

azul, referencial propio RP

rojo, referencial ligado al sólido RS

línea de nodos, N, corte de los planos XY de ambos referenciales

$\beta=\theta$ (nutación), ángulo entre ejes z

$\alpha=\phi$ (precesión) ángulo entre el eje x del RP y la línea de nodos

$\gamma=\psi$ (rotación propia) ángulo entre la línea de nodos y el eje x del RS

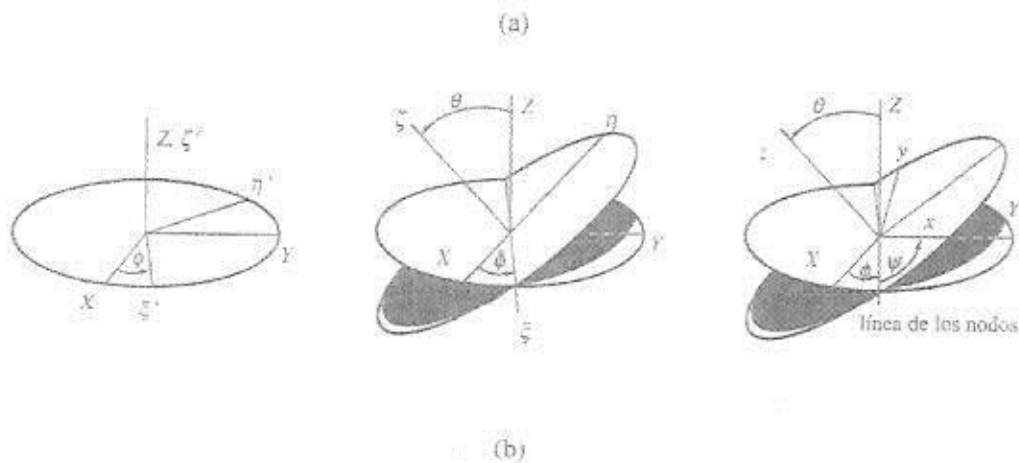


FIGURA 10.6 (a) Coordenadas cartesianas; (b) los ángulos de Euler.

El sistema de ejes de partida es el $OXYZ$. Las tres rotaciones son:

1. Una rotación de ángulo ϕ en torno a OZ pasa al sistema $O\xi'\eta'\zeta'$.
2. Una segunda de ángulo θ en torno a $O\xi'$ pasa a $O\xi\eta\zeta$.
3. Otra de ángulo ψ en torno a $O\zeta$ pasa a $Oxyz$.

El eje $O\xi$ coincide con $O\xi'$ y se llama línea de los nodos, denominación que proviene de la astronomía.

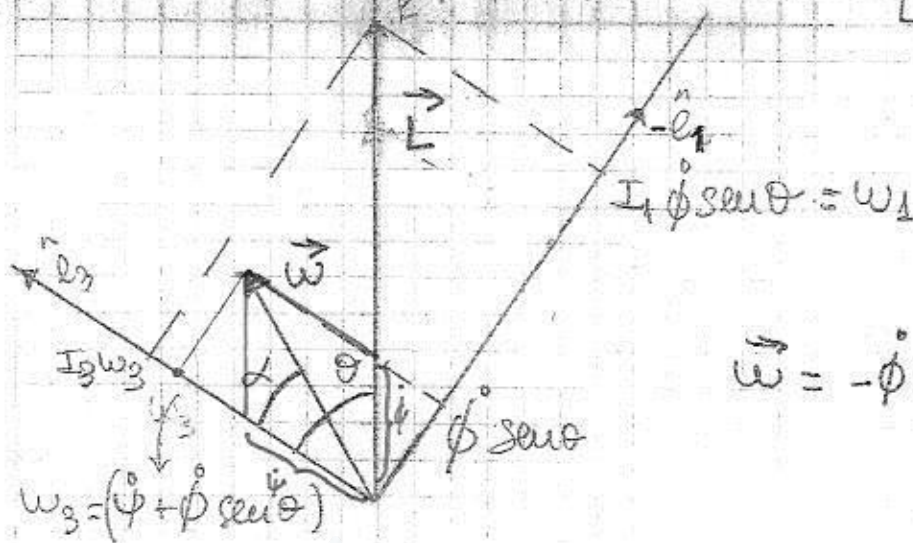
Zimatek

MOVIMIENTO LIBRE

$$I_1 = I_2 \neq I_3$$

→ Descomponer $\vec{\omega}$ en \hat{k} y \hat{e}_3 (según los ángulos de Euler)

$$\vec{L} = L \hat{k} = \text{cte}$$



$$\vec{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_1 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_3$$

$$\tan \alpha = \frac{\dot{\phi} \sin \theta}{\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta} \quad ; \quad L = I_1 \dot{\phi} \quad ; \quad I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = L \cos \theta$$

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 - I_3}{I_3} \dot{\phi} \cos \theta$$

Ecs. Euler $\Rightarrow \omega_3 = \text{cte}$

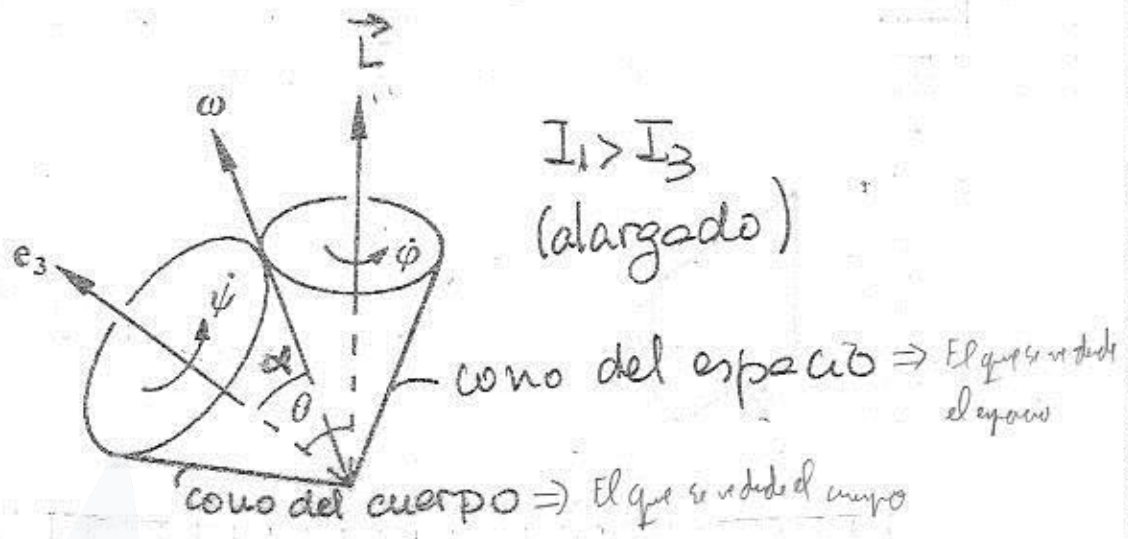
$$\vec{\omega} (\omega_0 \cos \Omega_b t, -\omega_0 \sin \Omega_b t, \omega_3) \quad \rightarrow \quad \Omega_b = \Omega_b$$

$$\Omega_b = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 \equiv \dot{\psi} \equiv \text{velocidad con la que}$$

se describe el cono del cuerpo

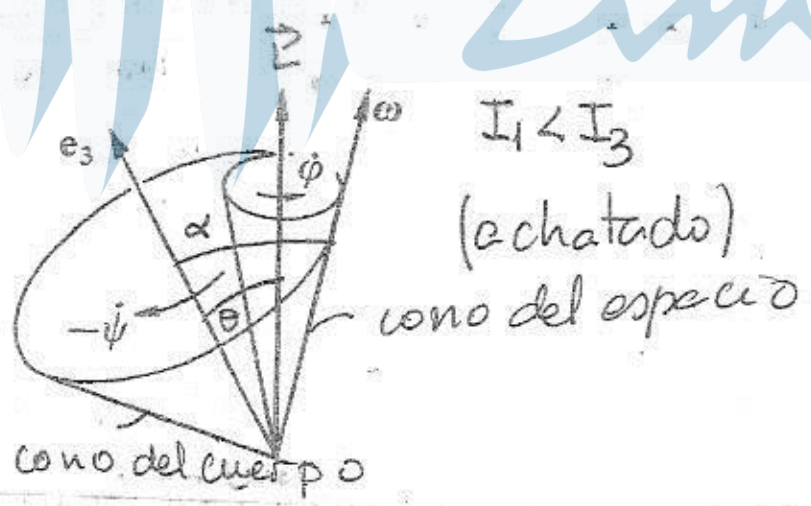
$$\Omega_s = \frac{L}{I_1} \equiv \dot{\phi} \equiv \text{velocidad con la que se describe el cono del espacio.}$$

MOVIMIENTO LIBRE $I_1 = I_2 \neq I_3$



$\tan \alpha < \tan \theta$

Zimatek



$\tan \alpha > \tan \theta$

Caso de la Tierra $I_3 \gg I_1$, θ pequeño

$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx \frac{1}{300} \Rightarrow \psi^\circ < \phi^\circ$

periodo 300 días

SÓLIDO RÍGIDO

- Es un sistema de partículas S tal $\forall i, j \in S$ $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d(i, j) = \text{cte.}$

↓

6 grados de libertad

ECUACIONES DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

- $\vec{r}_c \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$; $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c$

• En un S.R.I.: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

• cte. $\Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_c$

- $\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$. Si derivo por \vec{L}' al respecto angular en el S.R. del C.M.:

$\vec{L} = \vec{r}_c \times m \vec{v}_c + \vec{L}'$

• En un S.R.I.:

$\sum \vec{M}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Y en el C.M., aunque no sea inercial:

$\sum \vec{M}'_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}'}{dt}$

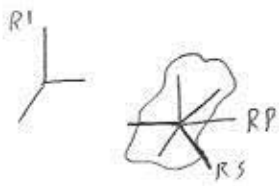
- Por otra parte, e lo que se refiere a la energía:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + T'$$

$$W_{\text{ext}} = \Delta T$$

SISTEMAS DE REFERENCIA

Partimos siempre de un S.R.I. Usamos otros dos:

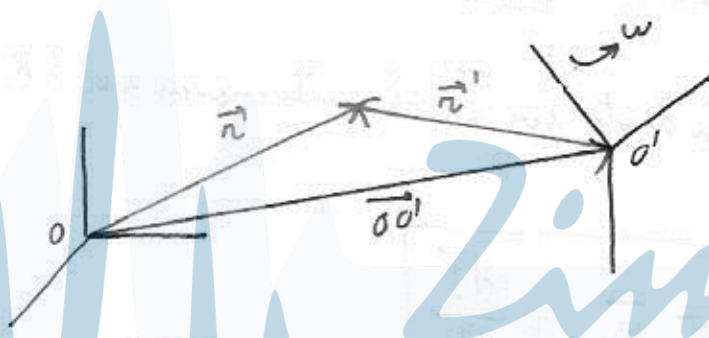


- Referencial propio, centrado en el CM y que no gira con respecto al SRI
- Referencial del sólido, centrado en el CM y que gira con el sólido

Para hallar magnitudes en nuestro SRI, tales como:

- Velocidades y aceleraciones de puntos del sólido (en el referencial del sólido son 0)
- Derivadas que en el referencial del sólido son 0

Necesitamos relaciones lo que mide dos S.R. En general:



Yo estoy en O y veo mover a O'. Si el de O' me dice lo que él mide, ¿qué mide yo?

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{oo}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{oo'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{A}_{oo'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \underbrace{\vec{a}'}_{\ddot{\vec{r}'}} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{a}'$$

Para cualquier vector \vec{A} , si $\underline{O=O'}$:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_O = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Un par de resultados sobre el sólido:

$\forall P, Q \in S$ $\boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{QP})}$: el sólido se puede describir en términos de un punto y rotación alrededor de ese punto

En general, los 6 grados de libertad se separan en:

- Posición del CM (3)
- 3 ángulos que me indican cómo rota el sólido: ángulos de Euler

TENSOR DE INERCIA

• Si e es un eje, sabemos que $I_e \equiv \int_M r^2 dm$ tiene propiedades peculiares, particularmente para

eje fijo:

• $L_e = I_e \omega$

• $T = \frac{1}{2} I_e \omega^2$

• $I_e = I_c + m d^2$ (Steiner)

• No quedaría generalizar esto. Si yo tengo un sistema de ejes cartesianos $\{e_1, e_2, e_3\}$, resulta

que:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ \vec{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}$$

con:

$$I_{ii} = \int_M r_i^2 dm$$

Distancia al eje i

$$I_{ij} = - \int_M x_i x_j dm$$

\Rightarrow Producto de inercia

\vec{I} es un tensor con una serie de propiedades:

- Es simétrico: $I_{ij} = I_{ji} \Rightarrow$ Es diagonalizable mediante una base ortogonal
- A los ejes a los que la matriz de inercia es diagonal se les llama ejes principales.
- Si el sólido gira alrededor de uno de esos ejes, $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ y el giro es estable (para ω cto $\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow$ No lea falta sentido) \downarrow De hecho, $\vec{L} = I_e \vec{\omega}$

- Hay dos teoremas útiles para calcular estos ejes:

T.1: Todo plano de simetría es perpendicular a un eje principal.

T.2: Todo eje de simetría de cualquier orden es principal.

↳ Orden n giro $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ y el sólido queda igual
(revolución \Rightarrow orden ∞)

Conclusión: si el eje de simetría tiene orden $n > 2$, el tensor de inercia escrito en una base $\{e_1, e_2, e_3\}$, con e_3 el eje de simetría y $\{e_1, e_2\}$ arbitrarios ortogonales:

- El tensor de inercia es diagonal
 - $I_{11} = I_{22}$
- } El plano \perp a e_3 es un plano propio

- La traza de esta matriz es: $I_1 + I_2 + I_3 = 2 \sum_i m_i \vec{r}_i^2 \equiv 2I_0$

- Si el sólido es plano y está en el plano $\langle e_1, e_2 \rangle$: $I_3 = I_1 + I_2$

- Por último, en notación compacta:

$$I_{ij} = \int_m dm \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 x_k^2 - x_i x_j \right)$$

Y si C es el centro de masas y cambias el origen (NO los ejes)

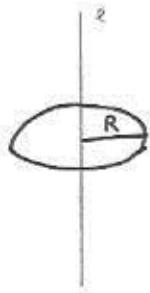
↳ (con los ejes en un mismo sentido de cambio de base)

$$I'_{ij} = I_{ij} - m [a^2 \delta_{ij} - a_i a_j] \quad (\text{Steiner})$$

con $\vec{a} = \vec{QC}$

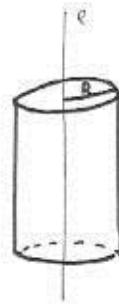
MOMENTOS DE INERCIA

ARO:



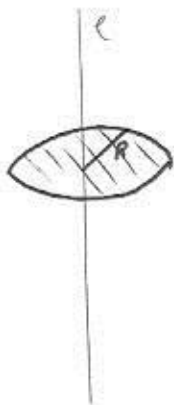
$$I_e = MR^2$$

CILINDRO hueco:



$$I_e = MR^2$$

DISCO:



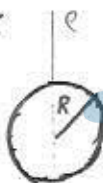
$$I_e = \frac{1}{2} MR^2$$

CILINDRO MACIZO:



$$I_e = \frac{1}{2} MR^2$$

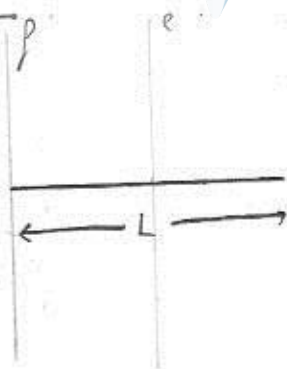
ESFERA:



$$I_e = \frac{2}{5} MR^2$$

Zimatek

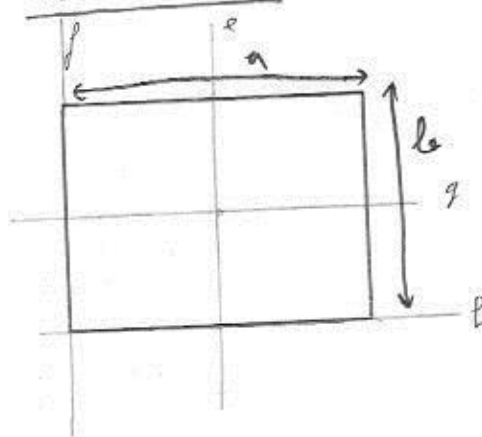
BARRA:



$$I_e = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I_p = \frac{1}{3} ML^2$$

RECTÁNGULO:



$$I_e = \frac{1}{12} Ma^2$$

$$I_p = \frac{1}{3} Ma^2$$

$$I_g = \frac{1}{12} Mb^2$$

$$I_L = \frac{1}{3} Mb^2$$

ENERGÍA DEL SÓLIDO

- En el caso del sólido rígido, las fuerzas internas no desarrollan trabajo. Por tanto, para fuerzas externas conservativas:

$$E = V_{\text{ext}} + T = \text{cte.}$$

con V_{ext} el potencial de las fuerzas externas y $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

- Ahora, si llamo O a un punto que se mueve con el sólido: (puede ser exterior)

Para cualquiera de estos tres casos:

$$\begin{aligned} O &= \text{C.M.} \\ \vec{V}_O &= 0 \\ \vec{V}_O &\parallel \vec{\omega} \end{aligned}$$

(a $O = \text{C.M.}$ se le llama eje instantáneo de rotación)

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} (w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} I_1 & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_2 & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Notar que si alinea el eje 1 con $\vec{\omega}$ (esto vale si:
• quise la energía a un instante concreto)
• $\vec{\omega}$ no varía de dirección)

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega^2$$

ECUACIONES DE EULER

- Sea las ecuaciones más genéricas de la rotación de un sólido.

Sean $\{e_1, e_2, e_3\}$ los ejes principales. Aplicado $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_{\text{sólido}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$ se obtiene,

en un S.R.I. o en el C.M.:

$$\begin{cases} M_1 = I_1 \dot{w}_1 - (I_2 - I_3) w_2 w_3 \\ M_2 = I_2 \dot{w}_2 - (I_3 - I_1) w_3 w_1 \\ M_3 = I_3 \dot{w}_3 - (I_1 - I_2) w_1 w_2 \end{cases}$$

Vamos a estudiar casos particulares:

EJE FIJO ($\vec{\omega}$ no varía en dirección y sentido)

• Eje principal: $\vec{L} = I \vec{\omega}$

$$\Downarrow$$
$$\boxed{\vec{M} = I \vec{\alpha}}$$

• Eje no principal: $L_e = I_e \omega$

(puede haber otras componentes involucradas)

$$\Downarrow$$
$$\boxed{M_e = I_e \alpha}$$

MOVIMIENTO PLANO (toda partícula del sólido describe un movimiento plano)

• En este caso, hay 3 grados de libertad: dos traslaciones y una rotación

• Puede ser útil encontrar un punto fijo ^{puede estar fijo del sólido} para casos como: (el punto no solo rotatorio)

• Calcular la energía cinética

• Aplicar, si I_p es cte, $M = I_p \alpha$ (no se aplica si la rotación es al plano o tiene carácter rotacional)

↳ No depende del ángulo de giro

Hay dos formas de encontrarlo:

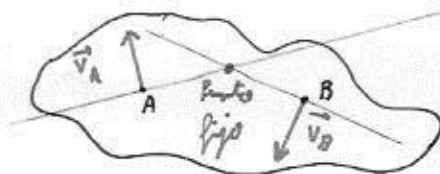
• Analíticamente:

$$\boxed{x = -\frac{v_p y}{\omega}}$$
$$\boxed{y = \frac{v_p x}{\omega}}$$

con P cualquier punto

• Gráficamente:

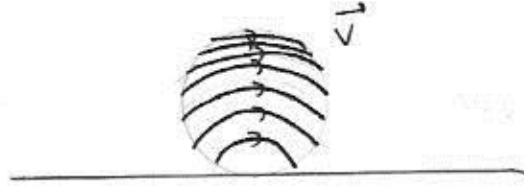
Como $0 = \vec{v}_p + \vec{\omega} \times \vec{r}_p$; $\vec{v}_p \perp \vec{\omega} \times \vec{r}_p$. Así, si se la velocidad de dos puntos del sólido, trazo dos líneas perpendiculares, que se cortan en el punto fijo.



RODADURA

• En un caso particular de rozamiento plano a el que el punto de contacto está instantáneamente quieto $\Rightarrow \omega = \frac{v_{cm}}{R}$

• Eligiendo ese punto como origen queda un caso de velocidad circular ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$):



• En general hay un rozamiento sobre el punto de contacto que suministra un momento para que haya rodadura (suponiendo otra fuerza que empuja al sólido hacia delante). Como el punto de contacto es fijo:

- El rozamiento es estático
- No se desliza hacia atrás

Zimatek

MOVIMIENTO LIBRE

• Se plantean las ecuaciones de Euler con $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. Estudiamos dos casos concretos:

• **SIMETRÍA ES FÉRICA** (en realidad se pide $I_1 = I_2 = I_3$)

$$\vec{w} \text{ cte.}$$

• **SIMETRÍA DE REVOLUCIÓN** (en realidad se pide $I_1 = I_2$, por lo que cualquier sistema de ejes $\Rightarrow 2$ ejes)

• En términos de las direcciones ppales, eligiendo t_0 adecuadamente

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_0 \cos \Omega_e t \\ -w_0 \sin \Omega_e t \\ w_3 \text{ cte.} \end{pmatrix}$$

con $\Omega_e = \frac{I_1 - I_2}{I_1} \omega_3$

Notas: $|\vec{w}| = \text{cte.}$ (aunque \vec{w} NO es cte.)

(w_1, w_2) da vueltas alrededor de w_3 con frecuencia angular Ω_e

\vec{w} describe un cono de $\begin{cases} \text{Radio } w_0 \\ \text{Altura } w_3 \end{cases}$

• Venos cómo describe esto en términos de los ángulos de Euler. En base "natural" es $\vec{w} = \phi \hat{k} + \theta \hat{e}_1 + \psi \hat{e}_3$. Ahora, si elijo como \hat{e}_2 en mi sistema de ejes propio $\{ \hat{k}, \hat{e}_1, \hat{e}_3 \}$, pues $\vec{w} = \phi \hat{k} + \theta \hat{e}_1 + \psi \hat{e}_3$.

salido a la línea de nodos, resulta que:

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{e}_3 - \sin \theta \hat{e}_1$$

y si además elijo el referencial propio t_0 . $\hat{k} \parallel \vec{L}$, se opera y se llega a:

Tengo libertad para fijar P.P. y R. S. Una vez elegida adecuadamente, los ángulos de Euler (que depende de P.P. y R.S.) no son arbitrarios

θ cte.
 $\dot{\phi}$ cte.
 $\dot{\psi}$ cte.

\Rightarrow No hay calceos

\Rightarrow la velocidad de precesión es cte.

\Rightarrow la velocidad con la que se desvía el eje es cte.

Entón, $\underline{\Omega_e = \dot{\psi}}$

$\underline{\text{tg } \widehat{\omega, \hat{e}_3} = \frac{I_3}{I_1} \text{tg } \theta}$

MOVIMIENTO FORZADO

Si consideramos un objeto simétrico con un punto fijo y bajo la acción de la gravedad, la mecánica analítica nos dice que, en términos de los ángulos de Euler: (de nuevo, el eje \hat{e}_2 lo tiene de nodos y el eje \hat{e}_3 el eje de simetría)

$\cdot \underline{L_3 = \text{cte.}}$

$\cdot \underline{L_2 = \text{cte.}}$

No hay calceos

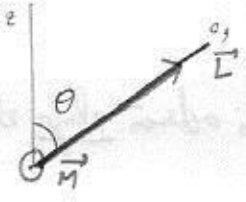
$\leftarrow \theta$ cte. implicaría $\dot{\phi}$ cte. $\dot{\psi}$ cte.

Si no hay calceos, el movimiento es combinación de rotación y precesión propia a velocidad cte.

\cdot Cuanto mayor sea I_3 , menor calceos habrá.

\cdot Si θ es cte, $\dot{\phi} \approx \frac{m g R}{I_3 \omega_3} \Rightarrow$ cuanto más rápido que a torsión se aleja ω_3 , menor será la precesión

\cdot Esta precesión aparece por el momento de la fuerza que ejerce el punto fijo, que tiende a mover \vec{L} . Para ω_3 muy grande, el dibujo sería:



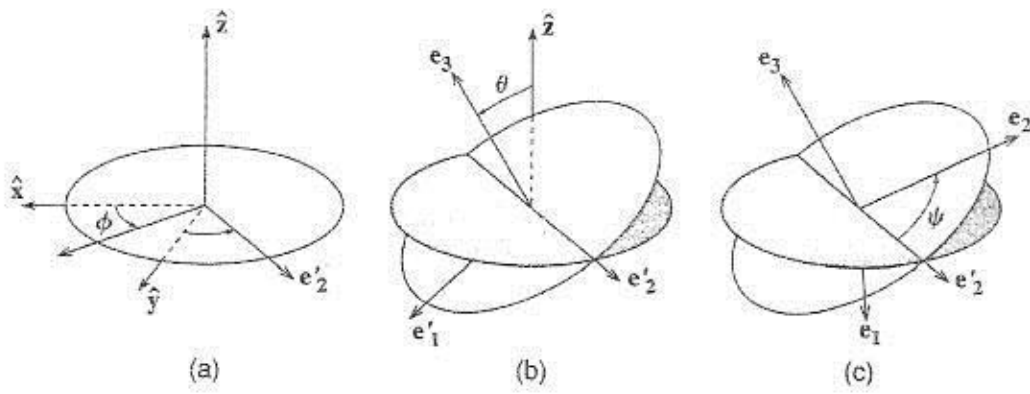


Figure 10.10 Definition of the Euler angles θ , ϕ , and ψ . Starting with the body axes e_1 , e_2 , e_3 and space axes \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} aligned, the three successive rotations bring the body axes to any prescribed orientation.

Zimatek

Los elementos diagonales de esta matriz, I_{11} , I_{22} e I_{33} reciben el nombre de *momento de inercia* respecto de los ejes x_1 , x_2 y x_3 , respectivamente y los opuestos de los elementos no diagonales, I_{12} , I_{13} , etc., el de *productos de inercia*.* Evidentemente el tensor de inercia es simétrico, es decir,

$$I_{ij} = I_{ji} \quad (12.14)$$

y, por tanto, $\{I\}$ posee sólo seis componentes independientes. Además, el tensor de inercia es aditivo; o sea, el tensor de inercia de un cuerpo puede considerarse formado por la suma de los tensores de inercia de las distintas porciones del mismo. En consecuencia, si suponemos que un cuerpo es una distribución continua de materia con una densidad másica $\rho = \rho(x)$, será

$$I_{ij} = \int_V \rho(x) \left[\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right] dV \quad (12.15)$$

donde $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ es el elemento de volumen en el punto definido por el vector r y V el volumen del cuerpo.

◆ Ejemplo 12.2 Tensor de inercia de un cubo

Como ejemplo de cálculo de las componentes del tensor de inercia, consideremos un cubo homogéneo de densidad ρ , masa M y arista de longitud b . Situemos el origen de coordenadas en uno de los vértices y los tres ejes de coordenadas sobre las tres aristas contiguas correspondientes a dicho vértice (véase figura 12-1). (Evidentemente,

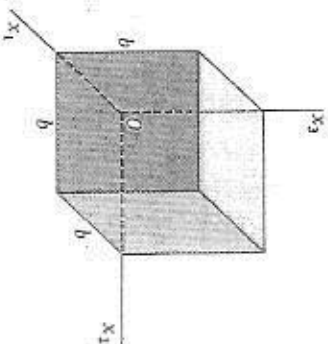


FIG. 12-1

* Introducidas por Huygens en 1673; Euler acuñó el nombre.

con los ejes dispuestos de esta forma el origen ya no coincide con el centro de masa; volveremos sobre este extremo más adelante.) De acuerdo con 12.15, tenemos

$$I_{11} = \rho \int_0^b \int_0^b \int_0^b dx_2 dx_3 (x_1^2 + x_2^2) \int_0^b dx_1 \\ = \frac{3}{2} \rho b^5 = \frac{3}{2} M b^2 \quad (1)$$

$$I_{12} = -\rho \int_0^b \int_0^b \int_0^b x_1 dx_1 \int_0^b x_2 dx_2 \int_0^b dx_3 \\ = -\frac{1}{4} \rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2 \quad (2)$$

Es fácil ver que todos los elementos diagonales de la matriz son iguales y que, además, también lo son los elementos no diagonales. Si hacemos $\beta = M b^2$, tendremos

$$\left. \begin{aligned} I_{11} = I_{22} = I_{33} &= \frac{3}{2} \beta \\ I_{12} = I_{13} = I_{23} &= -\frac{1}{4} \beta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

y el tensor de inercia quedará

$$I = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}\beta & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{3}{2}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{3}{2}\beta \end{Bmatrix} \quad (4)$$

En secciones posteriores proseguiremos con el estudio del tensor de inercia de un cubo.

12.3 Momento cinético

El momento cinético del cuerpo respecto de un punto O , fijo en el sistema de coordenadas del cuerpo, es

$$L = \sum_a r_a \times P_a \quad (12.16)$$

El lugar más conveniente donde se sitúe el punto O dependerá de cada problema particular. Únicamente existen dos posibilidades de verdadera importancia: (a) Cuando uno o más puntos del cuerpo son fijos (en el sistema de coordenadas fijo), O se hace coincidir con uno de éstos (tal es el caso de la peonza giratoria, sec. 12.10);

422

Dinámica de sistemas rígidos

que, descompuesta en factores, nos da

$$(\frac{1}{2}\beta - I)(\frac{1}{2}\beta - I)(\frac{1}{2}\beta - I) = 0 \tag{7}$$

Así, pues, obtenemos las raíces siguientes, que nos dan los momentos principales de inercia

$$I_1 = \frac{1}{2}\beta; \quad I_2 = \frac{1}{2}\beta; \quad I_3 = \frac{1}{2}\beta \tag{8}$$

y el tensor de inercia queda, ya diagonalizado:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix} \tag{9}$$

Al ser iguales dos de las raíces, $I_2 = I_3$, el eje principal asociado a I_1 debe ser eje de simetría.

Para determinar la dirección del eje principal de inercia asociado a I_1 , sustituimos I por $I - I_1 = \frac{1}{2}\beta$ en la ecuación 12.27:

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\beta)\omega_{11} - \frac{1}{2}\beta\omega_{21} - \frac{1}{2}\beta\omega_{31} = 0 \\ -\frac{1}{2}\beta\omega_{11} + (\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\beta)\omega_{21} - \frac{1}{2}\beta\omega_{31} = 0 \\ -\frac{1}{2}\beta\omega_{11} - \frac{1}{2}\beta\omega_{21} + (\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\beta)\omega_{31} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

donde el segundo subíndice 1 en las ω_i significa que estamos considerando el eje principal asociado a I_1 .

Dividiendo por $\beta/4$ las dos primeras de estas ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} 2\omega_{11} - \omega_{21} - \omega_{31} = 0 \\ -\omega_{11} + 2\omega_{21} - \omega_{31} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Si en estas ecuaciones restamos de la primera la segunda, encontramos $\omega_{11} = \omega_{21}$. Utilizando este resultado en cualquiera de las ecuaciones 11 resulta $\omega_{11} = \omega_{21} = \omega_{31}$, siendo los cocientes buscados

$$\omega_{11} : \omega_{21} : \omega_{31} = 1 : 1 : 1 \tag{12}$$

Por lo tanto, cuando el cubo gira alrededor de un eje al cual está asociado el momento de inercia $I_1 = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}Mb^2$, las proyecciones de ω sobre los tres ejes coordina-

Dinámica de sistemas rígidos

dos son todas iguales. Consecuentemente, este eje principal de inercia corresponde a la diagonal del cubo.

Como los momentos I_2 e I_3 son iguales, la orientación de los ejes principales asociados a estos momentos es arbitraria; únicamente es necesario que estén en un plano normal a la diagonal del cubo.

12.5 Momentos de inercia para distintos sistemas de coordenadas del cuerpo

Para que la energía cinética sea separable en las dos partes correspondientes a la traslación y a la rotación del cuerpo (véase 12.5), será necesario en general tomar un sistema de coordenadas del cuerpo cuyo origen sea el centro de masa del mismo. En el caso de determinadas formas geométricas puede que no sea siempre conveniente calcular las componentes del tensor de inercia utilizando un sistema de coordenadas como éste. En consecuencia, supongamos otro sistema de coordenadas X_i , fijo también respecto del cuerpo y cuyos ejes tengan la misma orientación que los x_i , pero cuyo origen Q no coincida con el origen O (situado en el centro de masa del cuerpo). Q puede encontrarse tanto en el interior como en el exterior del cuerpo en cuestión.

Las componentes del tensor de inercia referidos a los ejes X_i pueden escribirse

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{\alpha} X_{\alpha,k}^2 - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j} \right] \tag{12.29}$$

Entonces, si el vector que une Q con O es \mathbf{a} , el vector de posición \mathbf{R} de un punto cualquiera respecto de Q podrá escribirse (véase la figura 12-5)

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{r} \tag{12.30}$$

y sus componentes

$$X_i = a_i + r_i \tag{12.30a}$$

Utilizando 12.30a, el elemento J_{ij} de la matriz del tensor se transforma en

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{\alpha} (X_{\alpha,k} + a_k)^2 - (X_{\alpha,i} + a_i)(X_{\alpha,j} + a_j) \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{\alpha} X_{\alpha,k}^2 - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j} \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_{\alpha} (2X_{\alpha,k} a_k + a_k^2) \right. \\ &\quad \left. - (a_i X_{\alpha,j} + a_j X_{\alpha,i} + a_i a_j) \right] \end{aligned} \tag{12.31}$$

lo que deja establecido que la diferencia entre las componentes es igual a la masa del cuerpo multiplicada por el cuadrado de la distancia entre los ejes paralelos (entre los ejes X_1 y x_1 en este caso).

◆ Ejemplo 12.5 Más acerca del cubo

Volvamos de nuevo al caso del cubo homogéneo para el cual determinamos que el tensor de inercia (en el caso del origen situado en un vértice) es (la expresión 4 del ejemplo 12.2b):

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{8}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{3}{8}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 \\ -\frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mb^2 & \frac{3}{8}Mb^2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Ahora podemos hacer uso de la igualdad 12.34 para obtener el tensor de inercia $\{I\}$ referido a un sistema cuyo origen esté en el centro de masa. Para respetar la notación seguida en esta sección, llamaremos x_i a los nuevos ejes con origen en O y X_i a los ejes primitivos con origen Q en un vértice del cubo (véase figura 12.5).

Entonces, el centro de masa del cubo se encontrará en el punto $(b/2, b/2, b/2)$ del sistema coordenado X_i , siendo, por tanto, las componentes del vector \mathbf{a}

$$a_1 = a_2 = a_3 = b/2 \quad (2)$$

De 1, tenemos

$$\begin{aligned} J_{11} &= J_{22} = J_{33} = \frac{3}{8}Mb^2 \\ J_{12} &= J_{13} = J_{23} = -\frac{1}{4}Mb^2 \end{aligned} \quad (3)$$

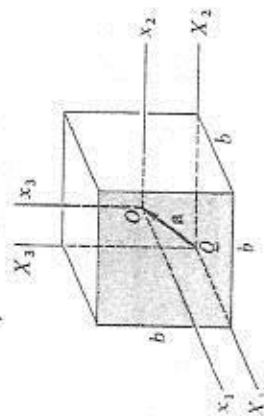


FIG. 12-5

y, aplicando 12.34, encontramos

$$\begin{aligned} I_{11} &= J_{11} - M[a_1^2 - a_1^2] \\ &= J_{11} - M[a_1^2 + a_1^2] \\ &= \frac{3}{8}Mb^2 - \frac{1}{2}Mb^2 = \frac{1}{8}Mb^2 \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} I_{12} &= J_{12} - M[-a_1a_2] \\ &= -\frac{1}{4}Mb^2 + \frac{1}{4}Mb^2 = 0 \end{aligned}$$

Por lo que, en resumen,

$$\begin{aligned} I_{12} = I_{23} = I_{33} &= \frac{1}{8}Mb^2 \\ I_{13} = I_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Por tanto, el tensor de inercia es diagonal:

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{8}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}Mb^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Si en esta expresión sacamos $\frac{1}{8}Mb^2$ factor común, podemos escribir

$$\{I\} = \frac{1}{8}Mb^2\{1\} \quad (8)$$

donde $\{1\}$ es el tensor unitario:

$$\{1\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Así, pues, resulta que cuando situamos el origen en el centro de masa del cubo, los ejes principales son normales a las caras del mismo. Como desde un punto de vista físico no hay nada que distinga a uno de tales ejes de otro, los momentos principales de inercia serán iguales en este caso. Observamos, además, que en tanto que mantengamos el origen en el centro de masa, el tensor de inercia será el mismo *cualquiera* que sea la orientación de los ejes coordenados, siendo éstos con la misma validez ejes principales de inercia.*

* En este aspecto, el cubo es similar a la esfera por lo que concierne al tensor de inercia; es decir, cuando el origen es el centro de masa, la estructura de las componentes del tensor de inercia no está lo bastante detallada para distinguir entre un cubo y una esfera.

El desarrollo de este determinante nos lleva a la ecuación secular* de I , que es de tercer grado, correspondiendo cada una de sus tres raíces a un momento de inercia respecto de uno de los ejes principales. Estos valores, I_1 , I_2 e I_3 , se llaman *momentos principales de inercia*. Cuando el cuerpo gire en torno del eje correspondiente al momento principal I_1 , 12.25 se hará $L = I_1\omega$; es decir, tanto ω como L estarán dirigidos según este eje. La dirección de ω respecto del sistema de coordenadas del cuerpo será entonces la misma que la del eje principal correspondiente a I_1 . En consecuencia, podemos determinar la dirección de este eje principal sustituyendo I por I_1 en 12.27 y determinando los cocientes de las componentes de la velocidad angular: $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$. Con esto, determinamos los cosenos directores del eje respecto del cual el momento de inercia es I_1 . De forma similar pueden encontrarse las direcciones que corresponden a I_2 e I_3 . En la sección 12.6 demostraremos que los ejes principales determinados de esta manera son *reales* y *ortogonales*; estas conclusiones son asimismo consecuencia de las consideraciones más generales que se ofrecen en la sección 13.6.

El hecho de que el método de diagonalización que acabamos de describir nos dé únicamente los *cocientes* de las componentes de ω no constituye ningún inconveniente, puesto que los cocientes determinan por completo la dirección de cada uno de los ejes principales, y es sólo la dirección de tales ejes lo que necesitamos. En realidad, no podíamos esperar que los *valores* de las ω_i quedasen determinados, puesto que las características particulares del movimiento angular del cuerpo no pueden quedar especificadas únicamente por la geometría y gozamos de libertad para imprimir al cuerpo una velocidad angular del módulo que queramos.

En la mayoría de los problemas que se encuentran en la dinámica de los sistemas rígidos, los cuerpos poseen una cierta forma regular de manera que los ejes principales pueden determinarse mediante un simple examen de la simetría del cuerpo. Por ejemplo, todo cuerpo que sea un sólido de revolución (p. e., una varilla cilíndrica) tendrá uno de los ejes principales coincidentes con el eje de simetría (p. e., la recta central de la varilla simétrica) y los otros dos ejes principales situados en un plano normal a aquél. Evidentemente, como el cuerpo es simétrico, la posición angular de estos dos ejes puede elegirse arbitrariamente. En este caso de sólido de revolución, si el momento de inercia respecto del eje de simetría es I_1 , será $I_2 = I_3$; es decir, la ecuación secular tiene una raíz doble.

Si un cuerpo es tal que $I_1 = I_2 = I_3$, recibe el nombre de *peonza esférica*; cuando $I_1 = I_2 \neq I_3$ recibe el nombre de *peonza simétrica* y si los momentos de inercia principales son distintos entre sí, se dice que es una *peonza asimétrica*. Un cuerpo con $I_1 = 0$ e $I_2 = I_3$ se llama motor; por ejemplo, dos masas puntuales unidas por una barra sin peso, o una molécula diatómica.

* Llamada así porque en mecánica celeste se utiliza una ecuación similar para representar perturbaciones seculares. En matemáticas se le llama *ecuación característica* o de *valores propios*.

Dinámica de sistemas rígidos

◆ Ejemplo 12.4 Ejes principales de un cubo

En el ejemplo 12.2(b) encontramos que el tensor de inercia de un cubo (con el origen de coordenadas en un vértice) tiene sus componentes no diagonales distintas de cero. Es evidente que los ejes coordenados que elegimos para aquel cálculo no son ejes principales. Si, por ejemplo, el cubo girase alrededor del eje x_3 , sería $\omega = \omega_3 e_3$ y las componentes del momento cinético L (véase 12.26) serían

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{2}\beta\omega_3 \\ L_2 &= -\frac{1}{2}\beta\omega_3 \\ L_3 &= \frac{3}{2}\beta\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Entonces

$$L = M\beta^2\omega_3(-\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{3}{2}e_3) \quad (2)$$

que evidentemente no tiene la misma dirección que ω .

Para determinar los momentos principales de inercia, debemos resolver la ecuación secular:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2}\beta - I & -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\beta & \frac{3}{2}\beta - I & -\frac{1}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\beta & \frac{3}{2}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

El valor de un determinante no se altera cuando se suma (o se resta) una fila (o columna) a otra fila (o columna). Si en 3 restamos a la segunda fila la primera, se obtiene una ecuación más fácil de resolver:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2}\beta - I & -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\beta + I & \frac{3}{2}\beta - I & -\frac{1}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\beta & \frac{3}{2}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

De la segunda fila podemos sacar factor común $(\frac{1}{2}\beta - I)$:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2}\beta - I & -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\beta - I & I & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\beta & \frac{3}{2}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

y, desarrollando, tenemos

$$(\frac{1}{2}\beta - I)[(\frac{3}{2}\beta - I)^2 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\beta(\frac{3}{2}\beta - I)] = 0 \quad (6)$$