuazioa (7.22)-ko df_r eta df_θ -rekin alderatuz, indar banatu tangenziala eta erradiala q -ren menpe lortzen dira:

$$\begin{aligned}q_r &= q \sin^2 \theta \\q_\theta &= -q \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\tag{7.26}$$

8. TRAKZIOA ETA KONPRESIOA

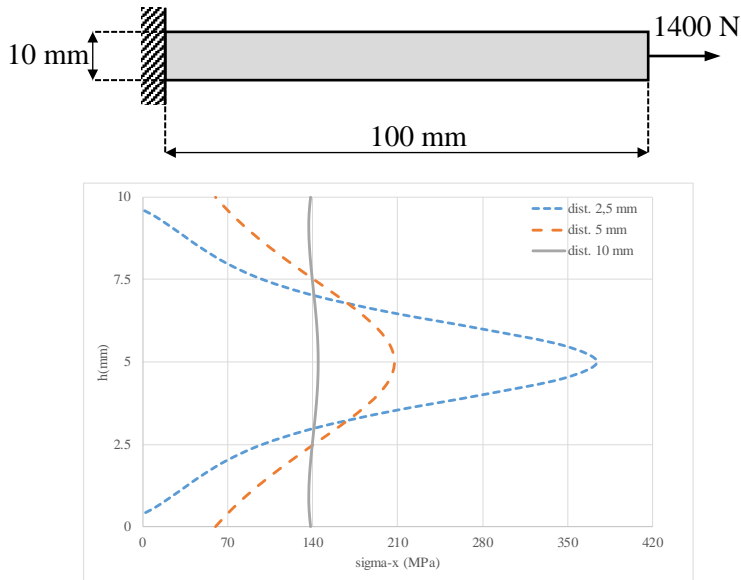
8.1. SARRERA

Gai honetan trakzioa eta konpresioa jasaten duten pieza prismatikoak aztertuko dira. Sekzioko indar bakarra N indar normala da, egitura giltzatueta gertatzen den bezala. Presio jasaten duten lodiera txikiko sistemak ere aztertuko dira, bertako hormek trakzioan edo konpresioan lan egiten baitute. Gai honetan, *Materialen Erresistentzia* atalean sartzen gara, deformazioei eta tentsioei buruzko hipotesi sinplifikatzaileak erabiliko baititugu. *Materialen Erresistentzian*, orohar, bi sistema mota aztertzen dira:

- *Sistema isostatikoak*: Estatikako ekuazioak nahikoa dira indar ezezagunak determinatzeko. Sistemak orekan egoteko lotura kopuru minimoa du. Hiru hankako mahai bat sistema isostatikoaren adibidea da.
- *Sistema hiperestatikoak*: Estatikako ekuazioak ez dira nahikoa indar ezezagunak determinatzeko. Sistemak orekan egoteko behar dituen baino lotura gehiago ditu. Lau hankako mahai bat sistema hiperestatikoaren adibidea da. Estatikako ekuazioez gain, deformazio prozesuarekin erlazionatutako ekuazioak erabili behar dira. Ekuazio hauei, *desplazamenduen bateragarritasun ekuazioak* deitzen zaie.

Materialen Erresistentzian, orohar, *Saint Venant-en printzipioa* erabiltzen da: indar bilduen inguruan sortzen diren tensio egoera partikularrak desagertu egiten dira indarren aplikazio puntutik distantzia batera. Distantzia hori sekzioaren dimentsioen ordenakoa da. 8.1 irudian 100 mm-luzera eta 10x10 mm²-ko sekzio karratua duen pieza

zuzen baten tentsioak azaltzen dira 1400 N-eko karga jasaten duenean. Indarraren aplikazio puntutik 2,5 mm-ra, 5 mm-ra eta 10 mm-ra dauden sekzioetako tentsioak azaltzen dira. Elementu Finituen Metodoa erabiliz ebatzi da, 0,5 mm-ko aldea duten tentsio laueko 4000 elementu karratu erabiliz.



8.1 irudia

2,5 mm-ko distantziara karga bilduaren eragina nabarmena da, baina 10 mm-ra dagoen sekzioan tentsio banaketa uniformetzat har daiteke. 5 mm-ra tarteko egoera bat ikus daiteke.

8.2. DEFORMAZIOAK ETA TENTSIOAK

Bernoulli-ren hipotesiaren arabera, sekzioek lau eta beraiekiko paralelo jarraitzen dute deformazio ondoren. Ondorioz, deformazio unitario normal eta tangenzialek uniformeak izan behar dute sekzioan, honek lau eta paralelo jarrai dezan. Deformazio tangenzialak nuluak izan behar dutela frogatuko da: sekzioan γ_{xy} , γ_{zx} deformazioak badaude eta uniformeak badira, tentsio ebakitzailiek ere uniformeak izan behar dute, $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ $\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$ erlazioen arabera. Baina indar ebakitzailak nuluak direnez:

$$\begin{aligned} T_y = 0 &\Rightarrow \int_A \tau_{xy} dA = 0 \\ T_z = 0 &\Rightarrow \int_A \tau_{zx} dA = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

(8.1) ekuazioan, tentsio ebakitzzaileak uniformeak direnez, integraletatik biderkagai komun bezala atera daitezke:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} A = 0 &\Rightarrow \tau_{xy} = 0 \Rightarrow \gamma_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} A = 0 &\Rightarrow \tau_{zx} = 0 \Rightarrow \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

(8.2) ekuazioaren arabera, absurdo bidezko frogaz, deformazio tangenzialek nuluak izan behar dutela ondorioztatu da. Gainera, y , z norabidetan deformazio askatasuna dagoela suposatuko da eta ondorioz $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Deformazio unitario normalak, Hooke-ren legea aplikatuz, honakoak dira:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_0 \quad (8.3)$$

ε_0 hasierako deformazio izanik, sekzioan uniformeak suposatzen dena. Temperatura aldaketaren kasuan, $\varepsilon_0 = \alpha \Delta T$. L luzerako barra baten kasuan, hasieran h luzeagoa bada fabrikazio errore baten ondorioz, $\varepsilon_0 = \frac{h}{L}$. Tentsioa askatuz honakoa gelditzen da:

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x - \varepsilon_0) \quad (8.4)$$

(8.4) ekuazioan deformazioak uniformeak direnez, tentsio banaketa ere uniformea da. Sekzioko indar bakarra N indar normala denez:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x A \Rightarrow \sigma_x = \frac{N}{A} \quad (8.5)$$

(8.5) ekuazioaren arabera tentsio banaketa uniformea da, 8.1 irudian 10 mm-ko distantziara ikusten den bezala.

8.3. LUZERA ALDAKETA

L luzera duen eta bere sekzioetan N indar normala jasaten duen barra baten kasuan, hasieran dx luzera duen zatiaren deformazio unitarioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (8.6)$$

Luzera aldaketa osoa determinatzeko, zati guztien luzera aldaketan batura eginez:

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \frac{\Delta dx}{dx} dx = \int_0^L \varepsilon_x dx \quad (8.7)$$

(8.3) eta (8.5) ekuazioak (8.7) ekuazioan ordezkaturaz:

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon_x dx = \int_0^L \left(\frac{N}{EA} + \varepsilon_0 \right) dx \quad (8.8)$$

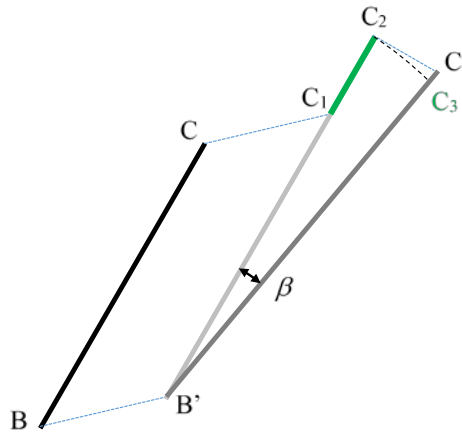
N indar normala, A sekzioaren azalera eta ε_0 hasierako deformazioa uniformeak badira barran zehar, luzera aldaketa honakoa da:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} + \varepsilon_0 L \quad (8.9)$$

8.4. EGITURA GILTZATUAK: BARREN DEFORMAZIO

PROZESUA

Egitura giltzatuetan (8.9) ekuazioko kasua betetzen da. Barra baten deformazio prozesuan, barrak translazioa, luzera aldaketa eta solido zurrun gisako errotazioa jasaten ditu, 8.2 irudian azaltzen denez.



8.2 irudia

Deformazio prozesua honakoa da:

1. (BC) barra (B'C₁) posiziora igarotzen da *translazio* bidez
2. (B'C₁) eta (B'C₂) posizioen artean *deformazio hutsa* gertatzen da, barra luzatuz
3. (B'C₂)-tik (B'C₃)-ra: barrak B'-ren inguruan solido zurrun gisa errotatzen du
4. (C₂C₃) arkuak (C₂C') ikutzaileagatik ordezkatzen da

Barraren luzera aldaketa determinatzeko, bukaerako barraren posizioa hasierakoaren gainean proiektatzen da, β angelua txikia dela kontuan izanik. 8.3 irudiaren arabera:

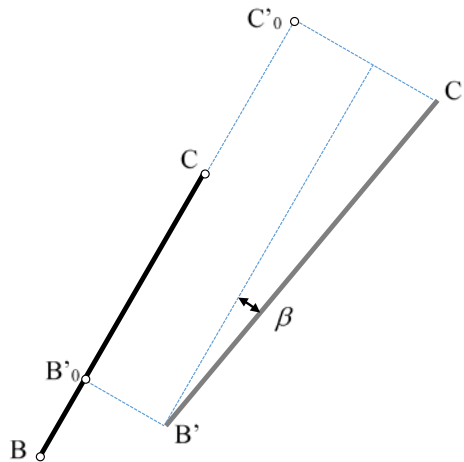
$$\Delta L = \overline{B'C'} - \overline{BC} = \overline{B'_0C'_0} - \overline{BC} \quad (8.10)$$

(8.10) ekuazioko berdintasuna angeluaren txikitasunaren ondorio da, hau da:

$$\overline{B'_0C'_0} = \overline{B'C'} \cos \beta = \overline{B'C'} \quad (8.11)$$

8.3 irudiaren arabera, bukaerako luzera hasierako luzeraren menpe idatziz, (8.10) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\Delta L = \overline{B'_0C'_0} - \overline{BC} = \overline{BC} - \overline{BB'_0} + \overline{CC'_0} - \overline{BC} = \overline{CC'_0} - \overline{BB'_0} \quad (8.12)$$

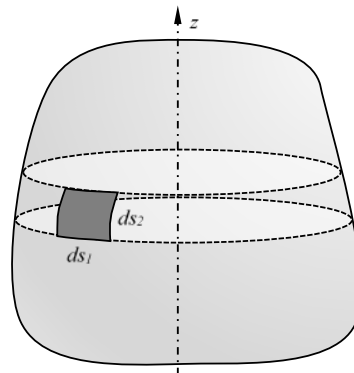


8.3 irudia

8.5. LODIERA TXIKIKO EGITURAK

8.5.1 Biltegiak

p barne presioa jasaten duen biraketa-biltegia aztertuko da. Bere hormen t lodiera gainazalaren kurbadura erradioekin alderatuz txikia bada, biraketa ardatzarekiko elkartutak diren zirkuluetan (*paraleloak*) eta beren norabide elkartutetan (*meridianoak*) tentsio normalak daude bakarrik. Hau da, 8.4 irudian azaltzen diren t lodierako eta ds_1 , ds_2 luzerako elementuetan, hurrenez hurren. Ondorioz, norabide horiek nagusiak dira. 8.4 irudian azaltzen den elementua isolatuz eta oreka planteatuz tentsioek presioarekin duten erlazioa lor daiteke.

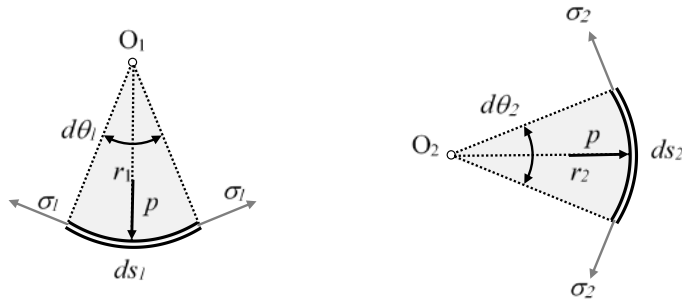


8.4 irudia

8.5 irudian, elementuaren bi projekzio ikusten dira, ds_1 , ds_2 arkuei dagokien planoetan, hurrenez hurren. Oreak planteatzerakoan, bi irudietako tentsioak hartu behar dira kontuan:

$$pds_1ds_2 = 2\sigma_1ds_2t \sin\left(\frac{1}{2}d\theta_1\right) + 2\sigma_2ds_1t \sin\left(\frac{1}{2}d\theta_2\right) \quad (8.13)$$

(8.13) ekuazioan adierazten denez, σ_1 tentsioak ds_2 luzerako elementuan eta σ_2 tentsioak ds_1 luzerako elementuan eragiten dutela azpimarratu behar da.



8.5 irudia

Angeluak txikiak direla eta $ds_i = r_i d\theta_i$ dela kontuan izanik, (8.13) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$\frac{p}{t} = \frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} \quad (8.14)$$

Beste tentsio nagusiaren balioa $\sigma_3 = -p$ da hormaren barne aldean eta $\sigma_3 = 0$ kanpo aldean. Beste bi tentsio nagusiak baino nabarmenki txikiagoa denez, nulua dela suposatuko da.

Esfera baten kasuan kurbadura erradioak berdinak dira, hau da, $r_1 = r_2 = r$. Tentsioak ere berdinak dira edozein puntutan, simetriagatik. (8.14) ekuazioan ordezkaturaz:

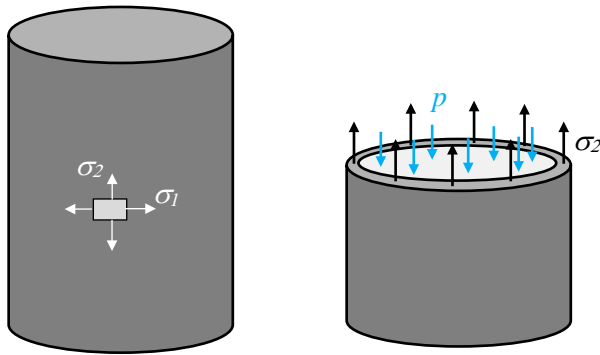
$$\sigma = \frac{pr}{2t} \quad (8.15)$$

Zilindro baten kasuan $r_1 = R$ $r_2 = \infty$ denez, (8.14) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad (8.16)$$

σ_2 lortzeko, zilindroa bere ardatzarekiko elkartzuta den plano batetik mozten da, 8.6 irudian ikus daitekeen bezala. Oreka planteatuz eta hormaren lodiera txikia dela kontuan hartuz honakoa lortzen da:

$$p\pi r^2 = 2\pi r t \sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (8.17)$$

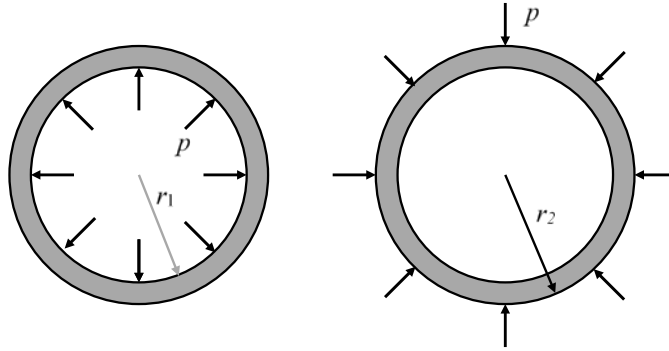


8.6 irudia

8.6 irudian azaltzen den presioa kendutako zatiak isolatu denari eragindako presioa da. Beraz, isolatutako zatian presioa eragiten duen jariakina barnean utzi da.

8.5.2 Eraztunak

Barne edo kanpo presioa jasaten duten zilindro irikiak dira. Ondorioz, $\sigma_2 = 0$.



8.7 irudia

Tentsioentzat ez da azpiindizirik erabiliko. 1 eta 2 azpiindiezek barne eta kanpo erradioentzat erabiliko dira, hurrenez hurren, 8.7 irudian azaltzen denez. Presioak r_1 barneko erradioan eragiten duenean, tentsioak trakziokoak dira eta deformazioak positiboak dira:

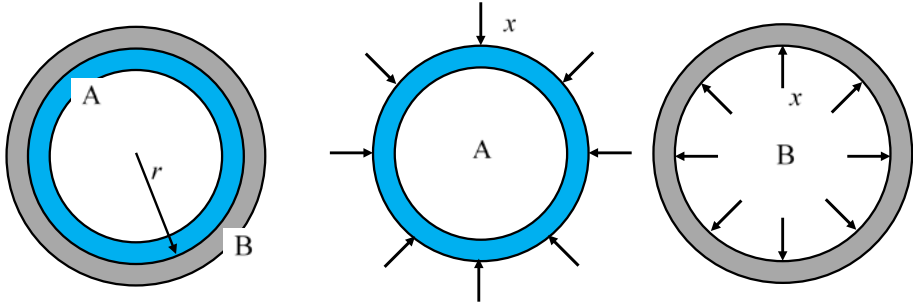
$$\sigma = \frac{pr_1}{t} \quad \varepsilon = \frac{pr_1}{Et} + \varepsilon_0 \quad (8.18)$$

Presioak r_2 kanpoko erradioan eragiten duenean tentsioak konpresiokoak dira eta deformazioak negatiboak dira.

$$\sigma = -\frac{pr_2}{t} \quad \varepsilon = -\frac{pr_2}{Et} + \varepsilon_0 \quad (8.19)$$

ε deformazioak zirkunferentziaren luzera aldaketa erlatiboa adierazten du. Ondorioz, 8.8 irudian azaltzen den bezala, A eta B zilindroak bata bestearen barnean elkarren arteko presioa jasanez daudenean, presio hori determinatzeko baldintza kontaktuko erradioari dagozkion deformazioak berdinak izatea da:

$$\varepsilon^A = \varepsilon^B \Rightarrow -\frac{xr}{E_A t_A} + \varepsilon_0^A = \frac{xr}{E_A t_A} + \varepsilon_0^B \quad (8.20)$$



8.8 irudia

9. MAKURDURA: TENTSIOAK

9.1. SARRERA

Sekzioko tentsio normalen momentu erresultantea nulua ez denean, M_y , M_z osagaiak ditu eta pieza makurduran dagoela esaten da. Jasaten diren sekzio indar eta momentuen arabera, makurdurako kasuak honela sailka daitezke:

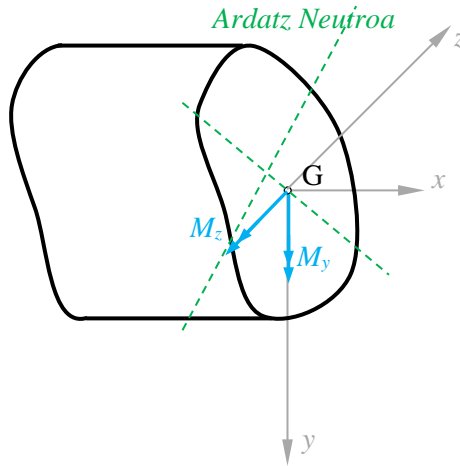
1. *Makurdura hutsa*: nuluak ez diren sekzioko indar eta momentu bakarrak M_y , M_z momentu makurtzaileak dira. Indar ebakitzzaileak nuluak direnez, momentuak uniformeak dira piezaren luzeran zehar.
2. *Makurdura bakuna*: M_y , M_z momentuez gain, T_y , T_z indar ebakitzzaileak ere ez dira nuluak. Kasu honetan, momentu makurtzaileak aldatu egiten dira piezaren luzeran zehar.
3. *Makurdura konposatua*: Aurreko bi kasuetako bati N indar normala gehitzen zaionean.

Aipatutako hiru kasuetan tentsio normal eta ebakitzzaileen banaketak aztertuko dira, deformazio eta tentsioei buruzko hipotesi sinplifikatzaileak eginez. Gai honetan, sekzioko indar eta momentuak ezagunak izango dira. Helburu nagusia, indar ebakitzzaileak eta momentu makurtzaileak sekzioko tentsio normal eta ebakitzzaile banaketekin erlazionatzea da.

9.2. MAKURDURA HUTSA

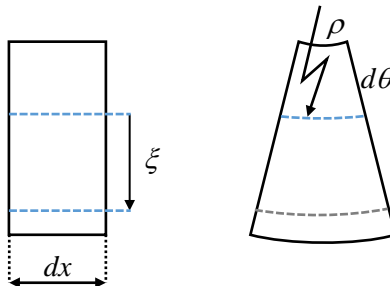
9.2.1 Kasu orokorra

Navier-Bernouilli-ren hipotesiaren arabera, *deformazioaren ondoren sekzioek lau eta pieza prismatikoaren ardatzarekiko elkartut jarraitzen dute, sekzioko ardatz batekiko biratuz*. Ardatz hori *Ardatz Neutroa* da. Sekzio desberdinetako ardatz neutroek pieza prismatikoan zehar osatutako gainazala, *Gainazal Neutroa* da. Gainazal neutroko puntuek ez dute deformaziorik jasaten. 9.1 irudian dx luzerako elementu batean eskuin sekzioko momentu makurtzaileak, Ardatz Neutroa eta berarekiko elkartuta den eta G-tik igarotzen den norabidea azaltzen dira.



9.1 irudia

9.1 irudian azaltzen den elementua *Ardatz Neutroarekiko G-tik igarotzen den plano elkartutean proiektatuz*, 9.2 irudian elementu hori deformatu baino lehen eta ondoren azaltzen da.



9.2 irudia

Gainazal neutroaren kurbadura erradioa ρ eta deformatu ondorengo angelua $d\theta$ izanik, $dx = \rho d\theta$ betetzen da, gainazal neutroa ez baita deformatzen. Bertatik ξ distantziara dagoen zuntzaren deformazioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + \xi)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{\xi}{\rho} \quad (9.1)$$

(9.1) ekuazioaren arabera, ξ -ren balio positiboentzat ε_x positiboa da eta ξ -ren balio negatiboentzat ε_x negatiboa da. Beraz, gainazal neutroa laburtzen diren eta luzatzen diren gainazalen arteko muga da.

y , z norabidetan deformazio askatasuna suposatzen da eta ondorioz $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Hooke-ren legea aplikatuz eta trakzio eta konpresio moduluak berdinak direla suposatuz:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\xi}{\rho} \quad (9.2)$$

N indar normala nulua denez, honakoa bete behar da:

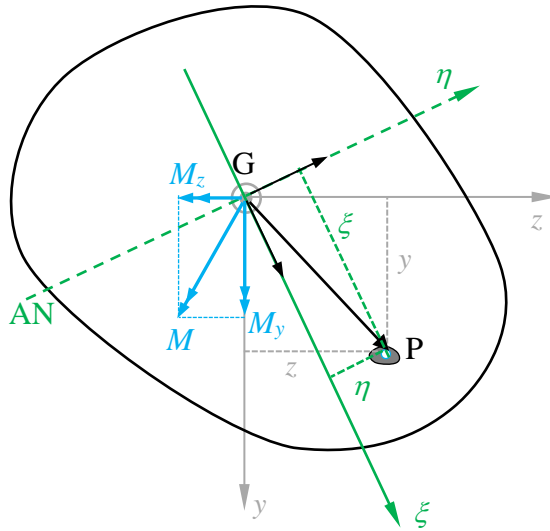
$$N = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (9.3)$$

(9.2) ekuazioa (9.3) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A \xi dA = 0 \Rightarrow \xi_G A = 0 \Rightarrow \xi_G = 0 \quad (9.4)$$

(9.4) ekuazioaren arabera, ardatz neutroa sekzioaren grabitate zentrutik igarotzen da. 9.3 irudian sekzioa, Ardatz Neutroa eta azalera elementu diferentziala azaltzen dira. Ardatz Neutroan eta bere norabide elkartuz η , ξ ardatzak definitzen dira, hurrenez hurren. Ardatz horien bektore unitarioak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \hat{u}_\xi &= \cos \varphi \hat{j} + \sin \varphi \hat{k} \\ \hat{u}_\eta &= -\sin \varphi \hat{j} + \cos \varphi \hat{k} \end{aligned} \quad (9.5)$$



9.3 irudia

9.3 irudiaren arabera, Ardatz Neutrotik elementu diferentzialeraino dagoen ξ distantzia honakoa da:

$$\xi = \overline{GP} \cdot \hat{u}_\xi = y \cos \varphi + z \sin \varphi \quad (9.6)$$

(9.6) ekuazioa (9.2) ekuazioan ordezkatzuz, sekzioko tentsio normal banaketa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} (y \cos \varphi + z \sin \varphi) = C_1 y + C_2 z \quad (9.7)$$

$C_1 = \frac{E}{\rho} \cos \varphi$ $C_2 = \frac{E}{\rho} \sin \varphi$ izanik. Momentu makurtzaileak tentsio normalen ardatzekiko momentu erresultanteak direnez, (9.7) ekuazioa kontuan izanik:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma_x z dA = C_1 \int_A y z dA + C_2 \int_A z^2 dA \\ M_z &= \int_A \sigma_x y dA = C_1 \int_A y^2 dA + C_2 \int_A y z dA \end{aligned} \quad (9.8)$$

Gainazalen inertzia momentu eta inertzia biderkaduren definizioak erabiliz, (9.8) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\begin{aligned} M_y &= C_1 I_{yz} + C_2 I_y \\ M_z &= C_1 I_z + C_2 I_{yz} \end{aligned} \quad (9.9)$$

C_1 eta C_2 ezezagunak dituen (9.9) ekuazio sistema ebatziz:

$$C_1 = \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} \quad C_2 = \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_{yz}^2 - I_y I_z} \quad (9.10)$$

(9.10) ekuazioko C_1 , C_2 (9.7) ekuazioan ordezkaturaz, sekzioko tentsio normalen banaketa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} y + \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_{yz}^2 - I_y I_z} z \quad (9.11)$$

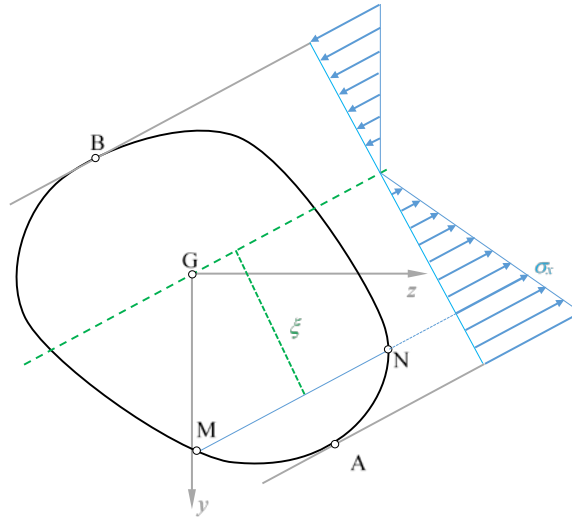
(9.11) ekuazioa honela ere idatz daiteke:

$$\sigma_x = \frac{M'_z}{I_z} y + \frac{M'_y}{I_y} z \quad M'_z = \frac{M_z - M_y \frac{I_{yz}}{I_y}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad M'_y = \frac{M_y - M_z \frac{I_{yz}}{I_z}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad (9.12)$$

Ardatz Neutroaren ekuazioa determinatzeko, (9.12) ekuazioan deformazio nuluren baldintza ezarri:

$$\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = -\frac{M'_y I_z}{M'_z I_y} \quad (9.13)$$

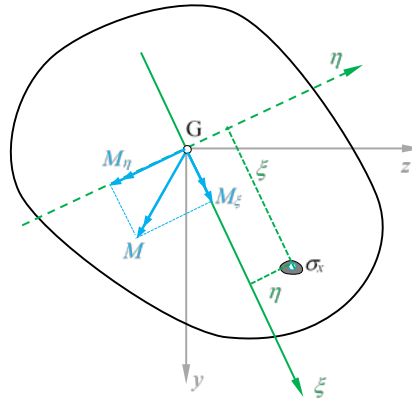
Ardatz Neutroa ezagututa, tentsio maximoko puntuak bertatik urrunen daudenak dira. Puntu horiek Ardatz Neutroarekiko paraleloak marraztuz lor daitezke, 9.4 irudian azaltzen den bezala. A eta B puntuak trakzio eta konpresiozko tentsio maximoak dituztenak dira, hurrenez hurren. Ardatz Neutrotik ξ distantziara dagoen MN lerroan tentsioek balio bera dute.



9.4 irudia

9.2.2 Mohr-en zirkulua inertzia momentuentzat

M modulua duen momentu makurtzailea ξ, η ardatzetan ere deskonposa daiteke, 9.5 irudian azaltzen den bezala. Modu horretan, momentu makurtzailea Ardatz Neutroaren eta bere norabide elkartzutaren arabera deskonposatzen da.



9.5 irudia

Momentu makurtzaileak ξ, η norabidetan dituen osagaiak, σ_x tentsio normalen ardatzekiko momentu erresultanteak direnez:

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= \int_A \sigma_x \eta dA \\ M_{\eta} &= \int_A \sigma_x \xi dA \end{aligned} \quad (9.14)$$

(9.2) ekuaziotik σ_x ordezkatuz, (9.14) honela gelditzen da:

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= \frac{E}{\rho} I_{\xi\eta} \\ M_{\eta} &= \frac{E}{\rho} I_{\eta} \end{aligned} \quad (9.15)$$

Beste alde batetik, (9.9) honela idatz daiteke matrize moduan:

$$\begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{\rho} \begin{bmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (9.16)$$

Momentu makurtzailea 9.3 irudian edo 9.5 irudian azaltzen diren osagaietan deskonposa daitekenez:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= M_y \hat{j} - M_z \hat{k} \\ \vec{M} &= M_{\xi} \hat{u}_{\xi} - M_{\eta} \hat{u}_{\eta} \end{aligned} \quad (9.17)$$

(9.17) ekuazioa eta (9.5) ekuazioko bektore unitarioak erabiliz, momentu makurtzailea ξ , η ardatzetan projekta daiteke:

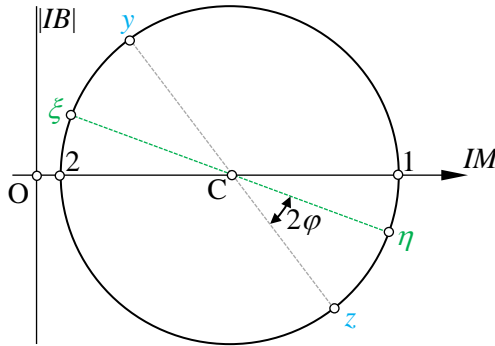
$$\begin{aligned} M_{\xi} &= \vec{M} \cdot \hat{u}_{\xi} = M_y \cos \varphi - M_z \sin \varphi \\ M_{\eta} &= -\vec{M} \cdot \hat{u}_{\eta} = M_y \sin \varphi + M_z \cos \varphi \end{aligned} \quad (9.18)$$

(9.16) ekuazioak (9.18)n ordezkatuz eta (9.15) ekuazioekin berdinduz, honako erlazioak lortzen dira angelu bikoitzaren menpe adierazi ondoren:

$$\begin{aligned} I_{\eta} - \frac{1}{2}(I_y + I_z) &= \frac{1}{2}(I_z - I_y) \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_{\xi\eta} &= \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (9.19)$$

(9.19) ekuazioak, 9.6 irudian azaltzen den Mohr-en zirkuluaren ekuazio parametrikokoak dira. y, z ardatzak kokatzerakoan, $I_z > I_y$ eta $I_{yz} > 0$ suposatu da. I_η ardatzari IM (Inertzia Momentuak) eta $I_{\xi\eta}$ ardatzari IB (Inertzia Biderkadurak) deituko zaie. Zentrua, erradioa eta norabide nagusiak adierazten dituen angelua honakoak dira:

$$\begin{aligned}
 OC &= I_C = \frac{1}{2}(I_y + I_z) \\
 R &= \sqrt{\frac{1}{4}(I_y - I_z)^2 + I_{yz}^2} \\
 \tan 2\varphi_1 &= \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}
 \end{aligned}
 \tag{9.20}$$



9.6 irudia

Beraz, tentsioen eta deformazioen kasuan bezala, gainazal lauen inertzia momentuak planoko Mohr-en zirkuluaren arabera transformatzen dira. Ardatzak zirkuluaren goi edo behe aldean kokatzerakoan, I_{yz} positiboa bada, y ardatza zirkuluaren goiko aldean dagoela froga daiteke. Tentsioen, deformazioen eta inertzia momentuen antzeko ezaugarri nagusiak honakoak dira:

Tentsioak	Deformazioak	Gainazalak
σ_n	ϵ_u	$IM(I_\eta)$
τ_n	$\frac{1}{2}\gamma_u$	$IB(I_{\xi\eta})$

(9.15) ekuazioaren arabera, $M_{\xi} = 0 \Leftrightarrow I_{\xi\eta} = 0$. Beraz, *momentu makurtzailea norabide nagusi batean aplikatzen denean, norabide hori Ardatz Neutroa da, $\vec{M} = M_{\eta} \hat{u}_{\eta}$ baita.*

9.2.3 Kasu partikularrak

Inertzia ardatz nagusien kasuan $I_{yz} = 0$ betetzen da. (9.12) ekuazioen arabera $M'_z = M_z$ $M'_y = M_y$ eta ondorioz:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (9.21)$$

Kasu honetan Ardatz Neutroaren ekuazioa, (9.21) ekuaziotik lor daiteke:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = -\frac{M_y}{M_z} \frac{I_z}{I_y} \quad (9.22)$$

M_z momentuak bakarrik eragiten duenean, (9.21) ekuazioaren arabera:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (9.23)$$

Sekzioko tentsio maximoa honakoa da:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (9.24)$$

W_z makurdurako modulu erresistentea da eta profil laminatuen tauletan dagoen datua da. W_z handia izatea nahi denez, sekzioaren altuera jakin batentzat I_z handia izatea nahi da, hau da, materiala z ardatzetik urruntzea. Horregatik IPN, IPE profilak makurdurako kasu honetan egokiak dira. M_z momentua jasaten duen pieza erresistentziaz dimentsionatzeko, M_z maximoari dagokion tentsio maximoa ongarriarekin berdinduz honakoa lortzen da:

$$\sigma_{on} = \frac{M_{\max}}{W_z} \Rightarrow W_z = \frac{M_{\max}}{\sigma_{on}} \quad (9.25)$$

W_z ezagutuz, profil laminatuen tauletatik profil egokia aukera daiteke.

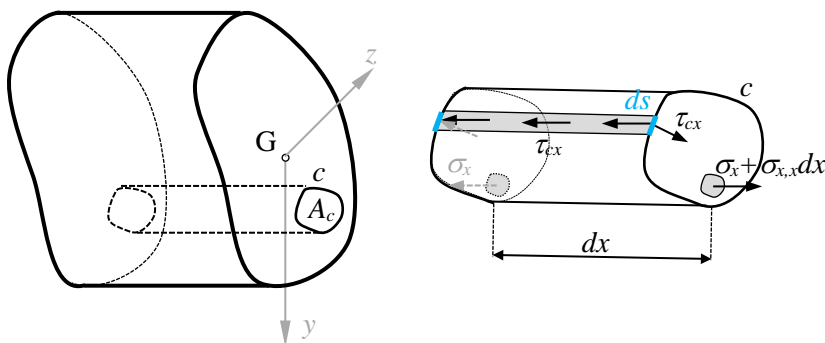
9.3. MAKURDURA BAKUNA

9.3.1 Tentsio normalak

Makurdura bakunean tentsio normalez gain tentsio ebakitzaileak daude eta ondorioz deformazio tangenzialak azaltzen dira sekzioan. Hala ere, hauen eragina arbuigarria da tentsio normalak determinatzerakoan. Beraz, tentsio normalak determinatzeko makurdura hutsean lortutako formulak erabiliko dira.

9.3.2 Fluxu ebakitzailearen teorema

dx luzerako elementu batean, A_c oina duen zilindroa isolatzen da, A_c -ren ingurune kurba c izanik, 9.7 irudian azaltzen denez. A_c azalera sekzioko zatia da. Zilindroaren alboko gainazalean τ_{cx} tentsioek dihardute. Ezker sekzioan, dA elementuan diharduen σ_x tentsio normala eta c lerroarekiko elkartuta den eta A_c -tik irtetzen den τ_{cx} tentsio tangenziala azaltzen dira. Eskuin sekzioan, dA elementuan diharduen $(\sigma_x + \sigma_{x,x} dx)$ tentsio normala eta c lerroarekiko elkartuta den eta ds -n sartzen ari den τ_{cx} tentsio tangenziala ikus daitezke.



9.7 irudia

Isolatutako zilindroan x ardatzeko oreka planteatuz:

$$\int_{A_c} (\sigma_x + \sigma_{x,x} dx) dA - \int_{A_c} \sigma_x dA - \int_c \tau_{cx} ds dx = 0 \quad (9.26)$$

(9.26) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$\left(\int_{A_c} \sigma_{x,x} dA \right) dx = \left(\int_c \tau_{cx} ds \right) dx \quad (9.27)$$

q_c fluxu ebakitzailera, definizioz, honako integrala da:

$$q_c = \int_c \tau_{cx} ds \quad (9.28)$$

q_c eskuin sekzioan positiboa da A_c gainazalean sartzen denean, 9.7 irudiaren arabera. (9.27) eta (9.28) ekuazioetatik honakoa lortzen da:

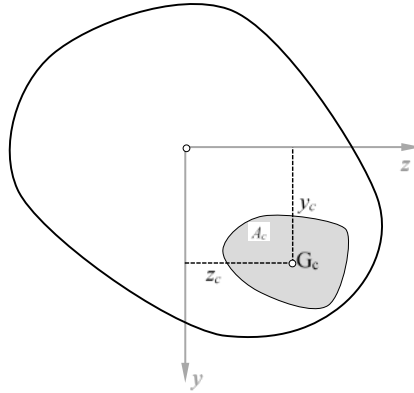
$$q_c = \int_{A_c} \sigma_{x,x} dA \quad (9.29)$$

(9.12) ekuaziotik, tentsio normalen deribatua, inertzia momentuak aldatzen ez direla suposatuz, honakoa da:

$$\sigma_{x,x} = \frac{M'_{z,x}}{I_z} y + \frac{M'_{y,x}}{I_y} z = \frac{T'_y}{I_z} y + \frac{T'_z}{I_y} z \quad (9.30)$$

(9.12) ekuazioko M'_y , M'_z deribatzerakoan, indar ebakitzaileren eta momentu makurtzaileren arteko erlazioak gogoratuz, (9.30) ekuazioko T'_y , T'_z honakoak dira:

$$T'_y = \frac{T_y - T_z \frac{I_{yz}}{I_y}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad T'_z = \frac{T_z - T_y \frac{I_{yz}}{I_z}}{1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z}} \quad (9.31)$$



9.8 irudia

(9.30) ekuazioa (9.29) ekuazioan ordezkaturaz, honakoa lortzen da:

$$q_c = \frac{T'_y}{I_z} \int_{A_c} y dA + \frac{T'_z}{I_y} \int_{A_c} z dA \quad (9.32)$$

(9.32) ekuazioko integralak A_c azaleraren momentu estatikoak dira. 9.8 irudiaren arabera honakoak dira:

$$\begin{aligned} Q_z^c &= \int_{A_c} y dA = y_c A_c \\ Q_y^c &= \int_{A_c} z dA = z_c A_c \end{aligned} \quad (9.33)$$

y_c , z_c A_c azaleraren grabitate zentruaren koordenatuak izanik. (9.33) ekuazioa (9.32) ekuazioan barneraturaz, *fluxu ebakitzaila* honakoa da:

$$q_c = T'_y \frac{Q_z^c}{I_z} + T'_z \frac{Q_y^c}{I_y} \quad (9.34)$$

y , z inertzia ardatz nagusiak badira, (9.31) ekuazioaren arabera $T'_y = T_y$ $T'_z = T_z$. Gainera, $T_z = 0$ bada, (9.34) ekuazioa honela gelditzen da:

$$q_c = T_y \frac{Q_z^c}{I_z} \quad (9.35)$$

c lerroaren zati bat sekzioaren ingurunekoa denean, zati horretan fluxu ebakitzaila nula da, $\tau_{cx} = 0$ denez piezaren kanpoko gainazalean.

9.3.3 Tentsio ebakitzailak

Fluxu ebakitzailaren teoremekin c lerroarekiko elkartutak diren tentsio tangential osagaien batura lortu da, c lerroan zehar. Lerro horretan dagoen tentsio banaketa determinatzeko beste hipotesi batzuk erabili beharko dira. Honako adibideak aztertuko dira: *sekzio laukizuzena*, *sekzio zirkularra* eta *lodiera txikiko sekzio irekia*, $T_y = T$ indar ebakitzaila jasaten dutenean. Kasu guztietan ardatzak nagusiak izango direnez, (9.35) ekuazioa erabiliko da.

Sekzio laukizuzena

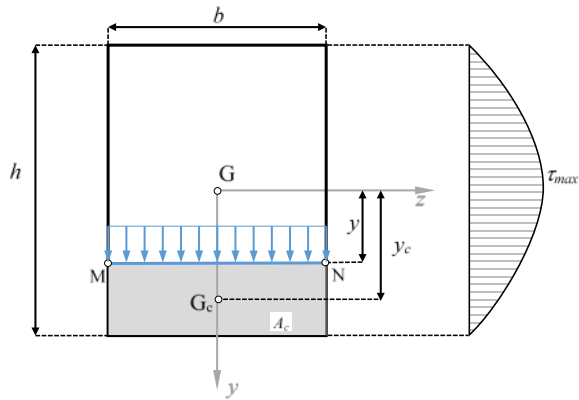
9.9 irudian azaltzen den sekzio laukizuzenak erakusten ez den $T_y = T$ indar ebakitzaila jasaten du. A_c azaleraren ingurunean fluxu ebakitzaila bakarrik MN lerroan ez da nulua, c ingurunearen beste zatiak sekzioaren ingurunearekin bat egiten baitu. Kalkulu nagusiak honakoak dira:

$$A_c = b\left(\frac{1}{2}h - y\right) \quad y_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h + y\right) \quad Q_z^c = A_c y_c = b\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h^2 - y^2\right) \quad I_z = \frac{1}{12}bh^3$$

(9.35) ekuazioan ordezkaturaz, fluxu ebakitzaila honakoa da:

$$q_c = \frac{6T}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (9.36)$$

(9.36) ekuazioaren arabera, lodieran zehar banaketa parabolikoa da. Fluxu ebakitzaila positiboa denez, tentsioak A_c gainazalean sartzen dira.



9.9 irudia

Fluxu ebakitzailea eragiten duten tentsioak MN lerroarekiko elkartutak dira eta ondorioz τ_{xy} tentsioak dira. Beren banaketa determinatzeko, bi hipotesi erabiltzen dira:

1. *Tentsio guztiak konkurrenteak dira.* M eta N puntuetan tentsioek ezin dute osagai horizontalik eduki, sekzioaren ingurunekeo puntuak direlako. Tentsio hauek bertikalak direnez, beste guztiak ere bertikalak dira eta $\tau_{zx} = 0$ edozein puntutan.
2. *Tentsioak uniformeki banatzen dira MN lerroan zehar, honakoak direlarik:*

$$\tau_{xy} = \frac{q_c}{b} = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (9.37)$$

(9.37) ekuazioaren arabera, tentsio banaketa parabolikoa da sekzioaren lodieran zehar. Sekzioaren goiko eta beheko ertzetan nuluak dira eta balio maximoa z ardatzean dago, $y = 0$ denean:

$$\left(\tau_{xy} \right)_{\max} = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

Sekzio zirkularra

Sekzio zirkularren analisirako 9.10 irudia erabiliko da . Kasu honetan ere sekzioak $T_y = T$ indar ebakitzailea jasaten du, irudian azaltzen ez dena. A_c azalera isolatzerakoan, fluxu ebakitzailea bakarrik MN lerroan dago, c kurbaren beste zatia

sekzioaren ingurunekoa delako. Momentu estatikoa determinatzeko integrala erabiliko da:

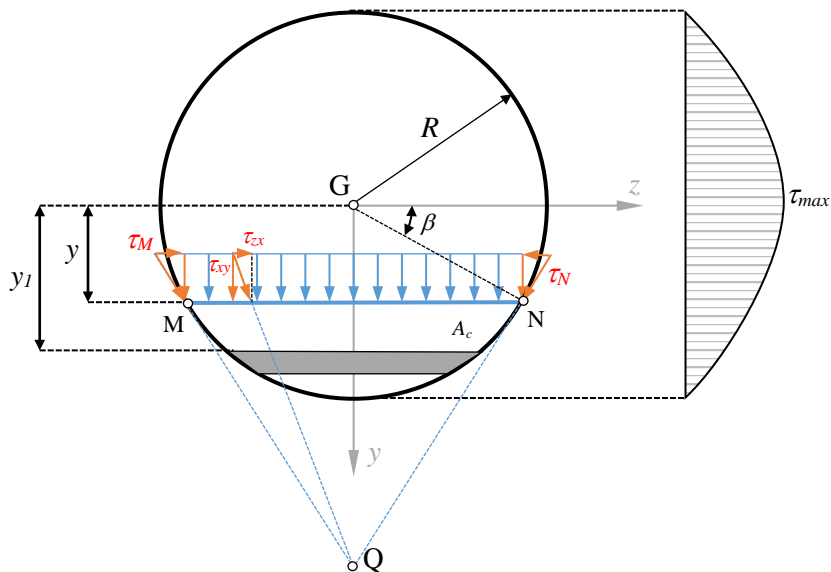
$$Q_z^c = \int_{A_c} y_1 dA = \int_y^R y_1 2\sqrt{R^2 - y_1^2} dy_1 = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

MN lerroko fluxu ebakitzaila honakoa da:

$$q_c = q_{MN} = \frac{T}{I_z} \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Tentsio banaketari buruz, sekzio laukizuzenean erabili diren hipotesi berdinak erabiliko dira oraingoan ere. Tentsioak MN lerroan uniformeak izanik, honakoak dira:

$$\tau_{xy} = \frac{q_{MN}}{2\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{T}{I_z} \frac{1}{3}(R^2 - y^2)$$



9.10 irudia

M eta N puntuetako tentsioak ingurunearekiko ikutzaileak izan behar dutenez eta tentsio guztiak konkurrenteak direnez, Q puntuan mozten dira, 9.10 irudian azaltzen denez. Ondorioz, τ_{zx} osagaiak ez dira nuluak. MN lerroko tentsio maximoak M eta N puntuetan daude, honakoak izanik:

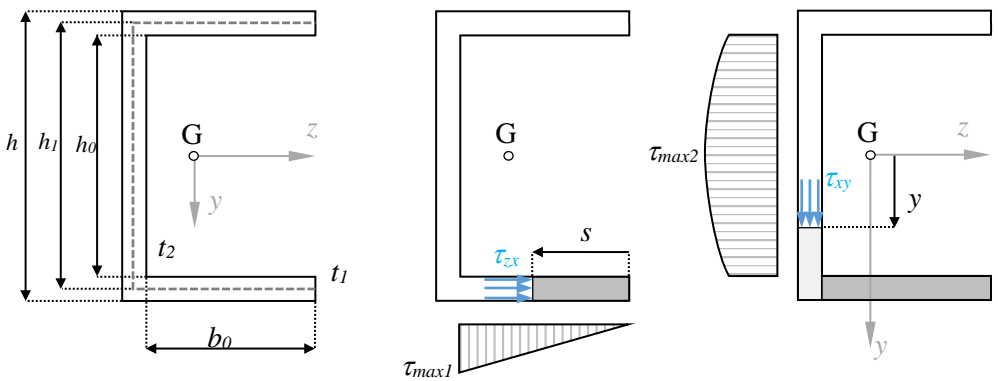
$$\tau_M = \tau_N = \frac{\tau_{xy}}{\cos \beta} = \tau_{xy} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{4T}{3\pi R^3} \sqrt{R^2 - y^2}$$

Sekzio osoan, $y = 0$ denean tentsioa maximoa da, z ardatzean:

$$(\tau_{xy})_{\max} = \tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2}$$

Lodiera txikiko sekzio irekiak

Sekzioaren lodiera txikia denez, tentsioak ingurunearekiko paraleloak eta lodieran uniformeak direla suposatzen da. 9.11 irudian azaltzen den sekzioak ere $T_y = T$ indarra jasaten du. 1 indizearekin izendatuko diren zati horizontaletan edo *hegaletan* tentsioak, horizontalak direnez, τ_{zx} dira. 2 indizearekin izendatuko den zati bertikalean edo *ariman* tentsioak bertikalak direnez, τ_{xy} dira.



9.11 irudia

Hegaletan, fluxu ebakitzailea, tentsio banaketa eta tentsio maximoa honakoak dira:

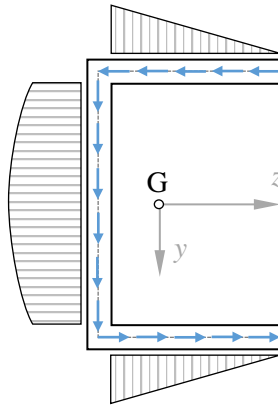
$$Q_z^{c1} = t_1 s \frac{1}{2} h_1 \quad q_{c1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} t_1 h_1 s \quad (\tau_{zx})_1 = \frac{q_{c1}}{t_1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} h_1 s \quad \tau_{max1} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_z} h_1 b_0$$

Beraz, hegaletan banaketa lineala da, tentsioaren balio maximoa arimaren ondoan dagoelarik. Arimako momentu estatikoa determinatzeko, hegal osoa eta arimaren zati bat hartu behar dira, 9.11 irudian ikusten den bezala.

$$Q_z^{c2} = t_1 b_0 \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} h^2 - y^2 \right)$$

$$q_{c2} = \frac{T}{I_z} Q_z^{c2} \quad (\tau_{xy})_2 = \frac{q_{c2}}{t_2} = \tau_{max2} = (\tau_{xy})_{2(y=0)}$$

Aurreko kalkuluetan ikus daitekenez, arimako banaketa parabolikoa da, balio maximoa z ardatzen egonik. Gainera, arimako balio minimoa eta hegaletako maximoa oso antzekoak dira. Desberdintasuna, bien arteko elkargunetik dator. Elkargune hau ez da analizatzen, tentsioen norabide aldaketa baitago. 9.12 irudian sekzioan zehar tentsioak nolakoak diren azaltzen da. Hegaletan ere badaude τ_{xy} tentsio ebakitzailak, baino arbuiagarriak dira arimako enparean.



9.12 irudia

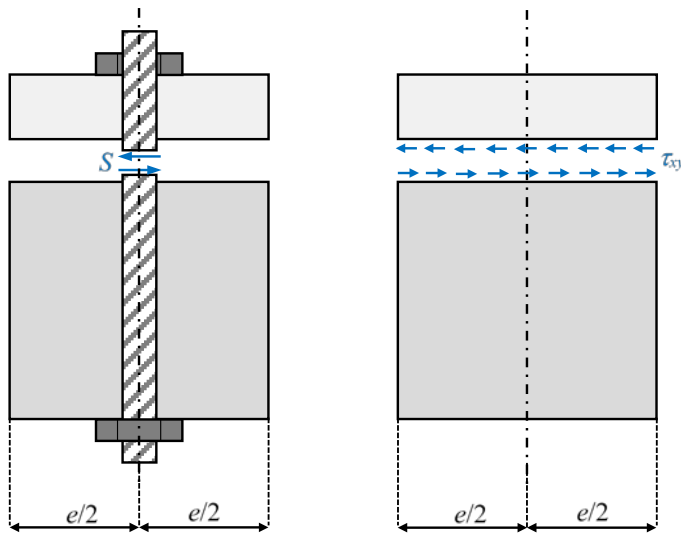
9.3.4 Tentsio nagusiak

Makurdura bakunean, sekzioaren altueran zehar aldatzen diren tentsio normal eta ebakitzailak azaltzen direnez, tentsio nagusiak eta norabide nagusiak ere aldatu egiten dira. Tentsio nagusi bereko leku geometrikoak *lerro isostatikoak* deitzen dira eta

interesa dute hormigoizko habeen kasuan, fisurazioa trakzioko plano nagusietan gertatzen baita.

9.3.5 Habe konposatuak

Bi habe bata bestearen gainean kokatzen direnean, beren arteko marruskadura arbuiauz, makurdura independentea dute: bakoitzak bere gainazal neutroa eta trakzioko eta konpresiozko tentsio banaketak ditu. Bi habeak lotura elementuekin elkartzen badira, *habe konposatua* sortzen da eta bere portaera habe bakarrena da: gainazal neutroa eta tentsio banaketa bakarrak dira. Lotura elementuak bi motatakoak izan daitezke habearen luzeran zehar: *jarraituak eta diskretuak*. Jarraituen artean *itsasgarriak* eta *soldadura* ditugu. *Iltzeak, torlojoak* eta *errematxeak*, aldiz, diskretuak dira. Lotura elementuen lana *bi habeak habe bakarren bihurtzea* denez, *lotura elementuek habe bakarrari dagozkion tentsio ebakitzailak jasan behar dituzte*.



9.13 irudia

Elementu diskretuen kasua aztertuko da, habean zehar beren arteko e distantziara aldentuta egonik. Elementu bakoitzak e distantzian eragina duela suposatuko da, hau da, bere inguruko e distantzia batean habe bakarra balitz egongo liratekeen tentsio ebakitzailak guztiak jasaten dituela, 9.13 irudian azaltzen den bezala. Distantzia horretan T indar ebakitzailak orohar aldakorrek direnez, kalkulurako indar ebakitzailak maximoa erabiltzen da. Gainera, bi habeen elkargunean habe bakarra balitz leudeken tentsioak,

T maximo horri dagozkionak direla eta uniformeki banatuta daudela suposatzen da. Piezaren zabalera b izanik, zabalera zehar n lotura elementu badaude, bakoitzaren indarra S izanik, nS indarrak tentsio ebakitzailer banaketaren eragina jasan behar duenez, honakoa betetzen da:

$$\tau_{xy} b e = nS \quad (9.38)$$

τ_{xy} tentsioak determinatzeko fluxu ebakitzaileraren teorema erabiliko da, bi habeak bakarria direla suposatuz. A_c azaleratzen elkartu behar diren habeetako baten sekzioa hartzen da. q_c fluxu ebakitzailer bakarrik bien arteko elkargunenan dagoenez, $q_c = \tau_{xy} b$ betetzen da eta (9.38) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$q_c e = nS \quad (9.39)$$

(9.39) ekuazioarekin bi kalkulu mota egin daitezke:

- e distantzia eta lotura elementuaren τ_{on} tentsio onargarria ezagutuz, lotura elementuaren D diametroa lortzea. Kalkulu honetan, lotura elementuko tentsio ebakitzailerak uniformetzat hartzen dira, hau da:

$$S = \tau_{on} \pi \frac{1}{4} D^2 \quad (9.40)$$

- Lotura elementuaren τ_{on} eta D datuak izanik, beren arteko e distantzia determinatzea (9.39) ekuaziotik.

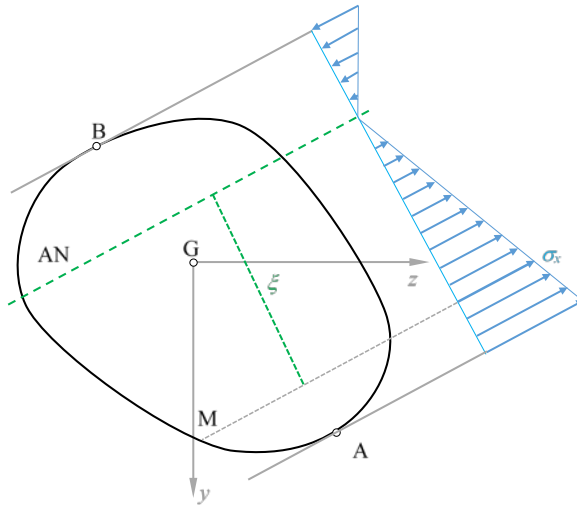
9.4. MAKURDURKA KONPOSATUA

9.4.1 Tentsio normalak eta ebakitzaileak

Makurdura konposatuan, indar normalari dagozkion tentsioak makurdurako hutseko tentsioekin batzen dira, gainjarmen printzipioa erabiliz:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M'_z}{I_z} y + \frac{M'_y}{I_y} z \quad (9.41)$$

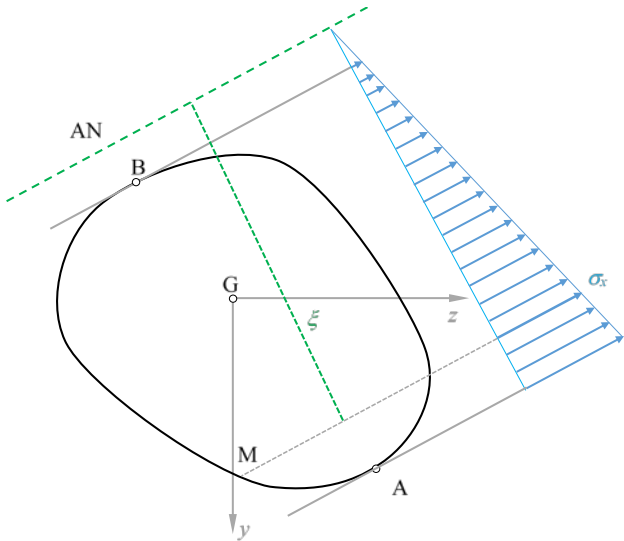
Indar normalari dagokion batugaiaren ondorioz, Ardatz Neutroa ez da sekzioaren grabitate zentrutik igarotzen. Momentu makurtzailearen eragina nagusia denean, Ardatz Neutroak sekzioa mozten du eta trakzio eta konpresio tentsioak daude, 9.14 irudian ikus daitekeen bezala.



9.14 irudia

Indar normalaren eragina nagusia denean, Ardatz Neutroak ez du sekzioa mozten eta tentsioak ikur berekoak dira sekzioan zehar, 9.15 irudian azaltzen den bezala. y , z inertzia ardatz nagusiak direnean, (9.41) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (9.42)$$

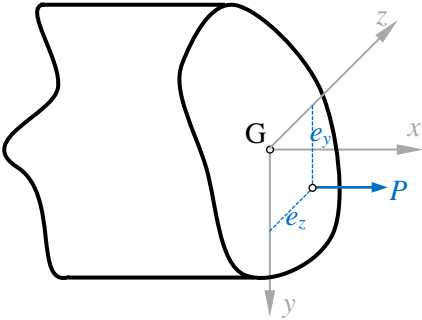


9.15 irudia

Tentsio ebakitzailak makurdura bakunean bezala determinatzen dira.

9.4.2 Trakzio eta konpresio eszentrikoa

Makurdura konposatuaren kasu partikularra da. Indar normal eszentrikoa aplikatzen da, 9.16 irudian azaltzen den bezala.



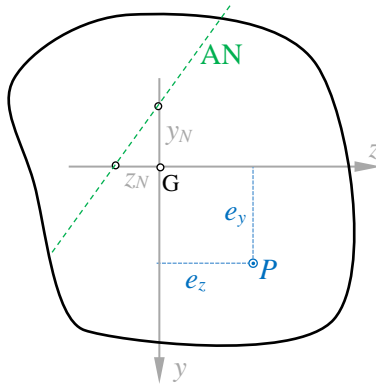
9.16 irudia

Ardatzak nagusiak direla suposatuko da. (9.42) ekuazioa aplikatuz, tentsio normalak honakoak dira:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{Pe_y}{I_z} y + \frac{Pe_z}{I_y} z \quad (9.43)$$

Ardatz neutroaren ekuazioa honakoa da:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_z} y + \frac{e_z}{I_y} z = 0 \quad (9.44)$$



9.17 irudia

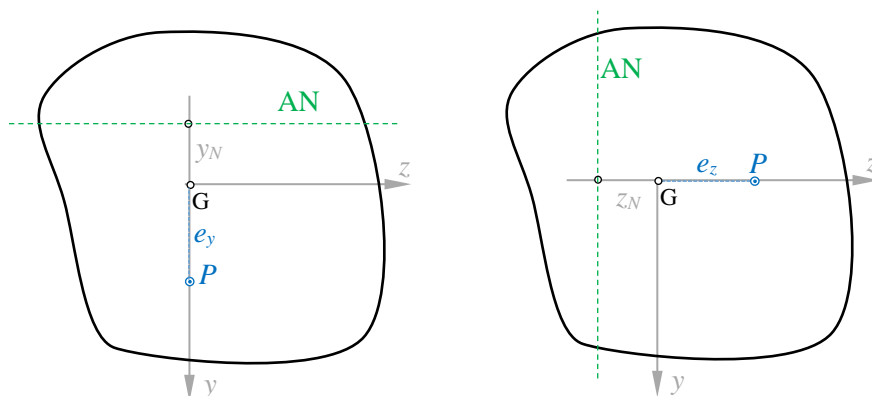
(9.44) ekuazioaren arabera, Ardatz Neutroa ez da aplikatutako indarraren menpekoa. z , y ardatzekiko i_z , i_y biraketa erradioak barneratuz, hurrenez hurren, (9.44) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\frac{e_y}{i_z^2} y + \frac{e_z}{i_y^2} z = -1 \quad (9.45)$$

(9.45) ekuazioaren arabera, Ardatz Neutroak y , z ardatzekin dituen y_N , z_N mozte puntuak, hurrenez hurren, 9.17 irudian azaltzen dira eta honakoak dira:

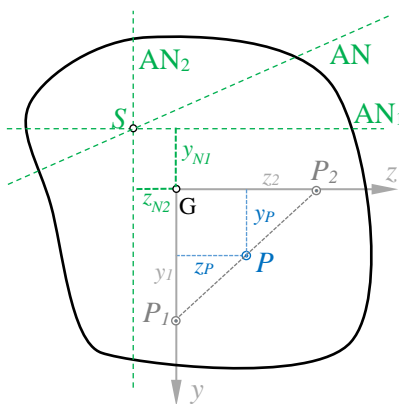
$$y_N = -\frac{i_z^2}{e_y} \quad z_N = -\frac{i_y^2}{e_z} \quad (9.46)$$

(9.46) ekuazioaren arabera, $e_y = 0 \Rightarrow y_N = \infty$. Hau da, P indarra z ardatzaren gainean aplikatuta dagoenean, Ardatz Neutroa y -ren norabidekoa da. Antzera, P indarra y ardatzaren gainean aplikatuta dagoenean, Ardatz Neutroa z norabidekoa da, 9.18 irudian ikus daitekenez.



9.18 irudia

Ondoren, P indarra y, z ardatzetan aplikatuta dauden P_1, P_2 indarretan deskonposatzeko baldintzak aztertzen dira. 9.19 irudian indarren aplikazio puntuak eta distantziak azaltzen dira.



9.19 irudia

Indar sistemak baliokideak direnez, erresultante eta momentu erresultante bera izan behar dute. Erresultante berdinen baldintza erabiliz:

$$P = P_1 + P_2 \quad (9.47)$$

y, z ardatzekiko momentu erresultanteen baliokidetasuna ezarriz:

$$\begin{aligned} y &\rightarrow Pz_P = P_2 z_2 \\ z &\rightarrow Py_P = P_1 y_1 \end{aligned} \quad (9.48)$$

(9.48)-tik P_1 eta P_2 askatuz eta (9.47) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\frac{y_P}{y_1} + \frac{z_P}{z_2} = 1 \quad (9.49)$$

(9.49) ekuazioaren arabera, P indarra P_1 eta P_2 -ren aplikazio puntuek definitzen duten zuzenean aldatu behar da. Indar hauei dagozkion ardatz neutroak S puntuan mozten dira, 9.19 irudian ikus daitezenez, koordenatuak honakoak izanik:

$$y_S = y_{N1} = -\frac{i_z^2}{y_1} \quad z_S = z_{N2} = -\frac{i_y^2}{z_2} \quad (9.50)$$

(9.49) ekuazioaren arabera, P -ri dagokion Ardatz Neutroa honakoa da:

$$1 + \frac{y_P}{k_z^2} y + \frac{z_P}{k_y^2} z = 0 \quad (9.51)$$

(9.50) ekuazioko koordenatuak (9.51) ekuazioan ordezkatzuz, hau da, $y = y_S$ $z = z_S$ eginez, (9.49) ekuazioa lortzen da. Ondorioz, S puntua (9.51) ekuazioan emandako Ardatz Neutroan dago. Indarra P_1 -etik P_2 -ra aldatzen denean, Ardatz Neutroak (AN) erlojorratzen aurka biratzen du (AN₁)-tik (AN₂)-ra, 9.19 irudian ikus daitezenez.

9.4.3 Sekzioaren Nukleoa

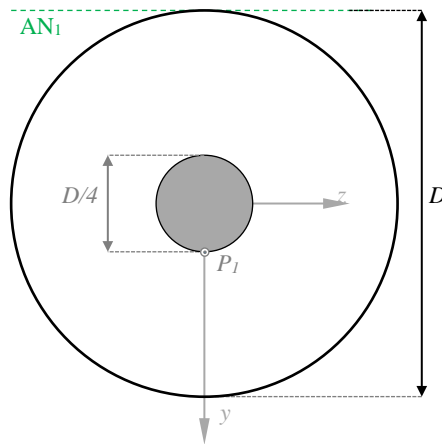
Trakzio eta konpresio eszentrikoan, P indarra grabitate zentruan aplikatua dagoenean, makurdurarik ez dago eta Ardatz Neutroa infinituan dago. Indarraren aplikazio puntua G -tik aldentzen den heinean, Ardatz Neutroa sekziara gerturaten da. P indarra G -ren inguruko gune batean aplikatuz, tentsioak sekzio osoan ikur berekoak izatea lortzen da. Gune hori *Sekzioaren Nukleoa* edo *Nukleo Zentrala* da eta konpresioa bakarrik jasan

dezaketen materialen kasuan interesgarria da. Nukleoa determinatzeko *baldintza*, *Ardatz Neutroa sekzioarekiko ikutzailea* izatea da. Adibide bezala sekzio zirkularra eta laukizuzena aztertuko dira.

9.20 irudian D diametroko sekzio zirkularra azaltzen da. AN_1 ikutzailea izan dadin P_1 non aplikatu behar den jakin nahi da. Hau da, y_{N1} ezaguna da eta y_1 determinatu behar da. Beraz:

$$y_{N1} = -\frac{1}{2}D \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1}{16}D^2$$

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = \frac{1}{8}D$$

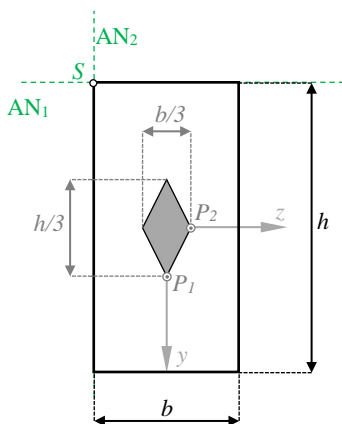


9.20 irudia

Sekzio laukizuzenaren kasuan, 9.21 irudian azaltzen den bezala, AN_1 ikutzailea izatea inposatzen bada, y_{N1} ezaguna da eta y_1 determinatu behar da. Beraz:

$$y_{N1} = -\frac{1}{2}h \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1}{12}h^2$$

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = \frac{1}{6}h$$



9.21 irudia

Antzera, AN_2 ikutzailea izatea inposatzen bada, z_{N2} datua da eta z_2 determinatu behar da. Ondorioz:

$$z_{N2} = -\frac{1}{2}b \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{1}{12}b^2$$

$$z_2 = -\frac{i_y^2}{z_{N2}} = \frac{1}{6}b$$

Azkenik, indarra P_1 -etik P_2 -ra zuzenki aldatzen bada, Ardatz Neutroa AN_1 -tik AN_2 -ra aldatzen da, S puntuaren inguruan erlojorratzen aurka biratuz, sekzioa moztu gabe. Laukizuzenaren beste hiru erpinetan pareko analisia egin daitekenez, Nukleoa 9.21 irudian grisez adierazten da.

10. MAKURDURA: ZURRUNTASUNA

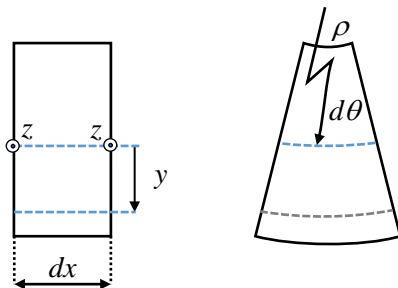
10.1. SARRERA

Makurdura jasaten duten pieza pramatikoen ardatzaren desplazamenduak eta angeluak aztertuko dira. Konfigurazio deformatuan pieza pramatikoaren ardatza *kurba elastikoa* deitzen da. Navier-Bernouilliren hipotesiaren arabera, kurba elastikoa sekzioekiko elkartzut mantentzen denez, sekzioak biratutako angelua kurba elastikoak biratutakoaren berdina da. Makurdurako zurruntasunaren azterketa beharrezkoa da desplazamendu edo angeluen mugak ezarri behar direnean. Egiturretan, muga hauek kalkulurako arauak ezartzen dituzte. Zurruntasunak sistemaren dardarekin eta funtzionalitatearekin ere zerikusia du. Adibidez, erreminta batek eragindako mekanizate indarren ondorioz sortutako desplazamenduek perdoiak baino txikiagoak izan behar dute.

10.2. KURBA ELASTIKOAREN EKUAZIO DIFERENTZIALA

Kurba elastikoa pieza pramatikoaren ardatz deformatua da. Makurdura hutsa aztertuko bada ere, makurdura bakunean piezaren luzera sekzioaren altuerarekin konparatuz handia denean, indar ebakitzailleek desplazamenduetan duten eragina arbuigarria da. $M_z = M$ momentuak eragiten duela eta sekzioaren ardatzak nagusiak direla suposatuko da. “*Makurdura: tentsioak*” gaian azalduko analisia kasu partikular honetan aplikatuko da.

Deformazio prozesua adierazten duen 9.2 irudian, habearen dx luzerako elementu diferentziala deformatu baino lehen eta ondoren azaltzen da. Ardatz Neutroa z ardatza da eta sekzioek berarekiko biratzen dute.



10.1 irudia

Gainazal neutroaren kurbadura erradioa ρ eta deformatu ondorengo angelua $d\theta$ izanik, $dx = \rho d\theta$ betetzen da, gainazal neutroa ez baita deformatzen. Bertatik y distantziara dagoen zuntzaren deformazioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (10.1)$$

Hooke-ren legea aplikatuz:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{y}{\rho} \quad (10.2)$$

Gainera, tentsio normalen banaketa momentu makurtzailearen menpe honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} \quad (10.3)$$

(9.2) eta (10.3) ekuazioetatik honakoa lortzen da:

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{M}{EI_z} \quad (10.4)$$

Beste alde batetik, deformazio prozesua aztertuko da. 10.2 irudian soilki bermatutako habe baten kasua azaltzen da. *Deformatu gabeko* AB ardatza eta *deformatu ondorengo* A'B' kurba elastikoa ikus daitezke. Deformaziorik jasaten ez duenez, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.



10.2 irudia

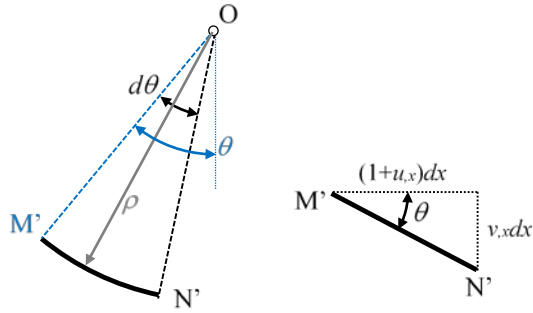
dx luzerako MN elementuaren deformazio prozesua aztertuko da, bere luzera aldatzen ez dela jakinik, kurba elastikokoa baita. Hau da, $\overline{MN} = \overline{M'N'}$. M eta N puntuen desplazamenduak honakoak dira:

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_M &= \overline{MM'} = u\hat{i} + v\hat{j} \\ \vec{\delta}_N &= \overline{NN'} = (u + u_{,x}dx)\hat{i} + (v + v_{,x}dx)\hat{j} \end{aligned} \tag{10.5}$$

(10.5) ekuazioan u, v desplazamenduak x -en menpeko funtzioak dira. Beraz, 10.2 irudiaren arabera, deformazio ondorengo elementua honakoa da:

$$\overline{M'N'} = \overline{MN} + \overline{NN'} - \overline{MM'} = (1 + u_{,x}dx)dx\hat{i} + v_{,x}dx\hat{j} \tag{10.6}$$

10.3 irudian elementu deformatua azaltzen da. Eskuin aldean, bere luzera diferentziala denez, zuzen marraztu da. OM' erradioak bertikalarekin θ angelua osatzen badu, $M'N'$ elementuak horizontalarekin angelu bera osatzen du.



10.3 irudia

Luzera aldatzen ez denez, 10.3 irudiaren arabera honakoa betetzen da:

$$\rho d\theta = \widehat{M'N'} = dx \quad (10.7)$$

(10.7) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (10.8)$$

(10.4) eta (10.8) ekuazioak alderatuz:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI_z} \quad (10.9)$$

10.3 irudian azaltzen den kurbadura momentu makurtzaile positiboari dagokio. Ikusten denez, x koordenatua handitzen denean angelua txikitzen da: OM' erradioak θ angelua eta ON' erradioak $(\theta - d\theta)$ angelua osatzen dute. Ondorioz, aukeratutako ardatzetan kurbadura negatiboa da. Ikurren bateragarritasuna lortzeko (10.9) ekuazioa honela idazten da:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.10)$$

10.3 irudian honako erlazioak betetzen dira:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= v_{,x} \\ \cos \theta &= 1 + u_{,x}\end{aligned}\quad (10.11)$$

(10.10) ekuaziotik integrazioz $\theta(x)$ lortu ondoren, (10.11) ekuazioan ordezkatzuz eta x -ekiko integratuz, v desplazamendu bertikala eta u desplazamendu horizontala lortzen dira. Beste alde batetik, (10.11)₁ ekuaziotik $\theta = \arcsin(v_{,x})$ lortzen da. (10.10) ekuazioan ordezkatzuz, *kurba elastikoaren ekuazio diferentzial exaktoa* lortzen da:

$$\frac{v_{,xx}}{\sqrt{1-v_{,x}^2}} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.12)$$

θ makurdura angelua txikia denean, (10.11) ekuazioak honela gelditzen dira:

$$\begin{aligned}\theta &= v_{,x} \\ 0 &= u_{,x}\end{aligned}\quad (10.13)$$

(10.13)₁ ekuazioa (10.10) ekuazioan ordezkatzuz, kurba *Elastikoaren Ekuazio Diferentzial (EED)* hurbildua lortzen da:

$$v_{,xx} = \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \quad (10.14)$$

(10.13)₂ ekuazioaren arabera desplazamendu horizontalak uniformeak dira, hau da, $u(x) = u_0$. Habeak puntu finkoa duenez, $u_0 = 0$.

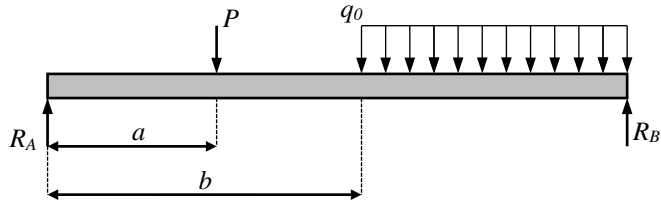
10.3. EED INTEGRAZIOA: BAKUNTASUN FUNTZIOAK

Bakuntasun funtzioak edo Macaulay-ren kakoak honela definitzen dira:

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases} \quad (10.15)$$

Funtzio hauek erabiliz, habe osoko momentu makurtzaileak ekuazio bakarrean adieraz daitezke. Gainera, EI_z makurdurako zurruntasuna uniformea bada, (10.14)ko

EED integratzerakoan bakarrik bi integrazio konstante azaltzen dira. Adibide gisa, 10.4 irudian soilki bermatutako habea ikus daiteke, bermapuntuak erreakzioengatik ordezkatu direlarik.



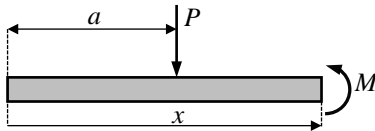
10.4 irudia

Momentuak determinatzeko, mozketaz azken tartean bakarrik egin behar da:

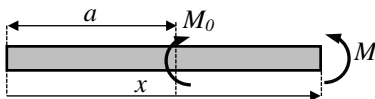
$$0 < x < L$$

$$M = R_A x - P \langle x - a \rangle - \frac{1}{2} q_0 \langle x - b \rangle^2$$

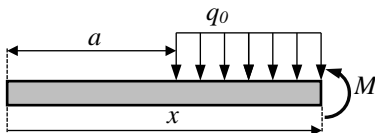
Ondoren, EED integratuz angeluak eta desplazamenduak lor daitezke. 10.5 irudian oinarritzko karga batzuren adibideak azaltzen dira, momentuak bakuntasun funtzioen bidez adierazteko.



$$M = -P \langle x - a \rangle$$

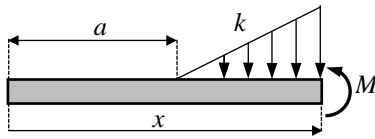


$$M = M_0 \langle x - a \rangle^0$$



$$q = q_0 \langle x - a \rangle^0$$

$$M = -\frac{1}{2} q_0 \langle x - a \rangle^2$$

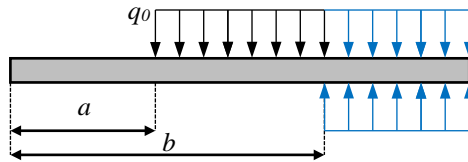


$$q = k \langle x - a \rangle$$

$$M = -\frac{1}{6}k \langle x - a \rangle^3$$

10.5 irudia

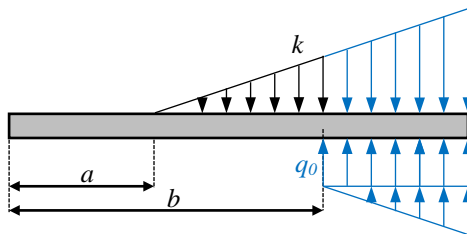
10.5 irudian azaltzen diren kasuetan karga banatuak habearen bukaeraraino iristen dira. Hori gertatzen ez bada, karga banatu egokiak batu eta kendu behar dira, hauek bukaeraraino irits daitezten. 10.6 irudian karga uniformearen kasua eta dagokion momentu ekuazioa azaltzen dira.



$$M = -\frac{1}{2}q_0 \langle x - a \rangle^2 + \frac{1}{2}q_0 \langle x - b \rangle^2$$

10.6 irudia

10.7 irudian karga linealaren kasua eta dagokion momentu ekuazioa azaltzen dira. Kasu honetan, karga lineala bukaeraraino eraman ahal izateko trapezio erako karga batu eta kendu behar da.



$$q_0 = k(b - a)$$

$$M = -\frac{1}{6}k \langle x - a \rangle^3 + \frac{1}{2}q_0 \langle x - b \rangle^2 + \frac{1}{6}k \langle x - b \rangle^2$$

10.7 irudia

10.4. MOHR-EN TEOREMAK

10.4.1 Lehenengo teorema (M1)

EED A eta B puntuen artean integratuz:

$$\theta_A - \theta_B = \int_A^B \frac{M}{EI_z} dx \quad (10.16)$$

(10.16) ekuazioan zurruntasuna uniformea bada:

$$\theta_A - \theta_B = \frac{S^{M_{A,B}}}{EI_z} \quad (10.17)$$

$S^{M_{A,B}}$ A eta B puntuen arteko momentu makurtzaile diagramaren azalera izanik.

10.4.2 Bigarren teorema (M2)

10.8 irudiaren arabera, B' puntutik A' puntuko ikutzaileraino dagoen distantzia bertikala kalkulatu nahi da. Horretarako, tarteko C' puntu baten inguruko C'_1 eta C'_2 puntuetako ikutzaileek sortutako distantzia determinatuko da lehenik:

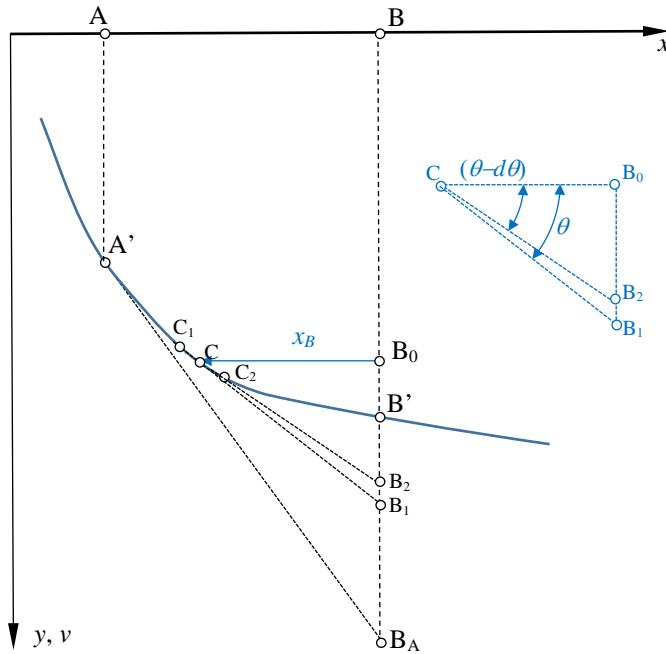
$$\overline{B_1 B_2} = \overline{B_0 B_1} - \overline{B_0 B_2} = x_B \theta - x_B (\theta - d\theta) = x_B d\theta \quad (10.18)$$

x_B B-n sorrera eta A-ranzko norantza duen koordenatua izanik. EED (10.18) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\overline{B_1 B_2} = -x_B \frac{M}{EI_z} dx \quad (10.19)$$

x_B eta x aldagaiek aurkako norantza dutenez, $dx = -dx_B$ betetzen da. B eta A artean integratuz, honakoa lortzen da:

$$\delta_{B,A} = \int_B^A \frac{M x_B}{EI_z} dx_B \quad (10.20)$$



10.8 irudia

EI_z zurruntasuna uniformea denean, (10.20) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\delta_{B,A} = \frac{Q_B^{M_{A,B}}}{EI_z} \tag{10.21}$$

$Q_B^{M_{A,B}}$ A eta B puntuen arteko momentu diagramaren B-rekiko momentu estatikoa izanik.

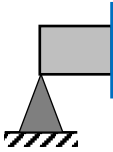


10.5. HABE KONJOKATUAREN METODOA

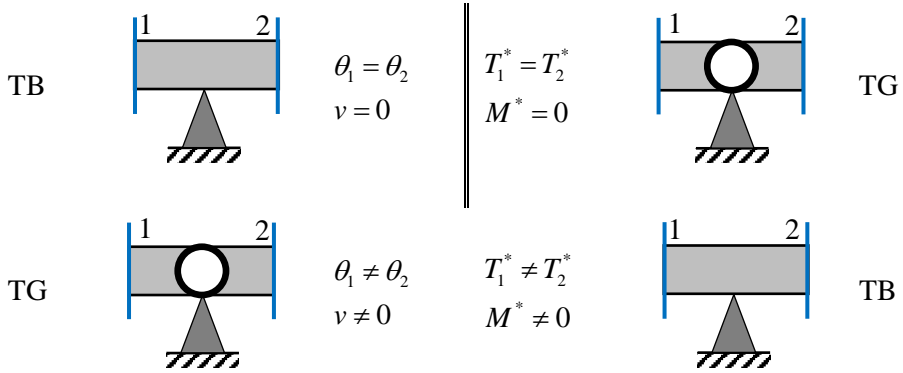
Metodo hau pieza prismatiko batean zerrada baten oreka ekuazioen eta EED-ren artean dagoen parekotasunean oinarritzen da. Habe konjokatua $q^* = \frac{M}{EI_z}$ indar banatua jasaten duen habe irudikaria da, Estatikako ekuazioak erabiliz makurdurako desplazamendu eta angeluak determinatzeko erabil daitekeena. Beheko taulan ikus daitezenez, habe konjokatuan lortutako T^* indar ebakitzaille konjokatuak benetako

haberean θ angeluak dira. Habe konjokatuan lortutako M^* momentu makurtzaileak, benetako haberean v desplazamenduak dira.

Oreka	EED	Habe konjokatua
$\frac{dT}{dx} = -q$	$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI_z}$	$\frac{dT^*}{dx} = -q^*$
$\frac{dM}{dx} = T$	$\frac{dv}{dx} = \theta$	$\frac{dM^*}{dx} = T^*$
$\frac{d^2M}{dx^2} = -q$	$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z}$	$\frac{d^2M^*}{dx^2} = -q^*$

Ekuazioetako magnitudeak aldatzen direnez, ingurune baldintzak ere aldatu egiten dira. 10.9 irudian adibide batzuk azaltzen dira.

	Habea		Habe Konjokatua	
BS		$\theta \neq 0$ $v = 0$	$T^* \neq 0$ $M^* = 0$	BS
MA		$\theta \neq 0$ $v \neq 0$	$T^* \neq 0$ $M^* \neq 0$	LA
LA		$\theta = 0$ $v = 0$	$T^* = 0$ $M^* = 0$	MA



10.9 irudia

Beste berma baldintza batzuk prozedura bera jarraituz azter daitezke: alde batetik, benetako habean sortzen duten angelu eta desplazamendu baldintza aztertu. Ondoren, habe konjokatuko indar ebakitzaila eta momentu makurtzaila baldintzetan bihurtu, eta zein lotura motari dagozkion erabaki.

Habe Konjokatuaren metodoan, indarren oreka ekuazioa erabiltzea Mohr-en lehenengo teorema (M1) aplikatzearen parekoa da. Beste alde batetik, momentuen ekuazioak erabiltzerakoan, indar banatu konjokatuak eragiten duen momentua Mohr-en bigarren teorema (M2) aplikatzearen parekoa da.

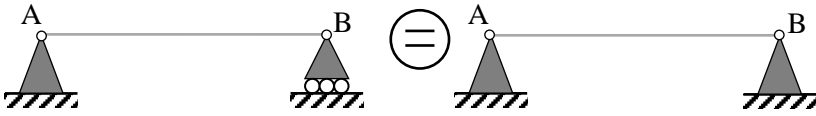
11. MAKURDURA: HIPERESTATIZITATEA

11.1. SARRERA

Makurdurako kasu hiperestatikoetan desplazamendu eta angelu baldintzak ezarri behar dira, Estatikako ekuazioez gain indar eta momentu ezezagunak determinatu ahal izateko. Makurdurako desplazamendu eta angelu horiek determinatzeko “*Makurdura: zurruntasuna*” gaiko metodoak erabiliko dira. Metodo horiek sistema isostatikoetan erabili direnez, sistema hiperestatiko bat ebazteko garaian, lehen urratsa sistema isostatiko batean bihurtzea da, dituen lotura gehigarriak indar edo momentu egokiengatik ordezkatzuz. Indar eta momentu hauek *ezezagun hiperestatikoak* deitzen dira. Desplazamendu eta angelu baldintzak kendutako lotura horiei dagokienak dira. Gai honetan habe jarraien hiperestatizitatea ebazteko metodo bat ere aztertuko da, *hiru momentuen teorema*, Clapeyron-ek (1799-1864) garatutakoa.

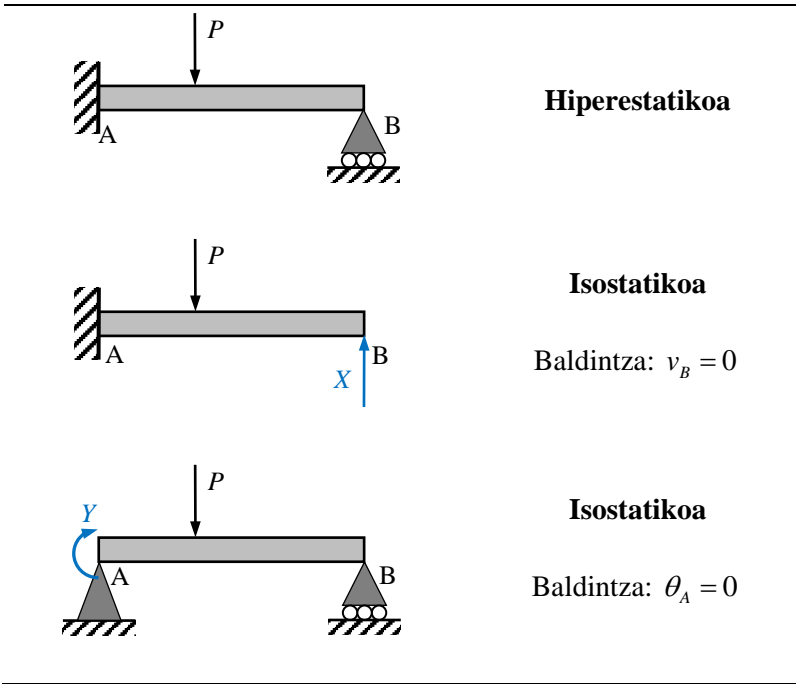
11.2. TARTE BAKARREKO HABEAK

Habearen ardatzean bi bermapuntu finko dituen habea eta soilki bermatua berdintzat hartuko dira *desplazamendu txikien* problemetan, 9.2 irudian azaltzen denez. Loturak habearen ardatzean ez badaude, indar normal haundiak sor daitezke. Izan ere, loturak dauden lerroa ez da deformatzen eta ondorioz gainazal neutrokoa da, makurdura konposatua sortuz.



11.1 irudia

Sistema hiperestatikoa isostatikoan bihurtzeko bidea ez da bakarra. 11.2 irudian sistema bera isostatiko bihurtzeko bi aukera azaltzen dira. Habe konjokatuaren metodoa erabiltzen bada, gainjarmen printzipioa erabiltzea egokia da, karga bakoitzari dagozkion momentuak sistema isostatiko baliokidean adieraziz.



Hiperestatikoa

Isostatikoa

Baldintza: $v_B = 0$

Isostatikoa

Baldintza: $\theta_A = 0$

11.2 irudia

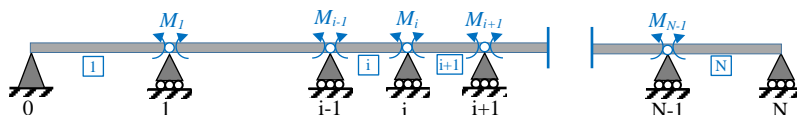
11.3. HIRU MOMENTUEN TEOREMA

11.3 irudian $(N+1)$ bermapuntu dituen habe jarraia azaltzen da. Jasaten dituen indarrak ez dira irudian adierazi. Bermapuntuak eta beren arteko tartekak zenbakien bidez izendatzen dira, $(i-1)$ eta (i) bermapuntuen arteko tartea $[i]$ izanik.



11.3 irudia

Habearen hiperestatizitate maila $(N-1)$ da, tarteko bermapuntu kopuruarena. Habe hori isostatiko bihurtzeko bide bat, bermapuntu gaineko biraketa ahalbideratzea da. Modu honetan, soilki bermatutako N habe isostatiko sortzen dira. Biraketari dagozkion loturak kendu direnez, momentu makurtzaile ezezagunak barneratu behar dira ezezagun hiperestatiko bezala, 11.4 irudian azaltzen den bezala. Ezezagun horiek determinatzeko baldintza bermapuntuetako angeluen jarratasuna da. Habe konjokatuaren metodoa erabiliko da baldintza hori barneratzeko.



11.4 irudia

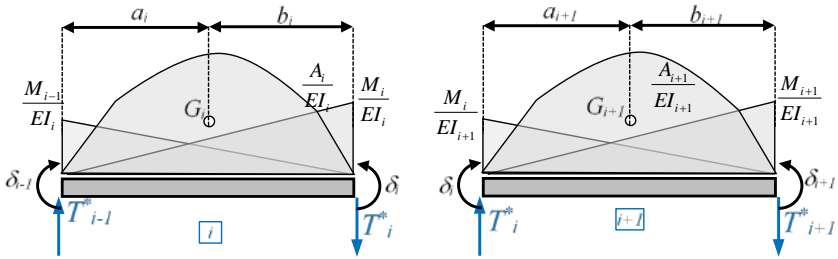
Habe jarraiaren sistema isostatiko baliokidea ezaugarri hauek dituzten N soilki bermatutako habez osatua dago:

- Tarte bakoitzean inertzia momentua uniformea da, I_i izanik
- Bermapuntuak δ_i desplazamenduak dituzte

Tarte bakoitzean momentu makurtzaileen diagrama hiru zatiz osatua dago:

- Ezkerreko momentuaren diagrama lineala
- Eskuineko momentuaren diagrama lineala
- Kanpoko indarrei dagokion diagrama, diagrama isostatikoa deitzen dena, soilki bermatutako habeari baitagokio.

10.4 irudian $[i]$ eta $[i+1]$ tarteen habe konjokatuak azaltzen dira. Bermapuntuetako δ_i desplazamenduak momentu aplikatuak dira habe konjokatuaren muturretan. Bermapuntuen ordeztan, indar ebakitzailen konjokatuak adierazi dira.



11.5 irudia

[i] tarteko $(T_i^*)_i$ indar ebakitzaille konjokatua (i-1) bermapuntuan momentuak hartuz determinatzen da, honakoa izanik:

$$(T_i^*)_i = -\frac{1}{6} \frac{M_{i-1} L_i}{EI_i} - \frac{1}{6} \frac{2M_i L_i}{EI_i} - \frac{A_i a_i}{EL_i I_i} + \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_i} \quad (11.1)$$

[i+1] tarteko $(T_i^*)_{i+1}$ indar ebakitzaille konjokatua (i+1) bermapuntuan momentuak hartuz determinatzen da, honakoa izanik:

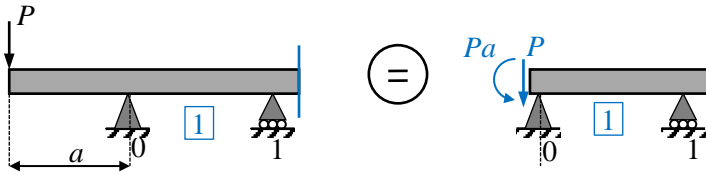
$$(T_i^*)_{i+1} = \frac{1}{6} \frac{2M_i L_{i+1}}{EI_{i+1}} + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{EI_{i+1}} + \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{EL_{i+1} I_{i+1}} + \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{L_{i+1}} \quad (11.2)$$

Hiperstatikotasun baldintza *angeluen jarraitasuna* denez, (10.16) eta (11.2) ekuazioak berdinduz eta $(6E)$ atalez atal biderkatuz, hiru momentuen ekuazioa lortzen da:

$$\begin{aligned} M_{i-1} \frac{L_i}{I_i} + 2M_i \left(\frac{L_i}{I_i} + \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{I_{i+1}} &= -6 \frac{A_i a_i}{L_i I_i} - 6 \frac{A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1} I_{i+1}} - 6E(\beta_{i+1} - \beta_i) \\ \beta_i = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{L_{i+1}} \end{aligned} \quad (11.3)$$

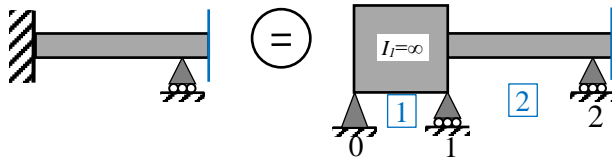
Orain arte bermapuntu soilak aztertu dira. Hegalkin bat baldin badago, isostatikoa denez, bere eraginagatik ordezkaten da. 11.6 irudian hegalkina ezker muturrean

dagoeneko kasua azaltzen da. Bermapuntuko momentua (11.3) ekuazioan barneratzen da, kasu honetan $M_0 = -Pa$ izanik.



11.6 irudia

Landapen bat baldin badago, $I = \infty$ duen tarte batengatik ordezkatzeko da. 11.7 irudian ezker muturreko hegalkina nola ordezkatzeko den azaltzen da. (11.3) ekuazioaren arabera, I_1 inertzia momentua barneratzen duten batugaia nuluak dira.



11.7 irudia

Azkenik, bermapuntuetako desplazamenduak nuluak badira eta tarte guztietako inertzia momentuak berdinak badira, (11.3) ekuazioa honela gelditzen da:

$$M_{i-1}L_i + 2M_i(L_i + L_{i+1}) + M_{i+1}L_{i+1} = -6\frac{A_i a_i}{L_i} - 6\frac{A_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1}} \quad (11.4)$$

12. BIHURDURA

12.1. SARRERA

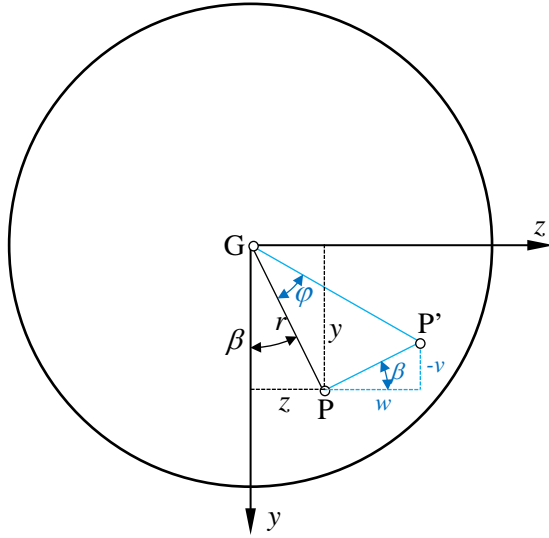
Gai honetan momentu bihurtzailea jasaten duten pieza prismatikoak aztertuko dira. Ardatz birakorrek adibidez, potentzia momentu bihurtzaileen bidez igortzen dute. Egiturretan ere, momentu bihurtzaileak jasaten dituzten osagaiak azaltzen dira. Sekzio zirkularrak, errektangularrak eta lodiera txikiko sekzio irekiak eta itxiak aztertuko dira. Ikusiko denez, bihurdurarako sekzio egokienak lodiera txikiko itxiak dira. Sekzio ireki batean indar ebakitzzailearen aplikazio puntua edo *bihurdura zentrua* non dagoen determinatuko da. Azkenik, makurdura eta bihurduraren eragin bateratua aztertuko da.

12.2. SEKZIO ZIRKULARRA

Coulomb-en hipotesiaren arabera, bihurduan sekzio lauek lau jarraitzen dute solido zurrun gisa biratuz. Ondorioz, sekzioko erradioek zuzen jarraitzen dute. 9.2 irudian y , z koordenatuak dituen P puntua deformatu baino lehen eta ondoren azaltzen dira. Deformatu baino lehen GP erradioa, $\overline{GP} = r$ izanik, deformatu ondoren GP' erradioan bihurtzen da, φ bihuradura angelua biratuz. x ardatzean desplazamendu osagaia nulua denez, desplazamendu bektorea honakoa da:

$$\overline{PP'} = v\hat{j} + w\hat{k} \quad (12.1)$$

9.2 irudian φ angelua zenbaki txikia dela eta GP erradioa definitzen duen angelua $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ tartean dagoela azpimarratu behar da.

**12.1 irudia**

GP erradioak φ angelu txikia biratzen duenez, arku ikutzailagatik ordezkatu daiteke eta honakoa betetzen da:

$$\overline{PP'} = r\varphi \quad (12.2)$$

(12.2) ekuazioak ematen duen desplazamenduaren modulua ardatzetan proiektatuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ -v &= r\varphi \sin \beta = r\varphi \frac{z}{r} = z\varphi \\ w &= r\varphi \cos \beta = r\varphi \frac{y}{r} = y\varphi \end{aligned} \quad (12.3)$$

(12.3) ekuazioetako desplazamenduekin deformazio unitario normal eta tangentialak determinatu daitezke:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x = u_{,x} &= 0 & \gamma_{xy} = v_{,x} + u_{,y} &= -z\varphi_{,x} \\
 \varepsilon_y = v_{,y} &= 0 & \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} &= 0 \\
 \varepsilon_z = v_{,z} &= 0 & \gamma_{zx} = u_{,z} + w_{,x} &= y\varphi_{,x}
 \end{aligned}
 \tag{12.4}$$

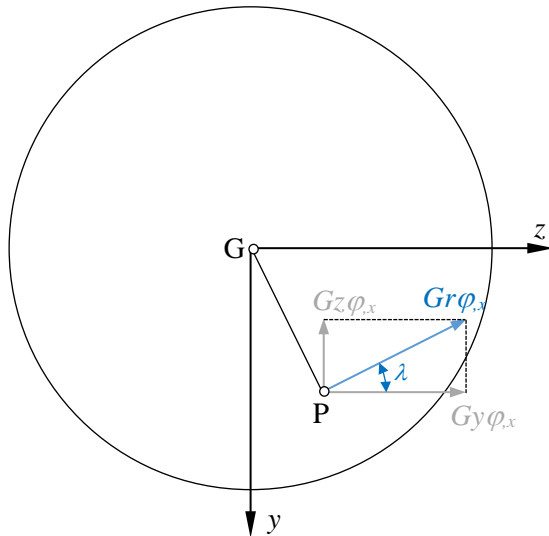
Hooke-ren legea kontuan izanik, (12.4) ekuazioen arabera nuluak ez diren tentsio osagai bakarrak τ_{xy} eta τ_{zx} dira:

$$\tau_{xy} = -Gz\varphi_{,x} \quad \tau_{zx} = Gy\varphi_{,x}
 \tag{12.5}$$

Tentsio ebakitzaileren osagaiak (12.5) ekuaziokoak izanik, P puntuko tentsio ebakitzaille erresultantea honakoa da:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2} = Gr\varphi_{,x}
 \tag{12.6}$$

12.2 irudian τ_{xy} eta τ_{zx} tentsio tangentialak eta beren τ erresultantea azaltzen dira. Honek horizontalarekin osatzen duen λ angelua β -ren berdina da, $\tan \lambda = \frac{z}{y} = \tan \beta$ baita. Beraz, sekzioko edozein P punturen tentsioak osagai erradialik ez du.



12.2 irudia

Momentu bihurtzailea sekzioko tentsio ebakitzailen momentu erresultantea denez:

$$M_t = \int_A \tau r dA \quad (12.7)$$

(12.6) ekuazioa (12.7) ekuazioan ordezkaturaz honakoa lortzen da:

$$M_t = G \varphi_{,x} \int_A r^2 dA = G I_p \varphi_{,x} \quad (12.8)$$

I_p inertzia momentu polarra izanik. (12.8) ekuazioa honela ere idatz daiteke:

$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G I_p} \quad (12.9)$$

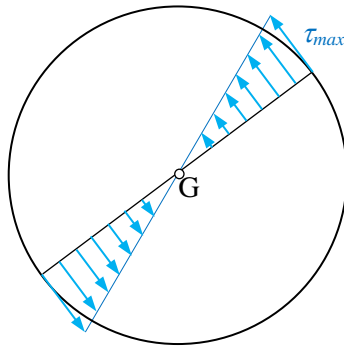
$\varphi_{,x}$ luzera unitateko bihurtura angelua deitzen da eta $G I_p$ bihurturako zurruntasuna da. (12.9) ekuazioa (12.6) ekuazioan ordezkaturaz, tentsio ebakitzailaren eta momentu bihurtzailearen arteko erlazioa lortzen da:

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} \quad (12.10)$$

Sekzioaren diametroa D bada, $I_p = \frac{1}{32} \pi D^4$. Tentsio ebakitzaille maximoa kanpoko puntuetan dago, $r = \frac{1}{2} D$ denean:

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_t}{\pi D^3} \quad (12.11)$$

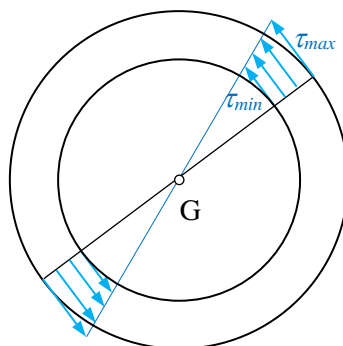
12.3 irudian sekzio zirkularrak diametro batean duen tentsio banaketa azaltzen da.



12.3 irudia

Coulomb-en hipotesia, sekzio zirkular betearentzat ezezik sekzio hutsarentzat ere egokia da eta beraz (12.10) ekuazioa erabil daiteke. 12.4 irudian tentsio banaketa azaltzen da. Kanpo eta barne diametroak D eta d izanik hurrenez hurren, inertzia momentu polarra $I_p = \frac{1}{32} \pi (D^4 - d^4)$ da. (12.10) ekuazioaren arabera tentsio maximoa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} \quad (12.12)$$



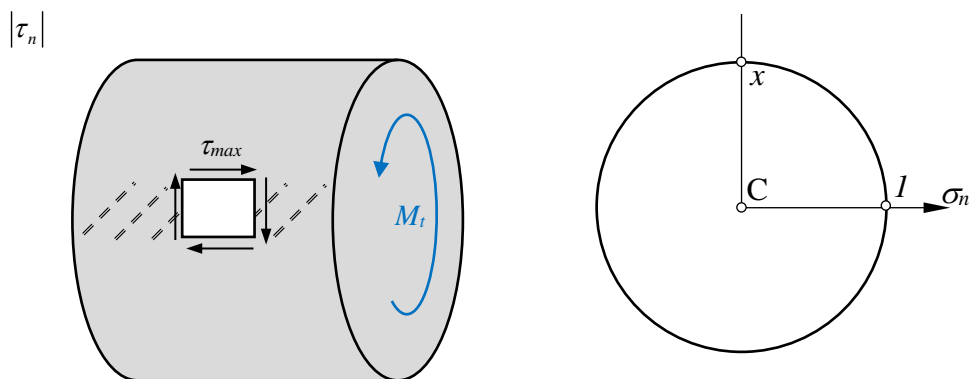
12.4 irudia

Zurruntasunari dagokionez, (12.9) ekuazioa A eta B sekzioen artean integratuz, bi sekzioen arteko angelu diferentzia lortzen da:

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B \frac{M_t}{GI_p} dx \quad (12.13)$$

GI_p bihurtura zurruntasuna uniformea bada, (12.13) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{S^{M_t A, B}}{GI_p} \quad (12.14)$$

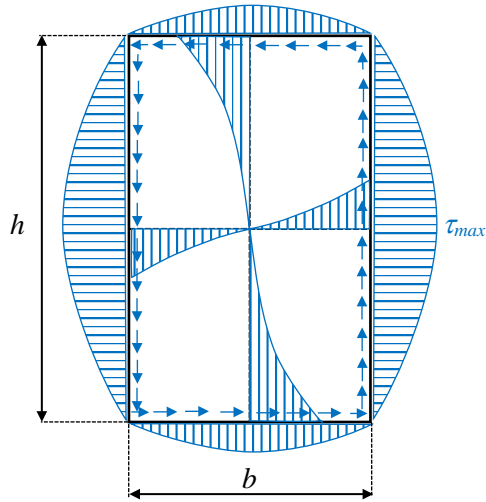


12.5 irudia

Tentsio ebakitzaile maximoak piezaren kanpo aldean daudenez, piezaren ardatzaren norabidean eta perpendikularrean ebakidura hutsezko egoera dago, 12.5 irudian ikus daiteken bezala. Material hauskorrek trakzioko tentsio maximoko planoetatik hausten direnez, haustura helikoidalak gertatzen dira 45° ra. Adibidez, klarionari bihurtura aplikatuz lortzen dena.

12.3. SEKZIO LAUKIZUZENA

Sekzioa laukizuzena denean Coulomb-en hipotesia ez da betetzen. Problema hau Saint-Venant-ek ebatzi zuen Elastikotasunaren Teoria erabiliz. Tentsio maximoak alde haundienaren erdian gertatzen dira, 12.6 irudian azaltzen den bezala.



12.6 irudia

Tentsio maximoaren balioa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha b h^2} \tag{12.15}$$

Luzera unitateko bihurtura angelua honakoa da:

$$\varphi_{,x} = \frac{M_t}{G I_t} \quad I_t = \beta h b^3 \tag{12.16}$$

I_t sekzio laukizuzenari dagokion bihurturako inertzia momentu baliokidea izanik. α eta β parametroen balio batzuk ondorengo taulan ematen dira, $h \geq b$ izanik.

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

12.4. LODIERA TXIKIKO SEKZIO IREKIAK

Prandtl-en analogiaren arabera, bihurturako problema eta presioa jasaten duen mintz elastikoaren problemak analogoak dira, biak ala biak agintzen dituzten ekuazio

diferentzialak analogoak baitira. Ondorioz, analogia hori erabiliz, problema batetik lortutako emaitzak bestean erabil daitezke. Mintz elastikoak diren xaboi pelikulekin egindako esperimentuetatik, bihurturako problemetarako ondorioak atera dira.

Analogia horren arabera, lodiera txikiko sekzio ireki baten kasuan sekzioaren formak ez du tentsio banaketa baldintzatzen eta sekzio laukizuzena bailitz analiza daiteke, lodiera uniforme duen kasuan $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ izanik. Lodieran zehar tentsio banaketa lineala dela suposatzen da. Sekzioaren lodiera aldakorra denean, τ_{\max} tentsio maximoa honakoa da:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t t}{I_t} \quad (12.17)$$

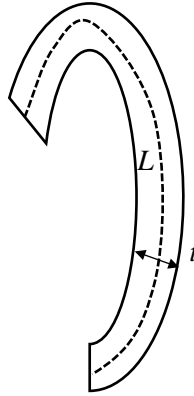
(12.17) ekuazioaren arabera, tentsio maximoa lodiera maximoari dagokio. Luzera unitateko angelua honakoa da:

$$\varphi_{,x} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (12.18)$$

(12.17) eta (12.18) ekuazioetan, lodiera txikiko sekzio irekiari dagokion I_t inertzia momentu baliokidea honakoa da:

$$I_t = \int_L t^3 ds \quad (12.19)$$

(12.19) ekuazioko integrala 12.7 irudian azaltzen den L erdiko lerroan hedatua egonik.



12.7 irudia

Sekzioa t_i lodiera uniformeko eta s_i luzerako n zatiz osatua dagoenean, (12.19) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$I_t = \sum_{i=1}^n t_i^3 s_i \quad (12.20)$$

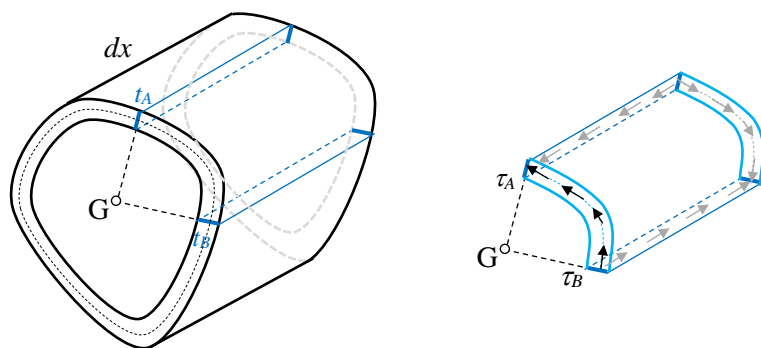
12.5. LODIERA TXIKIKO SEKZIO ITXIAK

Prandtl-en analogiaren arabera, tentsioak uniformeak dira lodieran zehar. 12.8 irudian ikusten denez, piezaren dx luzerako elementu batetik zati bat isolatzen da, zatiaren ertzetako lodierak t_A , t_B izanik. dx luzeran tentsioak uniformeak direnez, x ardatzeko indarren oreka planteatuz:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau_A t_A = \tau_B t_B \quad (12.21)$$

(12.21) ekuazioaren arabera, $q_t = \tau t$ fluxu ebakitzaila uniformea da sekzioan zehar. 12.9 irudian $dA = t ds$ azalera elementu batean tentsio ebakitzailari dagokion indarra azaltzen da. dF indar horrek eragindako momentu bihurtzaila honakoa da:

$$dM_t = dFr = (\tau dA)r = (\tau t ds)r \quad (12.22)$$



12.8 irudia

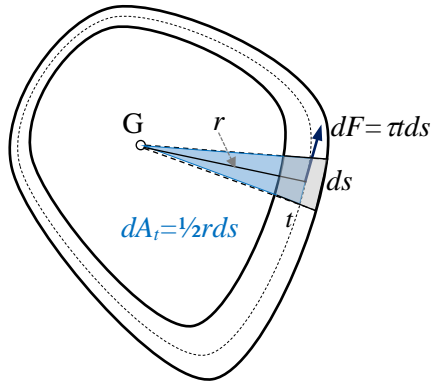
(12.22) ekuazioa integratuz, momentu bihurtzailea honakoa da:

$$M_t = \tau t \int_L r ds \quad (12.23)$$

(12.23) ekuazioan τt integraletik atera daiteke uniformea delako. Gainera, 12.9 irudian azaltzen denez $dA_t = \frac{1}{2} r ds$ eta ondorioz $A_t = \frac{1}{2} \int_L r ds$, A_t erdiko lerroak barneratzen duen azalera izanik. Beraz, (12.23) ekuaziotik momentu bihurtzailearen eta tentsio ebakitzzailearen arteko erlazioa honakoa da:

$$\tau = \frac{M_t}{2A_t t} \quad (12.24)$$

(12.24) ekuazioaren arabera, tentsio maximoa lodiera minimoko puntuetan dago. Gainera, tentsioa jasateko sekzioaren hutsunea da garrantzitsua, ez material kopurua, A_t -ren azalera gehiena hutsuneari dagokiona baita. Horregatik, *lodiera txikiko sekzio itxiak bihurdurarako egokienak* dira.



12.9 irudia

Zurruntasunaren analisia garatzeko, momentu bihurtzaileak dx luzerako elementu diferentzial batean egindako dW_t lanaren eta metatutako dU_t deformazio energiaren berdintsuna erabiliko da. Elementuaren bi aldeen artean biratutako angelua $d\varphi$ izanik, lana honakoa da:

$$dW_t = \frac{1}{2} M_t d\varphi \quad (12.25)$$

yz planoko tentsio ebakitzaileak bakarrik daudenez, bolumen unitateko deformazio energia honakoa da:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{\tau^2}{2G} \quad (12.26)$$

dx luzerako elementuaren deformazio energia honakoa da:

$$dU_t = \left(\int_A U_0 dA \right) dx = \left(\int_L \frac{\tau^2}{2G} t ds \right) dx \quad (12.27)$$

(12.24) ekuazioa (12.27) ekuazioan ordezkatzuz, honela gelditzen da:

$$dU_t = \left(\int_L \frac{\tau^2}{2G} t ds \right) dx = \left(\frac{M_t^2}{8A_t^2 G} \int_L \frac{ds}{t} \right) dx \quad (12.28)$$

(12.25) eta (12.28) ekuazioak berdinduz, luzera unitateko bihurtura angelua honakoa da:

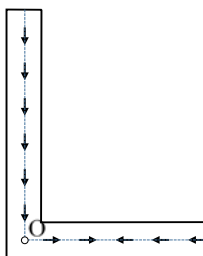
$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t} \quad I_t = \frac{4A_t^2}{\int_L \frac{ds}{t}} \quad (12.29)$$

(12.29) ekuazioan, I_t inertzia momentu baliokidean azaltzen den integrala batukariagatik ordezkatzeko da sekzioa lodiera uniformeko zati zuzenez osatua dagoenean. Gainera, erdiko lerroak barneratutako A_t azalera azaltzen denez, materiala ez egoteak zurruntasuna handitzen du.

12.6. BIHURDURA ZENTRUA

Bihurdura zentrua indar ebakitzailaren aplikazio puntua da eta O letrarekin izendatuko da. Lodiera txikiko sekzio ireki batzuetan bihurtura zentrua eta grabitate zentrua ez dira puntu bera. Makurdura bakuna aztertzerakoan, fluxu ebakitzailaren teorema eta hipotesi sinplifikatzaileak erabiliz sekzioko tentsio banaketa determinatu da, indar ebakitzaila grabitate zentruan dagoela suposatuz, azken baldintza hau erabili ez bada ere.

Sekzioak simetria ardatza badu, O bertan dago. Beraz, sekzioak bi simetria ardatz baditu O eta G puntu bera dira. Sekzio zati desberdinen erdiko lerroak puntu batean mozten badira, bihurtura zentrua puntu hori da, 12.10 irudian azaltzen den L sekzioaren kasuan bezala.

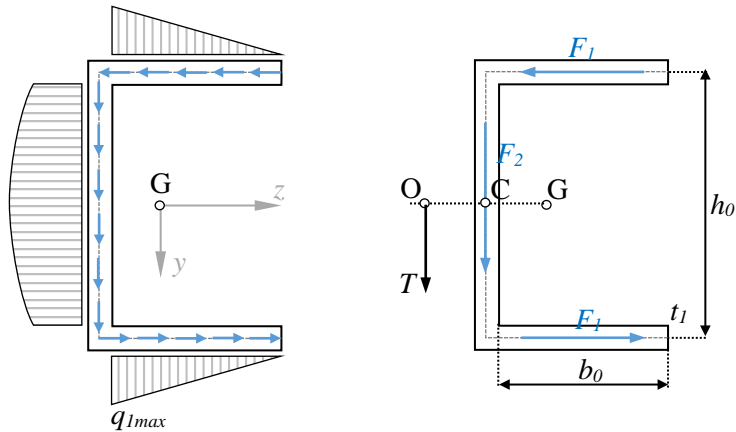


12.10 irudia

U erako sekzio baten kasua aztertuko da tentsio banaketaren erresultantea non dagoen determinatzeko. 12.11 irudian sekzioko tentsio banaketa eta tentsio horiek ghaletan eta ariman dituzten F_1 eta F_2 erresultanteak, hurrenez hurren, azaltzen dira.

Bektore horien erresultantea T indar ebakitzailera da eta O puntuan aplikatua dago. Simetriagatik, O z ardatzean dago eta bere kokapena Varignon-en teorema C puntuan aplikatuz lortzen da:

$$\overline{TOC} = F_1 h_0 \tag{12.30}$$



12.11 irudia

Fluxu ebakitzailera luzera unitateko indar banatua denez, hegaletako maximoa q_{lmax} izanik, F_1 indarra honakoa da:

$$F_1 = \frac{1}{2} b_0 q_{lmax} \tag{12.31}$$

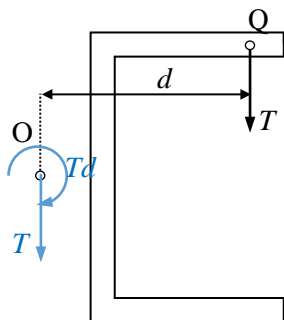
Fluxu ebakitzailerearen teorema erabiliz, hegaletako fluxu maximoa honakoa da:

$$q_{lmax} = \frac{T}{I_z} \frac{1}{2} b_0 t_1 h_0 \tag{12.32}$$

(12.30)-(12.32) ekuazioak konbinatuz, honakoa lortzen da:

$$\overline{OC} = \frac{b_0^2 h_0^2}{4 I_z} t_1 \tag{12.33}$$

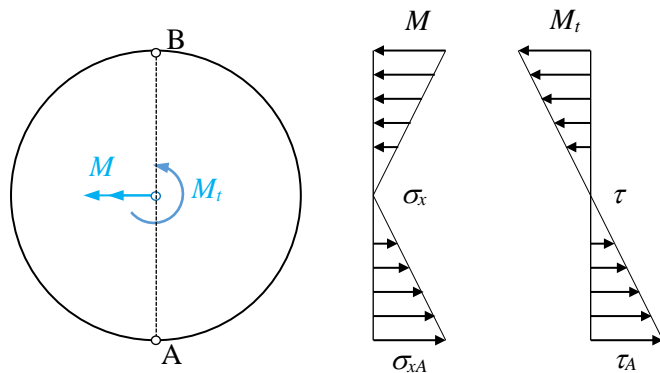
T indar ebakitzaila bihurtura zentruan aplikatzeko sekzioari gehigarri bat erantsi beharko litzaioke. T sekzioko beste Q puntu batean aplikatua badago, Td momentu bihurtzailea sortzen da, 12.12 irudian azaltzen den bezala. Adibidez, U erako edo L erako hegalin batek berezko pisua jasaten badu bihurtura gertatzen da, sekzio bakoitzeko bolumen indarren erresultantea sekzioaren grabitate zentruan baitago.



12.12 irudia

12.7. BIHURDURA-MAKURDURA

Bihurdura eta makurdura batera gertatzen diren kasuetako bat ardatz zirkular birakorrena da. 12.13 irudiaren arabera, demagun D diametroko sekzioak M momentu makurtzailea eta M_t momentu bihurtzailea jasaten dituela.



12.13 irudia

Tentsio normal maximoak A eta B puntuetan daude eta bihurturako tentsio ebakitzaila maximoak sekzioaren inguruneko edozein puntutan daude, A eta B barne. A puntuko tentsio normal eta ebakitzaila honakoak dira:

$$\sigma_{xA} = \frac{32M}{\pi D^3} \quad \tau_A = \frac{16M_t}{\pi D^3} \quad (12.34)$$

Ardatzak normalean material harikorrez eginak daude eta hauetan tentsio ebakitzaille maximoaren erizpidea erabil daiteke. Tentsio ebakitzaille maximoa Mohren zirkuluaren erradioa denez, (12.34)-ko tentsioak erabiliz:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xA}}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \frac{16}{\pi D^3} \sqrt{M^2 + M_t^2} \quad (12.35)$$

(12.35) ekuazioko tentsio maximoa materialaren tentsio onargarriarekin berdinduz eta D diametroa askatuz, honakoa lortzen da:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \tau_{on}} \sqrt{M^2 + M_t^2}} \quad (12.36)$$

13. TEOREMA ENERGETIKOAK

13.1. SARRERA

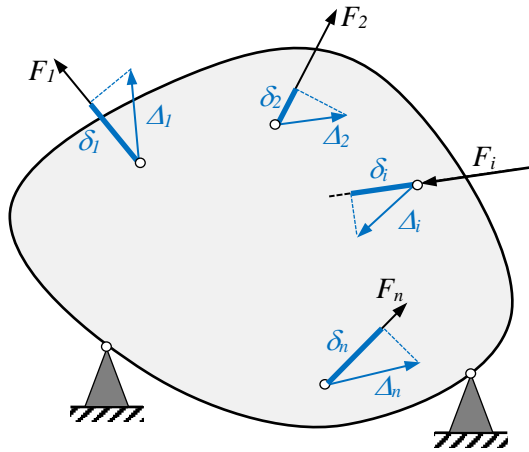
Elementu diferentzial batean desplazamenduak aldatzen direnean tentsioek egindako lana “Gorputz Elastikoa” gaian determinatu da eta *Deformazio Energia* deitu da. Gai honetan kanpoko indarrek egindako lana deformazio energian bihurtzen dela suposatuko da, marruskaduraren energia eta energia zinetikoa kontuan hartu gabe. Desplazamenduak aldatu ordez indarrak aldatzen badira, lan osagarria eta deformazio energia osagarria edo koenergia definituko dira. Kasu honetan ere, lan osagarria koenergia bihurtzen dela suposatuko da. Azken berdintasun honetan oinarrituz Engesser-Castigliano-ren teorema deduzituko da. Koenergia sekzio indarren bidez adieraziz eta Engesser-Castiglianoren teorema erabiliz, desplazamenduak determinatuko dira sistema isostatikoetan eta hiperestatizitatea ebatziko da sistema hiperestatikoetan. Gai honetan *”desplazamendua” eta ”indarra” hitzak esanahi orokortuan* erabiltzen dira. Hau da, *”desplazamendua”* hitzak *desplazamenduak eta angeluak* barneratzen ditu eta *”indarra”* hitzak *indarrak eta momentuak* barneratzen ditu. Lana eta lan osagarria determinatzerakoan, indarra eta bere norabideko desplazamendua, edo momentua eta bere norabideko biraketa bidertzen dira.

13.2. KANPOKO INDARREN LANA ETA LAN OSAGARRIA

$\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ kanpoko indar sistema jasaten duen sistema isostatikoa analizatuko da. Indarren aplikazio puntuen desplazamenduak $\vec{\Delta}_1, \dots, \vec{\Delta}_n$ dira, eta desplazamendu hauen osagaiak indarren norabidean $\delta_1, \dots, \delta_n$ dira, 13.1 irudian azaltzen denez. Indarrak

aldaketa txikien bidez edo kuasiestatikoki aplikatzen dira. Desplazamenduen aldaketa diferentziala suposatzen bada, W lanaren diferentziala honela definitzen da:

$$dW = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{\Delta}_i = \sum_{i=1}^n F_i d\delta_i \quad (13.1)$$

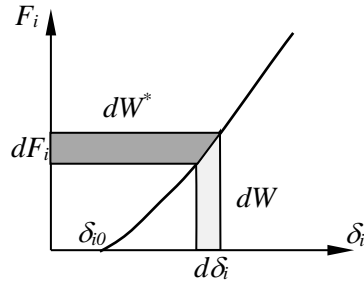


13.1 irudia

Desplazamenduen ordeztasunak aldatzen direla suposatzen bada, W^* lan osagarriaren diferentziala honela definitzen da:

$$dW^* = \sum_{i=1}^n \vec{\Delta}_i \cdot d\vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \delta_i dF_i \quad (13.2)$$

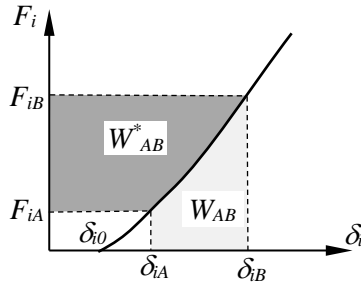
13.2 irudian lanaren eta lan osagarriaren esnaia azaltzen dira i puntuaren kasuan. Portaera elastiko ez lineala eta $F_i = 0$ denean bere norabideko $\delta_{i0} \neq 0$ desplazamendua dagoela suposatzen da.



13.2 irudia

A eta B konfigurazioen artean egindako lana eta lan osagarria 13.3 irudian azaltzen dira. Bi konfigurazioen artean integratuz lortzen dira, honakoak izanik:

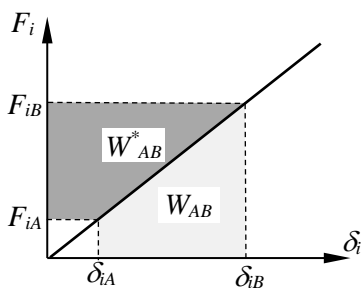
$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{i=1}^n \int_A^B F_i d\delta_i \quad W_{A \rightarrow B}^* = \sum_{i=1}^n \int_A^B \delta_i dF_i \quad (13.3)$$



13.3 irudia

Sistema elastiko lineal batean, hasierako δ_{i0} desplazamenduak nuluak direnean, lana eta lan osagarria berdinak dira, 13.4 irudian ikus daitezenez:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (F_{iB} \delta_{iB} - F_{iA} \delta_{iA}) \quad (13.4)$$



13.4 irudia

13.3. ELKARREKIKOTASUN TEOREMAK

Hasierako desplazamendurik ez duen sistema isostatiko elastiko lineal batek 13.5 irudian azaltzen diren bi indar aplikazio prozesuak jasaten ditu:

I: 1 puntuan F_1 indarra aplikatu ondoren 2 puntuan F_2 indarra aplikatzen da.

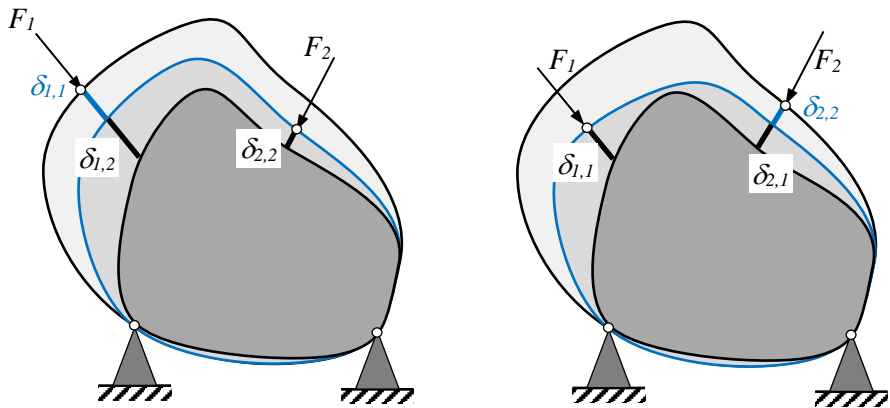
II: 2 puntuan F_2 aplikatu ondoren 1 puntuan F_1 indarra aplikatzen da.

I karga prozesuan, indarrek egindako lana honakoa da:

$$W_I = \frac{1}{2} F_1 \delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{22} + F_1 \delta_{12} \quad (13.5)$$

(13.5) ekuazioan, F_2 indarra aplikatzen denean F_1 indarrak bere bukaerako balioa du eta ondorioz $F_1 \delta_{12}$ lana egiten du. II karga prozesuan lana honakoa da:

$$W_{II} = \frac{1}{2} F_1 \delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{22} + F_2 \delta_{21} \quad (13.6)$$



13.5 irudia

Desplazamendu txikien kasuan lana indarren aplikazio ordenaren menpekoa ez denez, (13.5) eta (13.6) ekuazioak berdinduz *Lanen Elkarrekikotasun Teorema* (Betti) lortzen da:

$$F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21} \quad (13.7)$$

Indarrak berdinak badira, *Desplazamenduen Elkarrekikotasun Teorema* lortzen da (Maxwell):

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (13.8)$$

13.4. CASTIGLIANO ETA ENGESESSER-EN TEOREMAK

W lana U deformazio energian bihurtzen dela suposatuz, (13.1) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$dW = dU = \sum_{i=1}^n F_i d\delta_i \quad (13.9)$$

Gorputz elastikoan U diferentzial exaktoa dela onartzen da eta ondorioz *egoera-funtzioa* da, δ_i desplazamendu independenteak egoera aldagaiak izanik:

$$dU = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i \quad (13.10)$$

(13.9) eta (13.10) ekuazioak identifikatuz eta δ_i desplazamenduak independenteak direnez, honakoa betetzen da:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = F_i \quad (13.11)$$

(13.11) ekuazioa *Castiglianoren lehen teorema* da. Sistema isostatiko batean, deformazio energia desplazamenduen menpe adieraziz, indar aplikatuak determina daitezke.

W^* lan osagarria $U^* = C$ deformazio koenergian bihurtzen dela suposatuz, (13.2) ekuaziotik honakoa lortzen da:

$$dW^* = \sum_{i=1}^n \delta_i dF_i = dU^* = dC \quad (13.12)$$

Gorputz elastikoan C koenergia diferentzial exaktoa dela onartzen da eta ondorioz *egoera-funtzioa* da, F_i indar independenteak egoera aldagaiak izanik:

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial F_i} dF_i \quad (13.13)$$

(13.12) eta (13.13) ekuazioak identifikatuz, F_i indarrak independenteak direnez:

$$\frac{\partial C}{\partial F_i} = \delta_i \quad (13.14)$$

(13.14) ekuazioa Engesser-en lehen teorema da, Crotti-Engesser-en teorema ere deitzen dena. Castigliano-k Crotti eta Engesser-ek energia osagarria definitu aurretik $U = C$ betetzen duten sistema linealetan aplikatu zuenez, *Engesser-Castiglianoren* teorema deituko diogu. Sistema isostatiko batean, C koenergia indarren menpe adieraziz, desplazamenduak determina daitezke. Teorema hau (13.11) ekuazioko

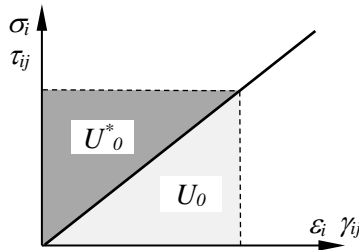
Castigilanoren lehen teorema baino erabilgarriagoa da, koenergia indar aplikatuen menpe adieraztea energia desplazamenduen menpe adieraztea baino errazagoa baita.

13.5. DEFORMAZIO ENERGIA ETA KOENERGIA

13.5.1 Tentsioen menpe

Bolumen unitateko U_0 deformazio energia “Gorputz Elastikoa” gaian determinatu da, tentsioek elementu diferentzial batean egindako lana kalkulatzeko. Egoera linealean eta hasierako deformaziorik gabe, energia eta koenergia berdinak dira. Helburua pieza prismaticoetan erabiltzea denez, nuluak ez diren batugaia idatziko dira bakarrik. Osagai hauek pieza prismaticoaren sekzioetan dauden hiru tentsio osagaiekin erlazionatuta daude: σ_x , τ_{xy} , τ_{zx} . 13.6 irudian azaltzen diren bolumen unitateko deformazio energia eta koenergia, U_0 eta C_0 hurrenez hurren, honakoak dira:

$$U_0 = C_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x) + \frac{1}{2}(\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (13.15)$$

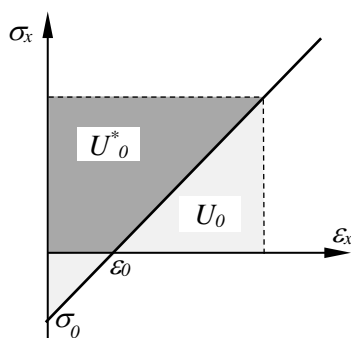


13.6 irudia

(13.15) ekuazioan, *osagai normalen batugaia indar normalarekin eta makurdurarekin* erlazionatuta dago. *Osagai tangenzialen batugaia indar ebakitzailarekin eta momentu bihurtzailarekin* erlazionatuta dago.

Temperatura aldaketa edo luzera erroreen ondorioz, hasierako ε_0 deformazio normalak egon daitezkeela suposatuko da. 13.7 irudian ikus daitekenez energia eta koenergia ez dira berdinak. Tentsio-deformazio erlazioa honakoa da:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_0 \quad (13.16)$$



13.7 irudia

13.7 irudiaren arabera, $\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_0$. Ondorioz, (13.16) ekuaziotik $\sigma_0 = -E\varepsilon_0$ lortzen da. *Bolumen unitateko deformazio koenergia* tentsioen menpe honakoa da:

$$U_0 \neq C_0 = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \sigma_x \varepsilon_0 \quad (13.17)$$

Osagai tangenzialen kasuan berriz, koenergia deformazio energiaren berdina da. (13.15) ekuaziotik, tentsioen menpe honela gelditzen da:

$$U_0 = C_0 = \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (13.18)$$

13.5.2 Sekzioko indarren menpe

Engesser-Castiglianoren teorema pieza prismatikoetan erabiliko denez, koenergia eta bere deribatuak sekzioko indarren menpe adieraziko dira.

Indar normala

Indar normalaren eta tentsio normalaren arteko erlazioa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (13.19)$$

(13.17) ekuazioan ordezkatzuz honakoa gelditzen da:

$$C_{0N} = \frac{N^2}{2EA^2} + \frac{N}{A} \varepsilon_0 \quad (13.20)$$

Pieza prismaticoan koenergia determinatzeko bolumenean integratu behar da. Integral hori *gainazal integral batean eta luzerako integral batean* bana daitezenez:

$$C_N = \int_V C_{0N} dV = \int_L \frac{N^2}{2EA^2} dl \int_A dA + \int_L \frac{N}{A} dl \int_A \varepsilon_0 dA \quad (13.21)$$

(13.21) ekuazioan L pieza prismaticoaren ardatza eta A sekzioa dira. ε_0 hasierako deformazioa sekzioan uniforme bada, (13.21) ekuazioa honela gelditzen da:

$$C_N = \int_L \frac{N^2}{2EA} dl + \int_L N \varepsilon_0 dl \quad (13.22)$$

Engesser-Castiglianoren teorema aplikatzeko, (13.22) ekuazioaren deribatua honakoa da:

$$C'_N = \int_L \frac{NN'}{EA} dl + \int_L N' \varepsilon_0 dl \quad (13.23)$$

(13.23) ekuazioan egin den bezala, *indarrekiko deribatuak prima bidez adieraziko dira*: $H' = \frac{\partial H}{\partial F_i}$, H kanpoko F_i indarren edozein funtzio delarik.

n barrako egitura giltzatu baten kasuan, N , E , A , ε_0 integraletik biderkagai komun bezala atera daitezenez, (13.23) ekuazioa honela gelditzen da:

$$C_N = \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} + N_i \varepsilon_{0i} L_i \right) \quad (13.24)$$

(13.24) ekuazioa deribatuz, honakoa lortzen da:

$$C'_N = \sum_{i=1}^n N'_i \left(\frac{N_i L_i}{E_i A_i} + \varepsilon_{0i} L_i \right) = \sum_{i=1}^n N'_i \Delta L_i \quad (13.25)$$

Momentu makurtzailea

Sekzioko ardatzak nagusiak direnean eta M_z momentu makurtzaileak bakarrik eragiten duenean, momentuaren eta tentsio normalaren arteko erlazioa honakoa da:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \quad (13.26)$$

(13.17) ekuazioan ordezkatzuz honakoa gelditzen da:

$$C_{0M_z} = \frac{M_z^2 y^2}{2EI_z^2} + \frac{M_z y}{I_z} \varepsilon_0 \quad (13.27)$$

(13.27) ekuazioa bolumenean integratuz honakoa lortzen da:

$$C_{M_z} = \int_V C_{0M_z} dV = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z^2} dl \int_A y^2 dA + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.28)$$

Lehen batugaiko gainazal integrala I_z inertzia momentua dela kontuan izanik, (13.28) ekuazioa honela gelditzen da:

$$C_{M_z} = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dl + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.29)$$

ε_0 hasierako deformazioa sekzioan uniformea bada, (13.29)-ko bigarren batugaia nulua da. (13.29) ekuazioa deribatuz, honakoa lortzen da:

$$C'_{M_z} = \int_L \frac{M_z M'_z}{EI_z} dl + \int_L \frac{M'_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 dA \quad (13.30)$$

Antzeko prozedura jarraituz, aplikatutako momentua M_y denean, koenergia eta bere deribatua, hurrenez hurren, honakoak dira:

$$C_{M_y} = \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dl + \int_L \frac{M_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 dA \quad (13.31)$$

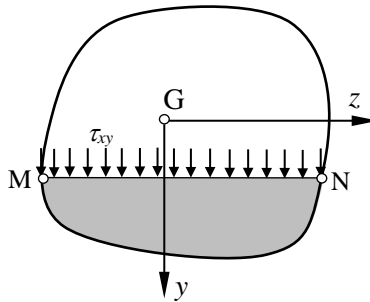
$$C'_{M_y} = \int_L \frac{M_y M'_y}{EI_y} dl + \int_L \frac{M'_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 dA \quad (13.32)$$

Indar ebakitzailera

Sekzioko ardatzak nagusiak direnean eta T_y indar ebakitzailera bakarrik eragiten duenean, 13.8 irudian ikusten den fluxu ebakitzailera duen MN lerroaren luzera b bada, indar eta MN lerroarekiko elkartutak diren tentsio ebakitzaileren arteko erlazioa honakoa da:

$$\tau = T_y \frac{Q_z^c}{bI_z} \quad b = \overline{MN} \quad (13.33)$$

MN lerroa horizontala bada, (13.33) ekuazioan $\tau = \tau_{xy}$ da eta MN lerroa bertikala bada, $\tau = \tau_{zx}$ da. Adibidez, “Makurdura. Tentsioak” gaian ikusi den bezala, U erako sekzio baten hegaletan τ_{zx} eta ariman τ_{xy} tentsioak daude.



13.8 irudia

(13.18) ekuazioan ordezkaturik honakoa gelditzen da:

$$C_{0r_y} = \frac{T_y^2 (Q_z^c)^2}{2Gb^2 I_z^2} \quad (13.34)$$

(13.34) ekuazioa piezaren bolumenean integraturik honakoa lortzen da:

$$C_{T_y} = \int_V C_{0T_y} dV = \int_L \frac{T_y^2}{2GI_z^2} dl \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \quad (13.35)$$

(13.35) ekuazioan A azalera bidertuz eta zatituz:

$$C_{T_y} = \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl \left(\frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \right) \quad (13.36)$$

(13.36) ekuazioa honela idazten da:

$$C_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl \quad \chi_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{(Q_z^c)^2}{b^2} dA \quad (13.37)$$

χ_y ebakidura faktorea da eta sekzioaren formaren araberako parametroa da. Adibidez, sekzioa laukizuzena bada, $\chi_y = \frac{6}{5}$. (13.37) ekuazioa deribatuz, honakoa lortzen da:

$$C'_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y T'_y}{GA} dl \quad (13.38)$$

Antzeko prozedura jarraituz, indarra T_z denean, koenergia eta bere deribatua, hurrenez hurren, honakoak dira:

$$C_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z^2}{2GA} dl \quad \chi_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \frac{(Q_y^c)^2}{b^2} dA \quad (13.39)$$

$$C'_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z T'_z}{GA} dl \quad (13.40)$$

Bihurdura

Bihurduraren kasuan, momentu bihurtzailearen eta tentsio ebakitzailen arteko erlazioa sekzio motaren araberakoa denez, koenergia beste modu batean determinatuko

da. Hasierako deformaziorik ez egoteagatik, koenergia deformazio energiaren berdina da eta hau kanpoko indarren lanaren berdina da. Sekzioa edozein motatakoa izanik ere, luzera unitateko angelua honakoa da:

$$\varphi_{,x} = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{M_t}{GI_t} \tag{13.41}$$

M_t momentua jasaten duen piezaren dl luzerako elementua hartuz, muturretako sekzioen artean biratutako angelua $d\varphi$ denez, momentu bihurtzailearen lana hau da:

$$dW_{M_t} = dU_{M_t} = dC_{M_t} = \frac{1}{2}M_t d\varphi \tag{13.42}$$

(13.41) ekuazioa (13.42) ekuazioan ordezkatzuz eta pieza pramatikoaren luzeran zehar integratuz:

$$C_{M_t} = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t} dl \tag{13.43}$$

(13.43) ekuazioa deribatuz honakoa lortzen da:

$$C'_{M_t} = \int_L \frac{M_t M'_t}{GI_t} dl \tag{13.44}$$

Laburpena

Sekzio bateko barne indar eta momentuen koenergiak independenteak direnez, koenergiak eta beren deribatuak determinatzerakoan gainjarpen printzipioa erabil daiteke. Ondorengo taulan barne indar eta momentu desberdinen koenergiak eta deribatuak azaltzen dira.

	Barne indarra	Koenergia	Deribatua
N Orokorra		$C_N = \int_L \frac{N^2}{2EA} dl + \int_L N \varepsilon_0 dl$	$C'_N = \int_L \frac{NN'}{EA} dl + \int_L N' \varepsilon_0 dl$

Giltzatua	$C_N = \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} + N_i \varepsilon_{0i} L_i \right)$	$C'_N = \sum_{i=1}^n N_i' \left(\frac{N_i L_i}{E_i A_i} + \varepsilon_{0i} L_i \right) = \sum_{i=1}^n N_i'$
<hr/>		
M_z	$C_{M_z} = \int_L \frac{M_z^2}{2EI_z} dl + \int_L \frac{M_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon_0 \rho$	$C'_{M_z} = \int_L \frac{M_z M'_z}{EI_z} dl + \int_L \frac{M'_z}{I_z} dl \int_A y \varepsilon$
M		
M_y	$C_{M_y} = \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y} dl + \int_L \frac{M_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon_0 \rho$	$C'_{M_y} = \int_L \frac{M_y M'_y}{EI_y} dl + \int_L \frac{M'_y}{I_y} dl \int_A z \varepsilon$
<hr/>		
T_y	$C_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y^2}{2GA} dl$	$C'_{T_y} = \chi_y \int_L \frac{T_y T'_y}{2GA} dl$
T		
T_z	$C_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z^2}{2GA} dl$	$C'_{T_z} = \chi_z \int_L \frac{T_z T'_z}{2GA} dl$
<hr/>		
M_t	$C_{M_t} = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_t} dl$	$C'_{M_t} = \int_L \frac{M_t M'_t}{GI_t} dl$
<hr/>		

Malgukiak

k zurruntasuna duen malguki lineal baten kasuan, malgukiak jasaten duen indarra F izanik, koenergia eta bere deribatua honakoak dira:

$$C_k = \frac{F^2}{2k} \quad C'_k = \frac{FF'}{k} \quad (13.45)$$

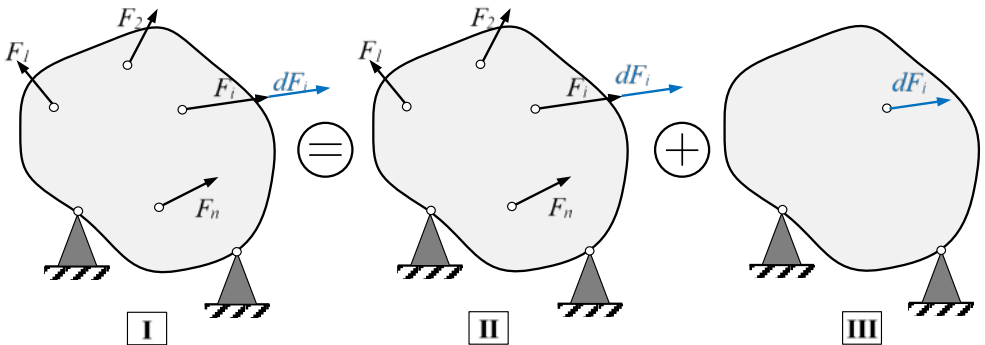
k_θ biraketarekiko zurruntasuna duen biraketa malguki baten kasuan, malgukiak jasaten duen momentua M izanik, koenergia eta bere deribatua honakoak dira:

$$C_{k_\theta} = \frac{M^2}{2k_\theta} \quad C'_{k_\theta} = \frac{MM'}{k_\theta} \quad (13.46)$$

13.6. SEKZIOKO INDARREN DERIBATUAK. INDAR UNITARIOAREN METODOA

Atal honetan sekzioko indarren deribatuen esanahia azalduko da. 13.9 irudian F_1, \dots, F_n indar independenteak jasaten dituen sistema isostatikoa azaltzen da. Edozein barne indar B kanpoko indar independenteen funtzioa da, hau da, $B = B(F_1, \dots, F_n)$. Beraz, F_i indarra dF_i aldatzen bada, barne indarra $B + B'dF_i$ da. Gainera, 13.9 irudian azaltzen denez:

$$B_I = B + B'dF_i \quad B_{II} = B \quad (13.47)$$



13.9 irudia

III konfigurazioko barne indarra, (13.47) ekuazioa eta gainjarmen printzipioaren arabera:

$$B_{III} = B_I - B_{II} = B'dF_i \quad (13.48)$$

III konfigurazioak jasaten duen indar bakarra dF_i denez, $dF_i = 1$ eginez lortutako sekzio indarrak hasierako sistemaren ($B_{II} = B$) sekzio indarren deribatuak dira, hau da, $B_{III} = B' = \frac{\partial B}{\partial F_i}$. Indar unitarioaren metodoa $F_i = 0$ denean ere erabil daiteke, determinatu nahi den desplazamenduaren norabideko indar unitarioa aplikatuz.

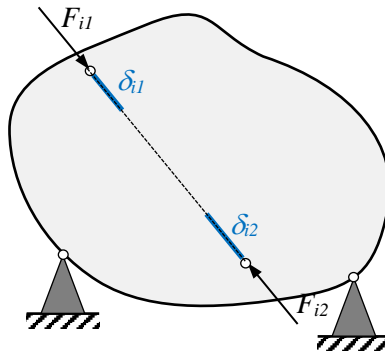
13.7. ENGESSER-CASTIGLIANOREN TEOREMAREN APLIKAZIOA

13.7.1 Sistema isostatikoak

Engesser-Castiglianoren teorema (13.14) ekuazioan emana dago. Koenergiaren deribatuak sekzioko indarren menpe adieraziz, sistema isostatikoetan desplazamenduak lor daitezke. Sekzioko indarren deribatuak determinatzerakoan indar unitarioaren metodoa erabilgarria da.

Indar bera jasaten duten bi puntuen arteko desplazamendu erlatiboa lor daiteke bi puntuak lotzen dituen zuzenaren norabidean. 13.10 irudian azaltzen diren i_1 eta i_2 puntuen arteko desplazamendu erlatiboa honakoa da:

$$\delta_{i_1 i_2} = \delta_{i_1} + \delta_{i_2} = \frac{\partial C}{\partial F_{i_1}} + \frac{\partial C}{\partial F_{i_2}} \quad (13.49)$$



13.10 irudia

Bi puntuetan aplikatutako indarrak berdinak izanik, $F_{i_1} = F_{i_2} = F_i$ betetzen da. Beraz, independentea den indarra bakarra da eta (13.49) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\delta_{i_1 i_2} = \delta_{i_1} + \delta_{i_2} = \frac{\partial C}{\partial F_i} \quad (13.50)$$

(13.50) ekuazioko emaitza sistema hiperstatikoetan erabiliko da.

13.7.2 Sistema hiperestatikoak

Lehen urratsa sistema hiperestatikoa *isostatiko baliokidean* bihurtzea da, lotura gehigarriak ezezagun hiperestatikoengatik ordezkaturaz. X_i aldagai hiperestatikoa hiru motatakoa izan daiteke:

a/ *Kanpo erreakzioa*. Berari dagokion δ_{0i} desplazamendua ezaguna izanik, baldintza honakoa da:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = \delta_{0i} \quad (13.51)$$

Kasu askotan kanpo erreakzioei dagokien desplazamendua nulua denez, honakoa betetzen da:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = 0 \quad (13.52)$$

b/ *Hasieran aldentuta dauden sistemako bi elementuren arteko lotura indarra*. Lotura puntuen arteko hasierako desplazamendu erlatibo ezaguna δ_{0i_2} izanik, (13.50) ekuazioaren arabera honakoa bete behar da:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = \delta_{0i_2} \quad (13.53)$$

c/ *Barne indarra*. Kasu honetan, ondoz ondoko sekzioen arteko desplazamendu erlatiboa nulua da. Izan ere, sekzio indarrak ondoz ondoko sekzioen desplazamendu erlatiboak eragozten dituzten barne erreakzio bezala ikus daitezke. Honako baldintza bete behar da:

$$\frac{\partial C}{\partial X_i} = 0 \quad (13.54)$$

14. EZEGONKORTASUNA.

GILBORDURA

14.1. SARRERA

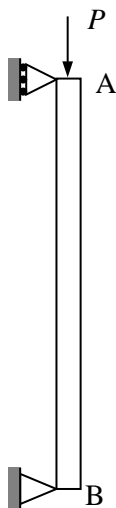
Pieza prismatiko batek konpresioa jasaten duenean, orekaren egonkortasunarekin erlazionatuta dagoen eta gilbordura deitzen zaion gertaera jasan dezake: indarraren balio kritiko batentzat, makurdurako desplazamenduak azaltzen dira eta indarra kentzen ez bada piezaren huts egitea gerta daiteke. *Orekaren egonkortasuna* honela sailka daiteke, perturbazio edo aldaketa txiki baten ondoren sistemak duen erantzunaren arabera:

- *Oreka egonkorra*: perturbazio baten ondoren sistema hasierako oreka egoerara itzultzen da.
- *Oreka ezegonkorra*: perturbazio baten ondoren sistema bere hasierako oreka egoeratik urruntzen da.
- *Oreka indiferentea*: perturbazioaren ondoren sistema oreka egoera berri batera heltzen da.

Konpresio uniforme jasaten duten piezen orekaren egonkortasuna aztertuko da. Horretarako *piezaren egoera deformatuaren oreka* eta kurba elastikoaren ekuazio diferentzial hurbildua erabiliko dira. Gaiaren bukaeran, prozedura bera erabiliz, zutabe lardenen konpresio eszentrikoa aztertzen da.

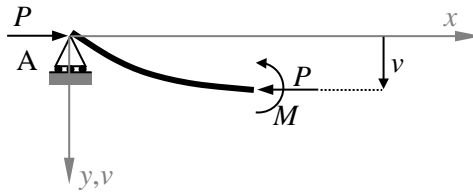
14.2. EULER-en KARGA KRITIKOA

P konpresio indarra jasaten duen soilki bermatutako zutabea aztertzen da, 14.1 irudian ikus daitekeen bezala. Gilbordura eragiten duen karga kritikoa oreka indiferentearen baldintza aplikatuz determinatuko da. Horretarako, hasieran perturbazio bat aplikatu eta zutabea deformatuta gelditzen da. Egoera berri hau orekako bada, oreka indiferentea da. Kargaren balio handiagoentzat oreka ezegonkorra da eta balio txikiagoentzat oreka egonkorra da.



14.1 irudia

14.2 irudian perturbazioa aplikatu ondorengo zutabearen kurba elastikoa azaltzen da oreka indiferentea dela suposatuz, hau da, oreka egoera berria posizio deformatua dela onartzen da. Posizio horizontalean marrazten da, kurba elastikoaren ekuazio diferentziala deduzitzerakoan erabili diren ardatzak adieraziz. Aztertutako sekzioaren desplazamendua v da. A-ko apoioa irudia argitzeko irudikatu da, erreakzio bertikala nulua dela kontuan izanik.



14.2 irudia

Bermapuntutik x distantziara dagoen sekzioa kontsideratuz, momentu makurtzailea honakoa da:

$$M = Pv \quad (14.1)$$

Kurba elastikoaren ekuazio diferentziala honakoa da:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \quad (14.2)$$

(14.1) ekuazioa (14.2) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha_z^2 v = 0 \quad (14.3)$$

(14.3) ekuazio diferentzial linealaren soluzio orokorra honakoa da:

$$v = C_1 \sin(\alpha_z x) + C_2 \cos(\alpha_z x) \quad (14.4)$$

α_z honakoa izanik:

$$\alpha_z = \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \quad (14.5)$$

Ondorengo ingurune baldintzak bete behar dira:

$$\begin{aligned} (v)_{x=0} &= 0 \\ (v)_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (14.6)$$

(14.6)-ko lehenengo baldintzatik $C_2 = 0$ lortzen da. Bigarren baldintza betetzeko bi egoera gerta daitezke:

- Oreka egonkorrari dagokiona, $C_1 = 0$ izanik.
- $\sin(\alpha_z L) = 0$. Ondorioz, $\alpha_z L = \pi, 2\pi \dots$ bete behar da. Karga minimoa π -ri dagokiona da. (14.5) ekuazioan ordezkaturaz indarra honakoa da:

$$P = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (14.7)$$

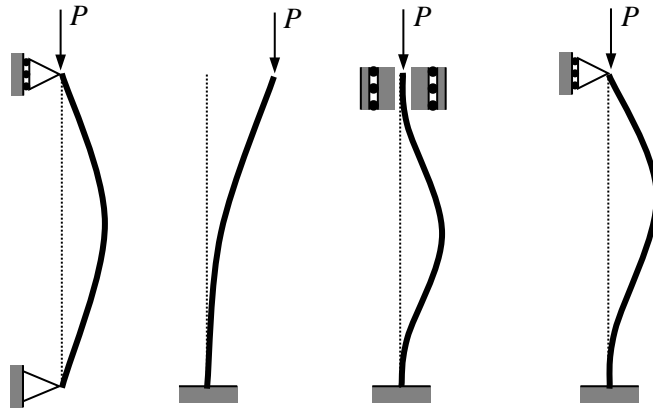
zx planoan antzeko analisia egin daitekenez, karga kritikoa inertzia momentu minimoari dagokiona da:

$$P_{krit} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2} \quad (14.8)$$

(14.8) ekuazioaren arabera, karga kritikoa txikia izan dadin inertzia momentu minimoak haundia izan behar du. Hori lortzeko egoera egokiena inertzia momentu nagusiak berdinak izatea da. Ondorioz, sekzioko norabide guztiak nagusiak dira. Gainera, materiala ardatzetatik urruntzeak inertzia momentua haunditzen duenez, sekzioko norabide guztiak nagusiak dituzten lodiera txikiko sekzioak dira egokienak. Adibidez, sekzio karratu eta zirkular hutsak.

14.3. LOTUREN ERAGINA

Zutabearen muturretako loturen arabera karga kritikoa aldatu egiten da. Soilki bermatutako zutabearen muturretako momentuak zero direnez, beste lotura baldintza batzurekin momentu makurtzaile nuluko puntuak bilatzen dira. Horrelako bi punturen arteko distantzia, L_g *gilbordura-luzera* bezala *definitzen da*. Puntu hauek, (14.2) ekuazioaren arabera *kurba elastikoaren inflexio puntuak dira*. 14.3 irudian L luzera duen zutabe batek izan ditzazkeen ohiko loturak azaltzen dira.



14.3 irudia

Dagokien gilbordura-luzerak honakoak dira:

Giltzatua-Giltzatua: $L_g = L$

Landatua-Askea: $L_g = 2L$

Landatua-Landatua: $L_g = 0,5L$

Landatua-Giltzatua: $L_g = 0,7L$

Edozein lotura baldintzentzat karga kritikoa honakoa da:

$$P_{krit} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_g^2} \quad (14.9)$$

14.4. TENTSIO KRITIKOA ETA LERDENTASUNA

Tentsio kritikoa gilbordurako karga kritikolari dagokiona da:

$$\sigma_{krit} = \frac{P_{krit}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{AL_g^2} \quad (14.10)$$

i biraketa erradioaren definizioa kontuan izanik: $I_{\min} = i_{\min}^2 A$

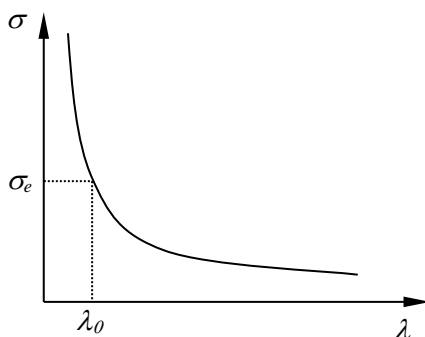
Beste alde batetik, λ lerdentasuna honela definitzen da:

$$\lambda = \frac{L_g}{i_{\min}} \quad (14.11)$$

(14.11) ekuazioa (14.10) ekuazioan ordezkatur:

$$\sigma_{krit} = \frac{P_{krit}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (14.12)$$

Egituren kalkuluko araudian, konpresioa jasaten duten egitura-elementuen lerdentasuna funtsezko parametroa da. (14.12) ekuazioa grafika batean adieraziz, 14.4 irudian azaltzen den Euler-en kurba lortzen da.

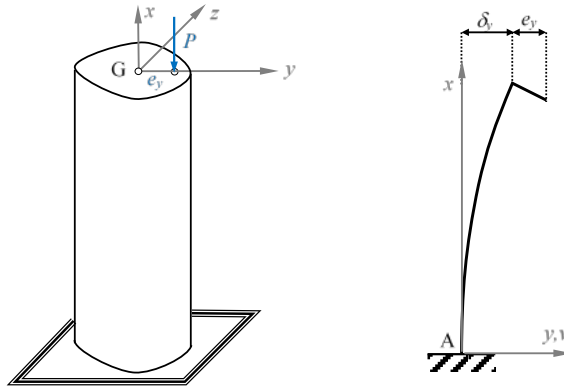


14.4 irudia

σ_e limite elastikoa izanik, portaera elastikoa ziurtatzeko lerdetasunak $\lambda > \lambda_0$ baldintza bete behar du. Baldintza hau betetzen duten piezak lerdinak deitzen dira. $\lambda < \lambda_0$ denean, piezak laburrak deitzen dira eta Euler-en kurba ezin da erabili.

14.5. ZUTABE LERDENEN KONPRESIO ESZENTRIKOA

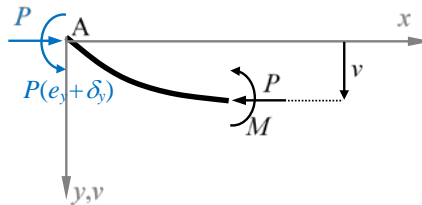
Mutur batean landatua eta bestean askea dagoen zutabe lerdin batek konpresio eszentrikoa jasaten duenean, mutur askeko desplazamendua eszentritatearen mailakoa baldin bada, desplazamendu haundien problema sortzen da. Ondorioz, karga kritikoarentzat egin denaren antzeko analisia garatuko da, egoera deformatua eta kurba elastikoaren ekuazio diferentzial hurbildua erabiliz.



14.5 irudia

14.5 irudiaren ezker aldean P konpresio indarra e_y eszentritatearekin jasaten duen zutabea azaltzen da, sekzioari dagokion erreferentzia sistemarekin. Eskuin aldean kurba elastikoa eta kargaren kokapena azaltzen dira, desplazamenduak determinatzeko erreferentzia sistemarekin. A landapeneko erreakzioak determinatu ondoren, 14.6 irudian x distantziara dagoen sekzio baten mozketa azaltzen da, bertako momentu makurtzailea honakoa delarik:

$$M = Pv - P(e_y + \delta_y) \tag{14.13}$$



14.6 irudia

(14.2) ekuazioan ordezkaturaz honakoa lortzen da:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha_z^2 v = \alpha_z^2 (e_y + \delta_y) \tag{14.14}$$

(14.14) ekuazioaren soluzio orokorra honakoa da:

$$v = C_1 \sin(\alpha_z x) + C_2 \cos(\alpha_z x) + (e_y + \delta_y) \quad (14.15)$$

C_1 eta C_2 konstanteak eta δ_y desplazamendua determinatzeko ingurune baldintzak honakoak dira:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad v = 0 \\ x = 0 & \quad v_{,x} = 0 \\ x = L & \quad v = \delta_y \end{aligned} \quad (14.16)$$

(14.16)-ko baldintzak (14.15) ekuazioan aplikatuz, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} C_2 &= -(e_y + \delta_y) \\ C_1 &= 0 \\ \delta_y &= e_y \frac{[1 - \cos(\alpha_z L)]}{\cos(\alpha_z L)} \end{aligned} \quad (14.17)$$

(14.17)-ko emaitzak (14.15) ekuazioan ordezkaturaz, *desplazamenduen funtzioa* honakoa da:

$$v = e_y \frac{1 - \cos(\alpha_z x)}{\cos(\alpha_z L)} \quad (14.18)$$

(14.18) ekuazioa (14.13) ekuazioan ordezkaturaz, *momentu makurtzailea x-en menpe* honakoa da:

$$M = -Pe_y \frac{\cos(\alpha_z x)}{\cos(\alpha_z L)} \quad (14.19)$$

(14.19) ekuazioaren arabera, momentu maximoa landapenean gertatzen da:

$$M_{\max} = M_A = -Pe_y \frac{1}{\cos(\alpha_z L)} = -Pe_y \sec(\alpha_z L) \quad (14.20)$$

(14.20) ekuazioan $\sec(\alpha_z L)$ makurdura konposatuko $(-Pe_y)$ momentuari eragiten dion faktore biderkatzailea da, $\sec(\alpha_z L) > 1$ izanik.

Ezegonkortasuna gertatzen denean landapeneko momentuak infiniturantz jotzen duenez:

$$M_{\max} \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_z L \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2} \quad (14.21)$$

(14.21) ekuazioaren arabera, gilbordura eragiten duen karga kritikoa Landatua-Askea kasuan lortutakoa da eta inertzia momentu minimoari dagokio.