ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

21 de mayo de 2014

1.- Sea la forma bilineal $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la expresión

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3.$$

i) Calcular el núcleo de f. ¿Es f no degenerada?

ii) ¿Cuál es la signatura de f?

iii) Sea A la matriz asociada a la forma bilineal f respecto a la base canónica $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ y A' la matriz asociada a f respecto a la base $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^3$, dada por

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{e}'_1 &=& \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &=& \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &=& 2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3 \end{array}\right.$$

Hallar la matriz A'. Encontrar una matriz $P \in \mathrm{Gl}(3,\mathbb{R})$ de manera que $A' = P^tAP$.

iv) ¿Existe una base ortonormal de f? En caso afirmativo, calcúlese.

v) ¿Existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz asociada a f sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

En caso afirmativo, calcúlese.

vi) Calcular la forma cuadrática asociada. ¿Es posible expresarla como suma de cuadrados?

2.- En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$S:\left\{\begin{array}{l} x+z=3 \\ y-2z-t=1 \end{array}\right. \qquad T:(x,y,z,t)=(3,0,4,-5)+\lambda(1,-1,-1,1)+\mu(1,1,-1,0).$$

a) Hállense unas ecuaciones paramétricas para S y unas ecuaciones cartesianas para T.

b) Hállese una recta perpendicular a S y a T. ¿Es única esta recta?

c) Calcúlese la distancia entre S y T.

3.- En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación definida por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{9}\Big(9+4x-8y+az,\, 18+4x+by-8z,\, cx+4y+4z\Big).$$

a) Determínense los valores de a, b y c para que f sea una isometría. Clasifíquese.

b) Hállese la simetría (ortogonal) g, respecto al plano $z = x+1$.

c) Hállese la composición $g \circ f$ y clasifíquese.