



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia

Electromagnetismo I

Noviembre 2016

1. Entre dos esferas concéntricas conductoras con radios a y $b > a$ encontramos un dieléctrico lineal isótropo inhomogéneo, con permitividad $\epsilon(r) = \epsilon_0/(1 + kr)$. k es una constante (¿qué dimensiones porta?). El conductor interior lleva carga Q , mientras que el externo está conectado a tierra. Calcule

- (i) el desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ en todo el espacio;
- (ii) la capacidad;
- (iii) las densidades de carga de polarización y la carga total de polarización.

4's

2. Sea una varilla cargada situada entre los puntos $z = -a$ y $z = 0$ (siendo para ambos $x = 0$ e $y = 0$), con densidad lineal de carga $\lambda(z) = Az^2 + Bz$. A y B son constantes (¿cuáles son sus dimensiones?). Calcule

- (i) la carga total de la varilla;
- (ii) el momento dipolar con respecto al origen;
- (iii) el momento dipolar con respecto al punto bu_x .

4's

3. ¿Es el siguiente campo un campo electrostático? Justifique su respuesta.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k(xy\mathbf{u}_x + 2yz\mathbf{u}_y + 3xz\mathbf{u}_z).$$

1

Elektromagnetismoa I

2016eko Azaroa

1. a eta $b > a$ erradioko esfera zentrukide eta eroaleen artean dielektriko lineal isotropiko inhomogeno dugu, $\epsilon(r) = \epsilon_0/(1 + kr)$ permitibitate duena. k konstante bat da (zein da bere dimentsioa?). Barneko eroaleak Q karga darama, eta kanpoko lurrari lotuta dago. Kalkula itzazu

- (i) D desplazamendu elektrikoa espazio osoan;
- (ii) kapazitatea;
- (iii) polarizazio karga dentsitatea eta polarizazio karga osoa.

2. Biz z ardatzeko $z = -a$ eta $z = a$ puntuen arteko hagaxka kargaduna, $\lambda(z) = Az^2 + Bz$ karga dentsitate linealarekin. A eta B konstanteak dira (zeintzuk dira euren dimentsioak?). Kalkula itzazu

- (i) hagaxkaren karga osoa;
- (ii) jatorriarekiko momentu dipolarra;
- (iii) bu_x puntuarekiko momentum dipolarra.

3. Ondoko eremua eremu elektrostatikoa al da? Azaldu zure erantzuna.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k(xy\mathbf{u}_x + 2yz\mathbf{u}_y + 3xz\mathbf{u}_z).$$

Formulak / Fórmulas

Bektore kalkulua / Cálculo vectorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi_1 \Phi_2) = \Phi_1 \vec{\nabla} \Phi_2 + \Phi_2 \vec{\nabla} \Phi_1$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{A}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \Phi)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\Phi \vec{A}) = \Phi \vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{\nabla} \Phi) \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Koordenatu kartesiarrak / Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla}^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$$d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z, \quad dv = dx dy dz$$

Koordenatu zilindrikoak / Coordenadas cilíndricas (r, φ, z)

$$\vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla}^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z, \quad ds = r d\phi dz \quad dv = r dr d\phi dz$$

$$\vec{u}_\rho = \cos \phi \vec{u}_x + \sin \phi \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\phi = -\sin \phi \vec{u}_x + \cos \phi \vec{u}_y, \quad \vec{u}_z = \vec{u}_z$$

Koordenatu esferikoak / Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\Psi &= \frac{\partial\Psi}{\partial r}\bar{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\bar{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\bar{u}_\phi \\ \bar{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\ \bar{\nabla}\times\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\bar{u}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\bar{u}_\theta + \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\bar{u}_\phi \\ \bar{\nabla}^2\Psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

$$d\vec{\ell} = dr\bar{u}_r + r d\theta\bar{u}_\theta + r\sin\theta d\phi\bar{u}_\phi, \quad ds = r^2\sin\theta d\theta d\phi \quad dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_r &= \sin\theta\cos\phi\bar{u}_x + \sin\theta\sin\phi\bar{u}_y + \cos\theta\bar{u}_z, \\ \bar{u}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\bar{u}_x + \cos\theta\sin\phi\bar{u}_y - \sin\theta\bar{u}_z, \\ \bar{u}_\phi &= -\sin\phi\bar{u}_x + \cos\phi\bar{u}_y\end{aligned}$$

Dibergentziaren teorema / Teorema de la divergencia

$$\int_V \bar{\nabla}\cdot\vec{A} dv = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

Stokesen teorema / Teorema de Stokes

$$\int_S (\bar{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

**Elektrostatikaren oinarrizko ekuazioak / Ecuaciones básicas de
Electrostática**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad C = \frac{Q}{V}$$

Momentu dipolarra / Momento dipolar

$$\vec{p} = \int \vec{r} dq, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^5} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{p} \right]$$

Momentu koadrupolarra / Momento cuadrupolar

$$Q_{ij} = \int_V (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho(\vec{r}) dv, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}$$

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z$$

Ingurune dielektrikoak / Medios dieléctricos

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}, \quad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{askea/libre}$$

Ingurune linealak / Medios lineales

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e), \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \vec{D}, \quad \rho_P = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \rho_{askea/libre}$$

Muga baldintzak / Condiciones de contorno

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{askea/libre}, \quad \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\phi_2 = \phi_1, \quad \vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma_{osoa/total}}{\epsilon_0}$$

