

# PEQUEÑAS OSCILACIONES

MAS

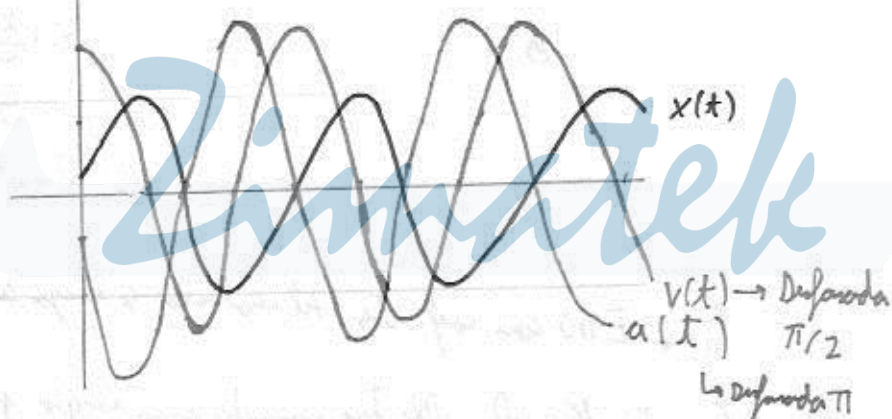
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \text{ con}$$

- $\omega$  un parámetro que va a depender del sistema
- $A$  y  $\varphi$  parámetros que van a depender de las C.I.

- Cinemática:

- Es un movimiento periódico de periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ( $\nu \equiv \frac{1}{T}$ ) y que oscila entre las posiciones  $A$  y  $-A$

• Al derivar:  $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$   
 $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

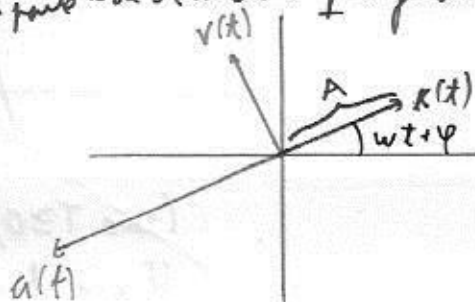


- Por comodidad, se suele trabajar en complejos, tomando la parte real de

$$z = A e^{i(\omega t + \varphi)}. \text{ Nota que esto sólo vale si actúan operadores lineales.}$$

$$(\operatorname{Re}[z_1] \cdot \operatorname{Re}[z_2]) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)\right]$$

Gráficamente, es tomar la parte real de vectores que giran en  $\mathbb{R}^2$ : fasores.



La expresión equivalente es:

$$x(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

$$x(t) = \xi e^{i\omega t} + \zeta e^{-i\omega t}$$

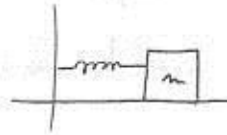
$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

con una adecuada elección de las cts.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\xi$  y  $\zeta$  (estas dos últimas  $\in \mathbb{C}$ ), que dependen de  $A$  y  $\varphi$ .

Esto es útil porque, por Fourier, cualquier movimiento periódico se puede poner como superposición de armónicos simples.

- Mecánicamente:

El ejemplo más clásico es el de un muelle:  $-Kx = m\ddot{x}$



$\Downarrow$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\Downarrow \rightarrow \frac{K}{m} \equiv \omega^2$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Es una EDO con coef. cts. Al resolverse se llega a un MAS.

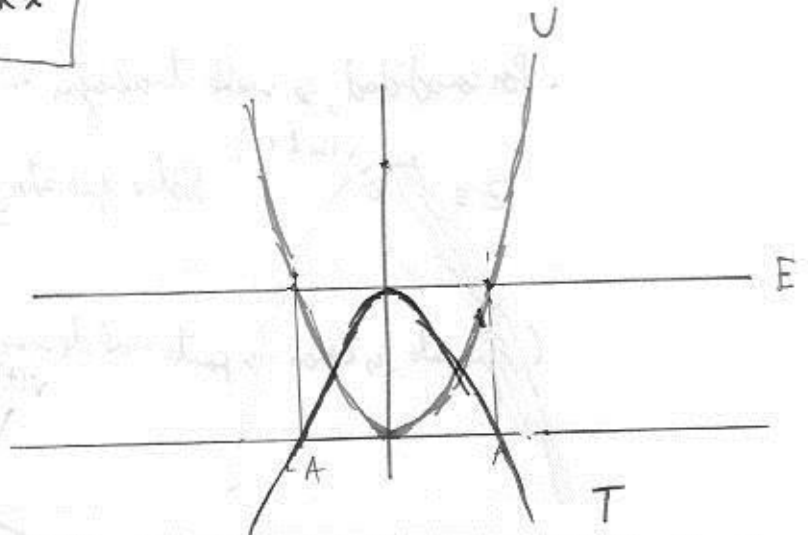
Como  $F = -Kx$ , el muelle tiene asociada una energía potencial (elegido el origen en  $x=0$ ):

$$U(x) = \frac{1}{2} Kx^2$$

Gráficamente, esto es una parábola:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \text{cte.}$$



(Como  $T \geq 0$ , el movimiento está acotado entre  $-A$  y  $A$ )  
(En  $x=0$ , hay un punto de equilibrio)

En dem, los potenciales paraboloides representan MAS. Así, localmente, cualquier mínimo de potencial (equilibrio estable) es a primer orden un MAS. (Al desarrollar en serie de Taylor queda un término paraboloides)

- Composición de movimientos armónicos: (se pueden hacer  $\left\{ \begin{array}{l} \text{con fases (no fase)} \\ \text{con fases iguales} \end{array} \right.$ )

• Si tengo dos MAS en la misma dirección y con la misma frecuencia

⇓  
 MAS de la misma frecuencia y amplitud que depende del desfase

Si los MAS tienen misma amplitud pero distinta frecuencia

⇓  
 "Batidos": una oscilación de frecuencia la superpone que modula a una de frecuencia la señal.



• Si tengo dos MAS cada uno en una dirección, se obtiene lo que se llama figuras de Lissajous. Si la frecuencia es la misma, es una elipse inscrita en un rectángulo de lados las amplitudes, y cuya orientación y forma depende del desfase.

$\left\{ \begin{array}{l} 0/\pi \Rightarrow \text{Rectángulo} \\ \pm\pi/2 \Rightarrow \text{Elipse recta} \\ \pm\pi/4 \Rightarrow \text{Elipse inclinada} \end{array} \right.$



# OSCILADOR AMORTIGUADO

Introducción una fuerza de amortiguamiento que depende de la velocidad:

$$m \ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0$$

$$\Downarrow \beta = \frac{\lambda}{2m} \quad (\text{a } \lambda \text{ se le suele llamar } \gamma \Rightarrow F = -\gamma \dot{x} = -\lambda \dot{x})$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

-  $\beta > \omega_0$  (sobreamortiguado):

$$x(t) = A e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + B e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

Una exponencial decreciente. A tiempos grandes, quedamos sólo (el otro crece)

-  $\beta = \omega_0$  (amortiguamiento crítico)

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\beta t}$$

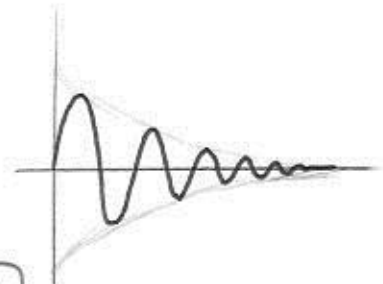
Critico:  $t e^{-\beta t}$   
Soluc:  $(e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}) e^{-\beta t}$   
Lo que ocurre es que  $t \Rightarrow \log$  es más tarde

Una exponencial decreciente que como  $-\beta < -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$  cae antes que el sobreamortiguado

-  $\beta < \omega_0$  (subamortiguado)

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

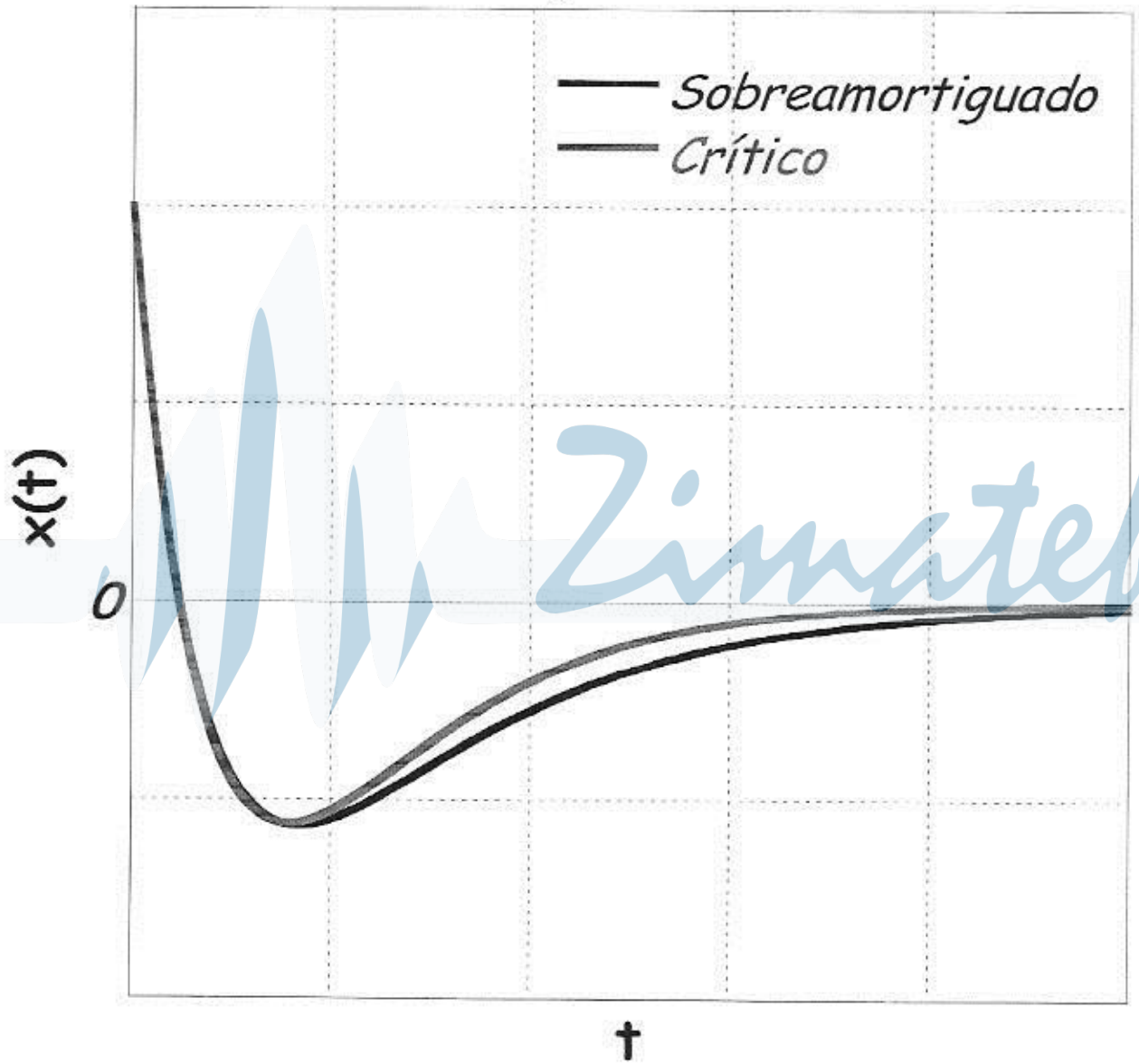
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \neq \omega_0!!!$$



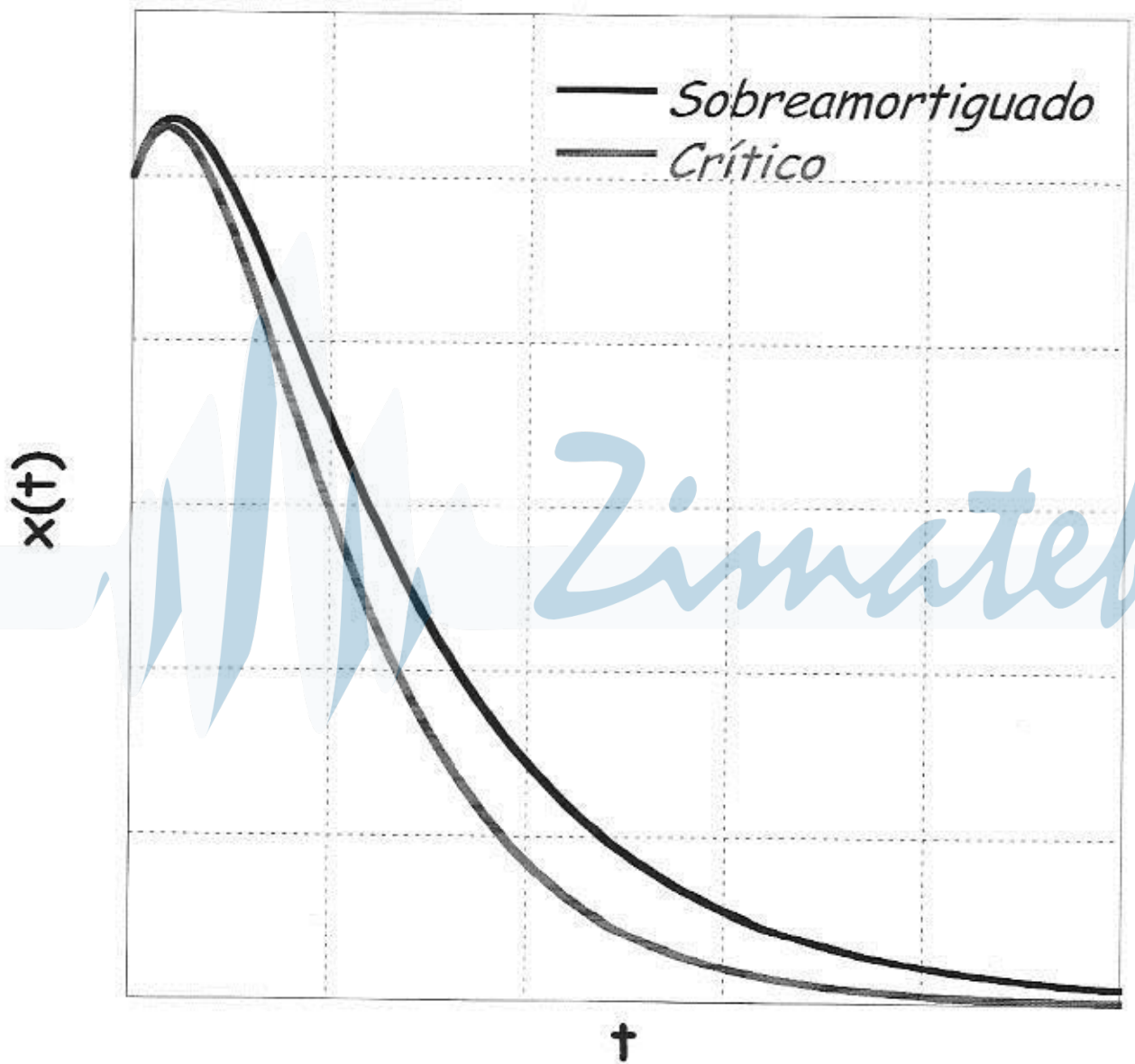
Se suelen dar  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Decremento logarítmico: } \beta \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = \ln \frac{A_0}{A_1} \rightarrow \text{log que cae la amplitud } (1 \text{ cuando } A_1 = A_0) \\ \text{Tiempo de relajación } \tau_0 = \frac{1}{\beta} \rightarrow \text{El tiempo a el que la amplitud cae } \frac{1}{e} \\ \text{Factor de calidad } Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \end{array} \right.$

Al haber una fuerza externa no conservativa,  $E \neq 0$ . Sustituyendo, sale:  $E = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\beta t} \left[ 1 + \frac{\beta}{\omega_0^2} \cdot (-\dots) + \frac{\beta^2}{\omega_0^2} \cdot (-\dots) \right]$ . Así, si  $\frac{\beta}{\omega_0} \ll 1$ ,  $E(t) \approx \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\beta t}$  (como el cuadrado de la amplitud)

$$\beta=90; \omega_0=80; v(0) \ll 0$$

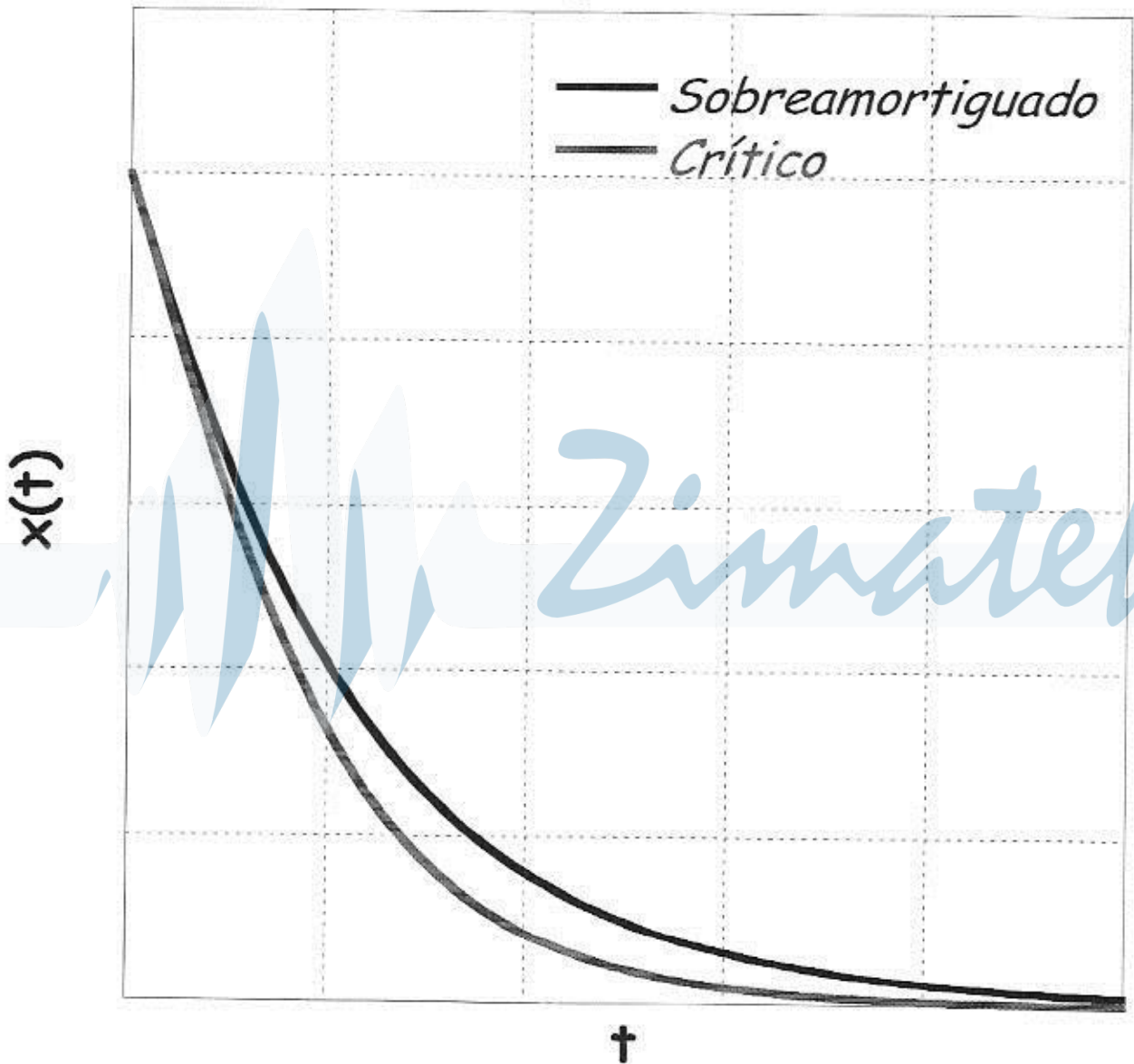


$$\beta=90; \omega_0=80; v(0)>0$$

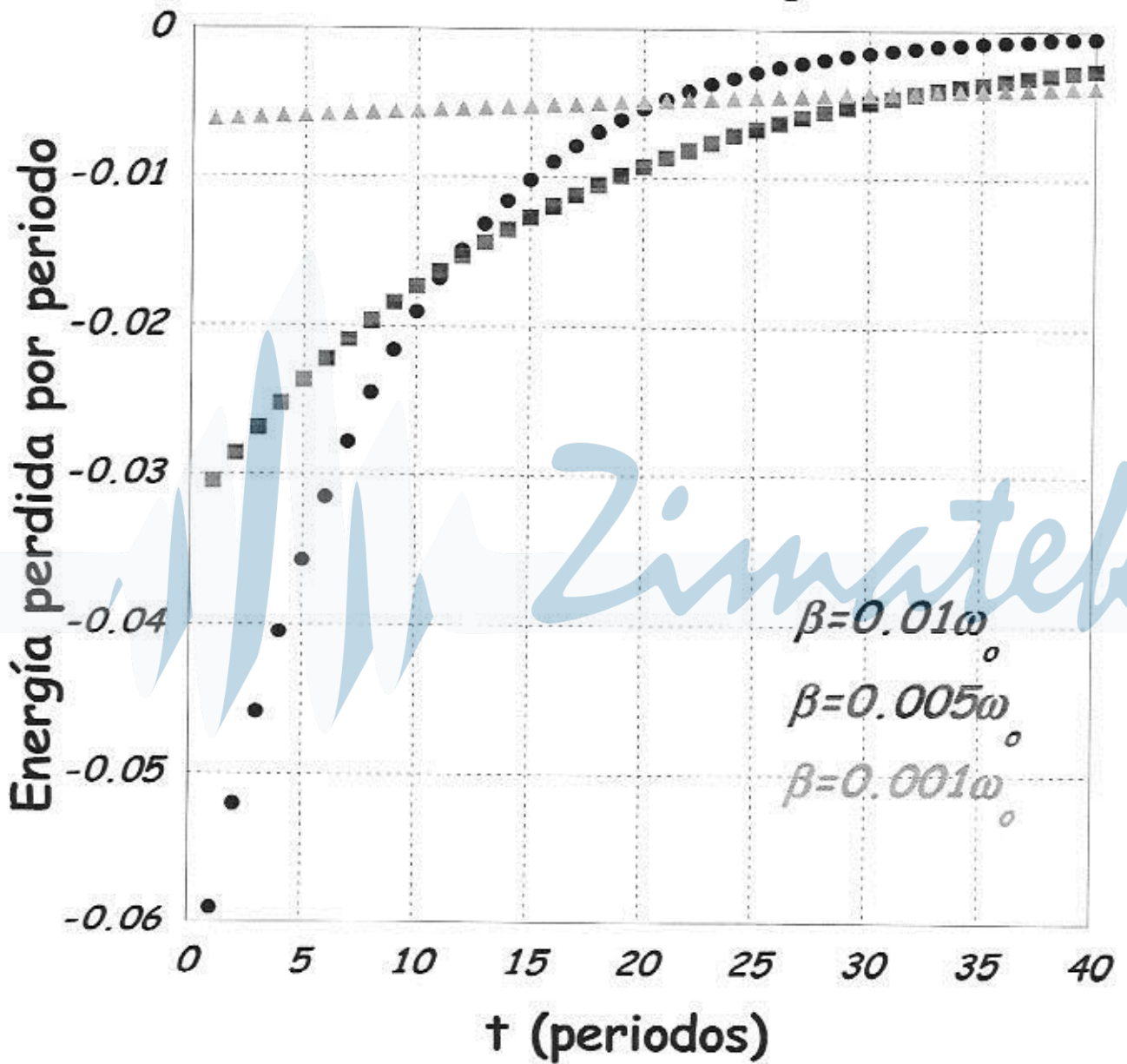


Zimatek

$$\beta=90; \omega_0=80; v(0)<0$$

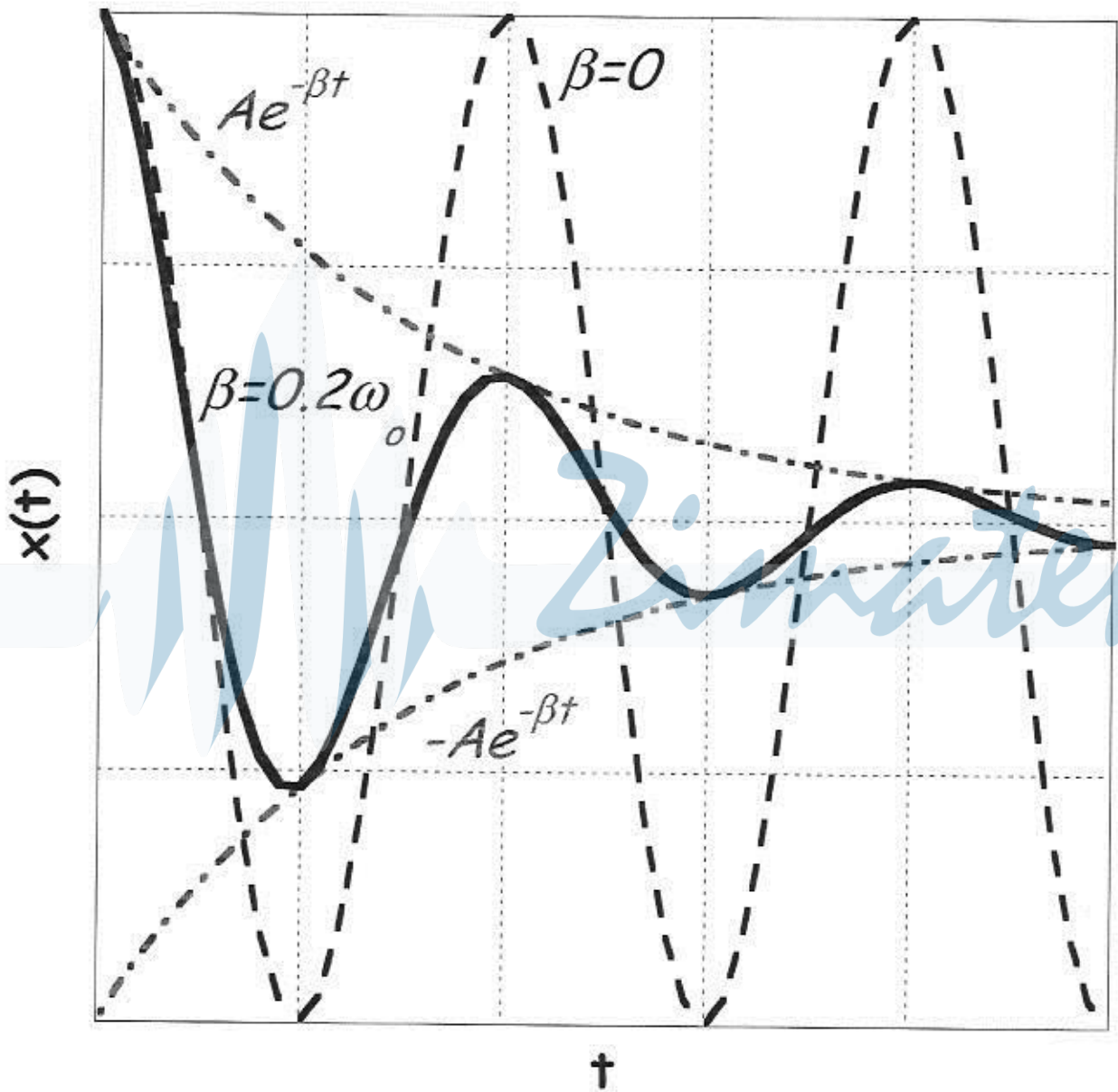


## Oscilador Amortiguado

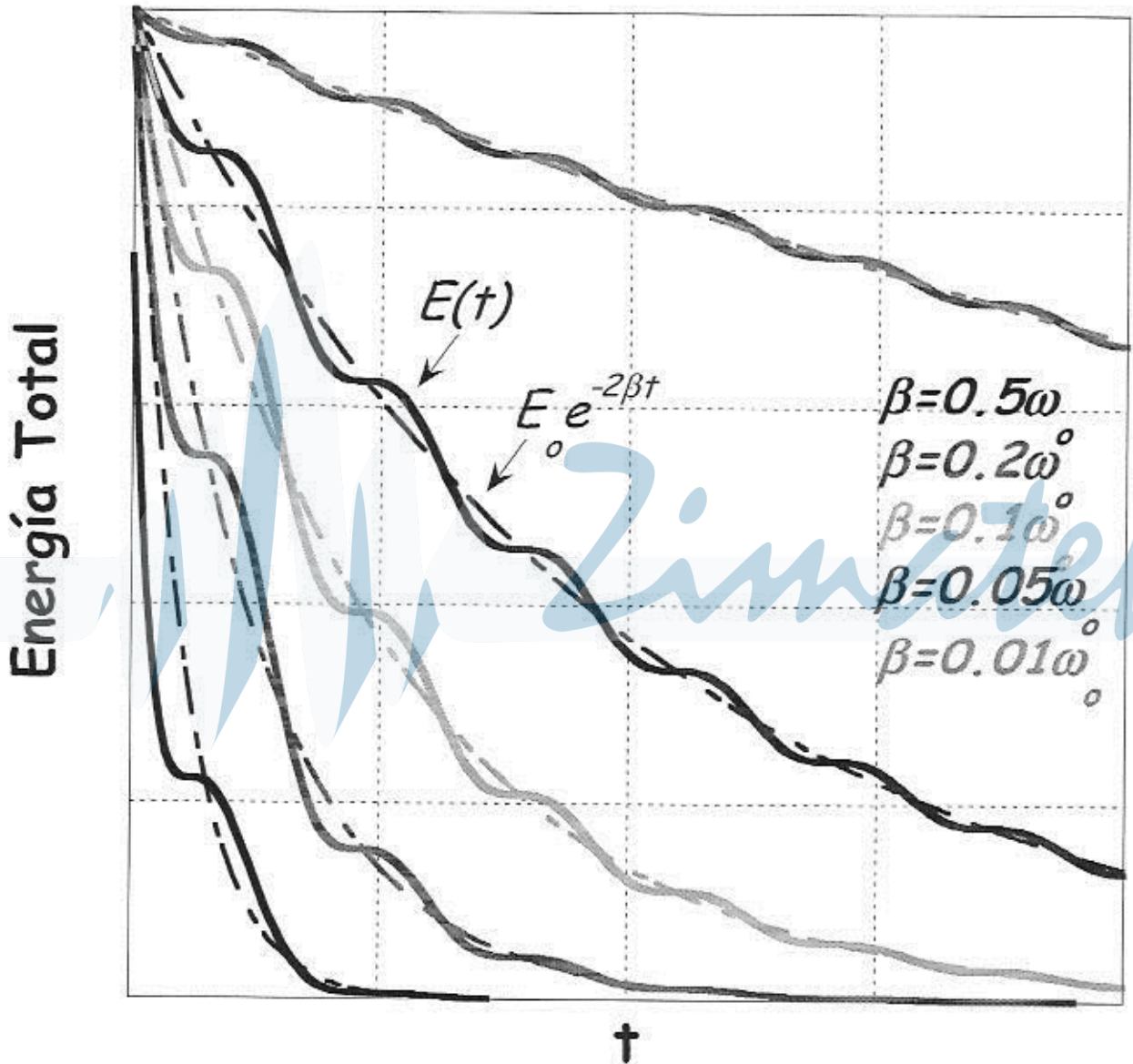




## Oscilador amortiguado



## Oscilador Amortiguado



# OSCILADOR FORZADO

- Introducir una fuerza externa periódica. Por Fourier, se puede suponer (sin perder generalidad) armónica:

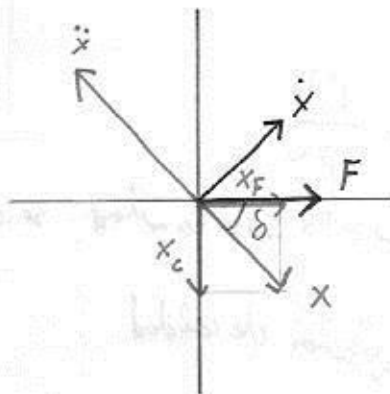
$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$$

La solución de esto es:  $x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{solución del amortiguado, que va a 0}} + x_p(t)$   $\Rightarrow$  De pronto nos olvidamos de ella

Buscando  $x_p$  armónica, se llega a:  $\rightarrow$  El primer fuerza residual (vamos a 2.2)

$$x_p = A \cos(\omega_F t - \delta), \text{ con}$$
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0 - \omega_F)^2 + (2\beta\omega_F)^2}}$$
$$\tan \delta = \frac{2\beta\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2}, \text{ con } \delta \in [0, \pi]$$

El diagrama fasorial es:



Notar que  $x(t) = \underbrace{A \cos \omega_F t \cos \delta}_{x_F, \text{ componente a fase con } F} + \underbrace{A \sin \omega_F t \sin \delta}_{x_c, \text{ componente a 90 grados, y opuesta de fase con } F}$



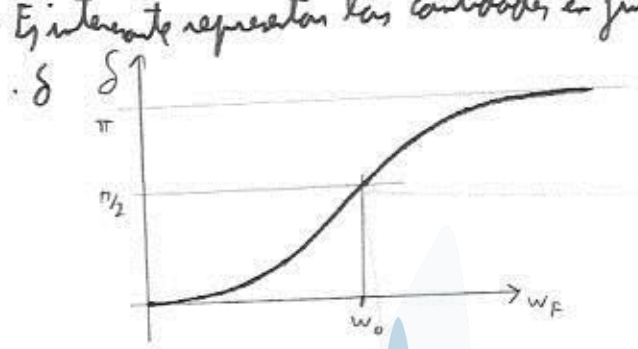
- En lo que se refiere a la energía; el sistema absorbe energía de la fuerza externa (que realiza trabajo), y a su vez el resorte disipa energía.

En concreto,  $P_{\text{abs}} \frac{dW}{dt} = F_0 \omega_F [-\sin \omega_F t x_F(t) + \cos \omega_F(t) x_C(t)]$

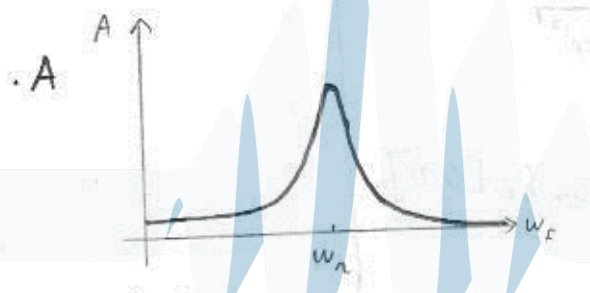
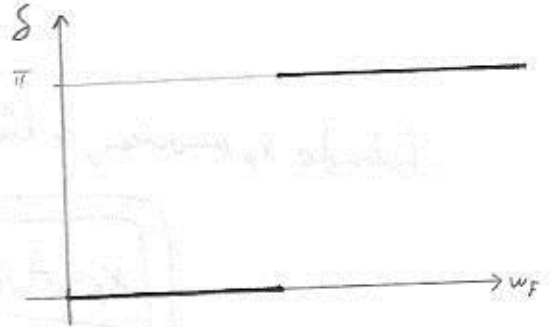
Promediando:  $\langle P \rangle_{\text{abs}} = \frac{1}{2} F_0 \omega_F A \sin \delta$  (energía promed. de tiempo que, en promedio, se absorbe en un periodo)

La potencia disipada promedio,  $\langle -F_2 v \rangle = \langle -2\beta m \dot{x}^2 \rangle$  es, en su caso,  $\langle P \rangle_{\text{abs}} = \langle P \rangle_{\text{dis}}$ .

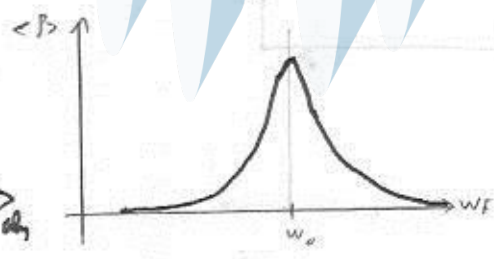
- Es interesante representar las cantidades en función de  $\omega_F$ , la principal variable de la fuerza externa:



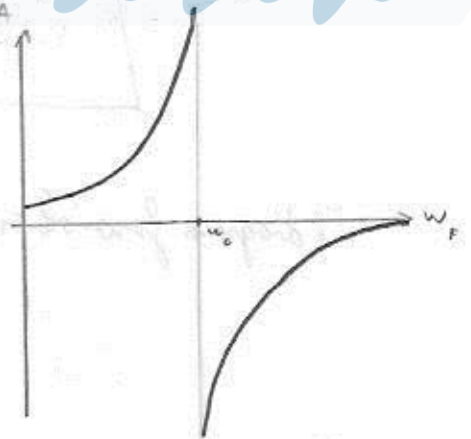
Cuanto menor sea  $\beta$ , más pendiente tiene. En el límite  $\beta \rightarrow 0$ :



- la gráfica no es simétrica
- Hay un máximo en  $\omega_F \approx \omega_0$ . En concreto,  $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$
- **RESONANCIA**
- Cuanto menor sea  $\beta$ , más picuda es la gráfica



En el límite  $\beta \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow \pm \infty$  en  $\omega_0$ :  
 (por que hay un desfase de pi)



- la gráfica es algo más simétrica
- la resonancia ocurre en  $\omega_F = \omega_0$ .  $\langle P \rangle_{\text{res}} = \frac{F_0^2}{4\beta m}$

• Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las frecuencias a las que  $\langle P \rangle$  cae a la mitad, se define el ancho de banda

$\Delta \omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$ , con  $Q$  el factor de calidad

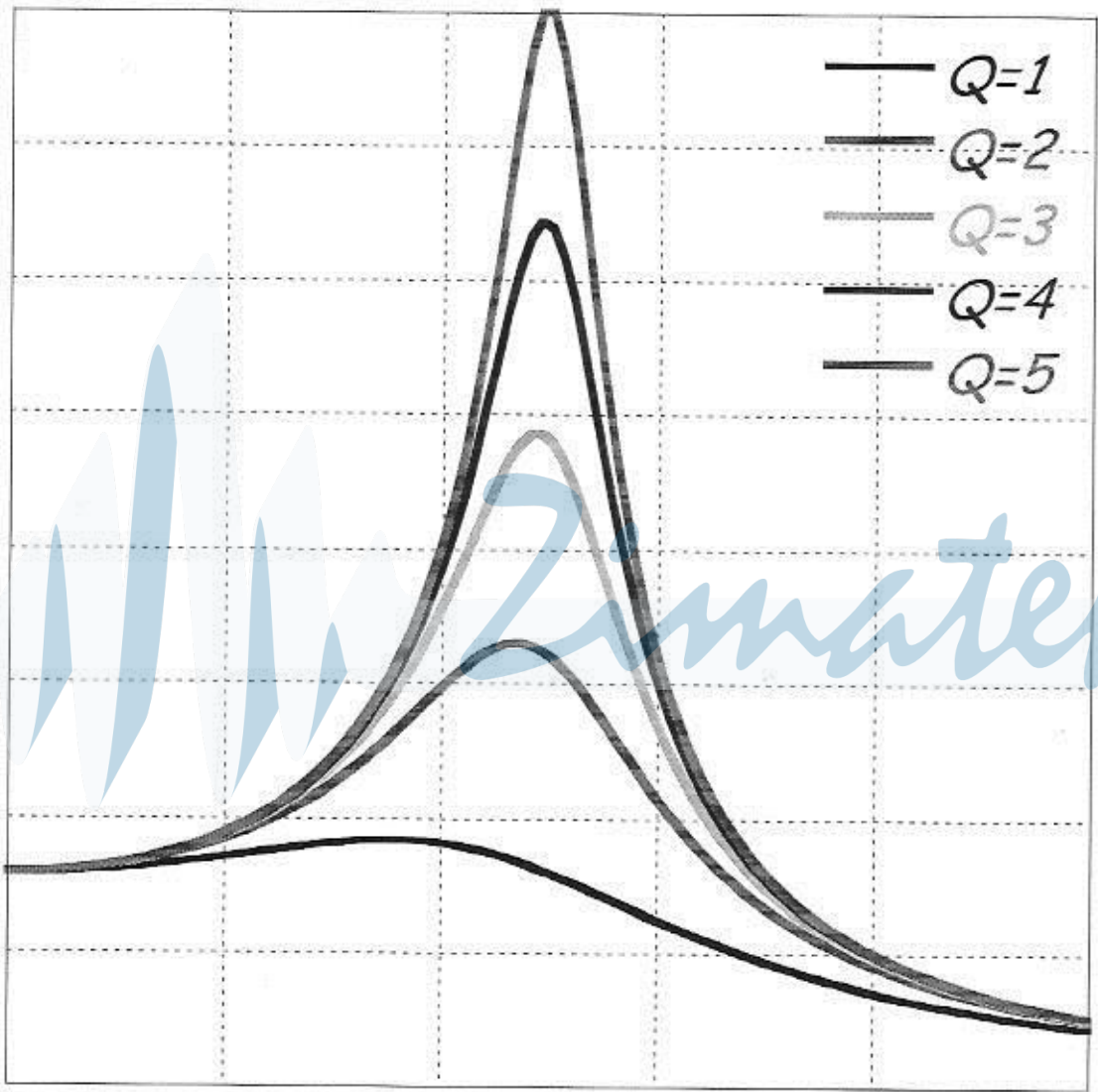
- Notar que si  $\beta = 0$ , el valor absoluto de  $A$  y el  $\pi$  de la  $\delta$  se comparan. Añadiendo la logística, que no se va:

$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \cos \omega_F t$



# Resonancia

Amplitud en unidades de  $F_0/m$



$\omega_F$

- Vamos ahora a estudiar  $x_H$ : los transitorios. Como es obvio, nos interesa los casos donde  $x_H$  no cae excesivamente rápido, así que trataremos el caso subamortiguado:  $\beta < \omega_0$ . Así:

$$x(t) = A \cos(\omega_F t - \delta) + D e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

• D y  $\phi$  depende de las C.I. Las supondremos nulas:  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ .

•  $\beta = 0$ : es obvio que el caso más interesante (los transitorios no se van). Bajo C.I. nulas:

$$x(t) = A (\cos \omega_F t - \cos \omega_0 t) \quad \text{con signo, } A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_F^2}$$

↓  
BATIDOS

•  $\beta \neq 0$ : bajo C.I. nulas, queda un puro. Tomemos el siguiente límite (útil porque los transitorios serán más notables):

$$\beta \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{matrix} \omega_1 \rightarrow \omega_0 \\ e^{-\beta t} \rightarrow 1 - \beta t \end{matrix}$$

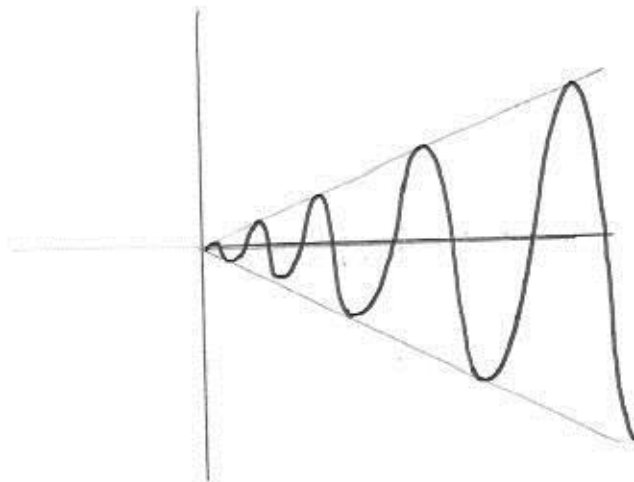
• límite de resonancia:  $\omega_F \rightarrow \omega_0$

Estudiar la solución particular del forzamiento.

- $\omega_F = \omega_0$
- $\beta = 0$

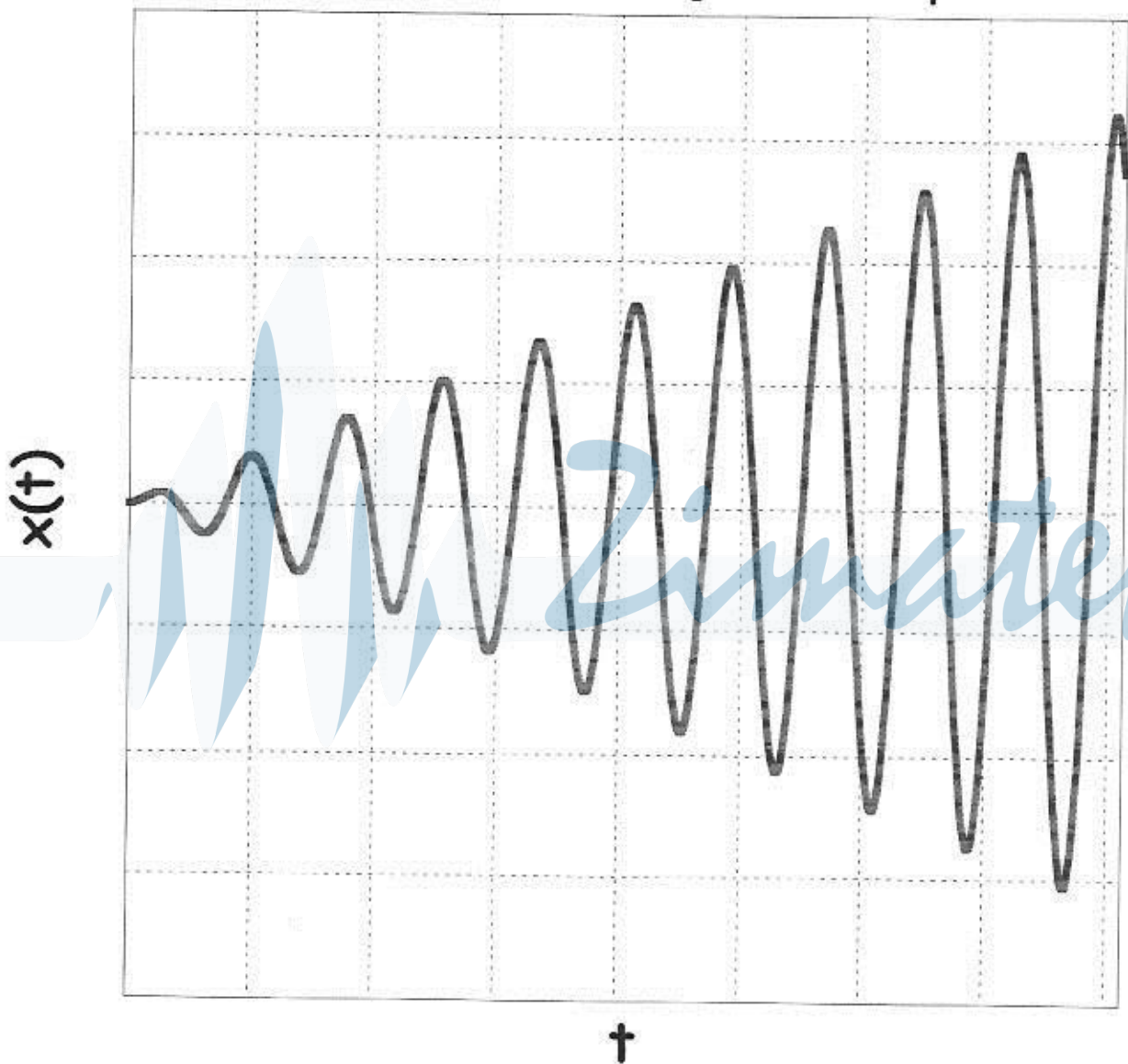
$$x(t) \approx \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

⇒ Una oscilación creciente (a mayor  $t$ , la recta se hace más horizontal)



Zimatek

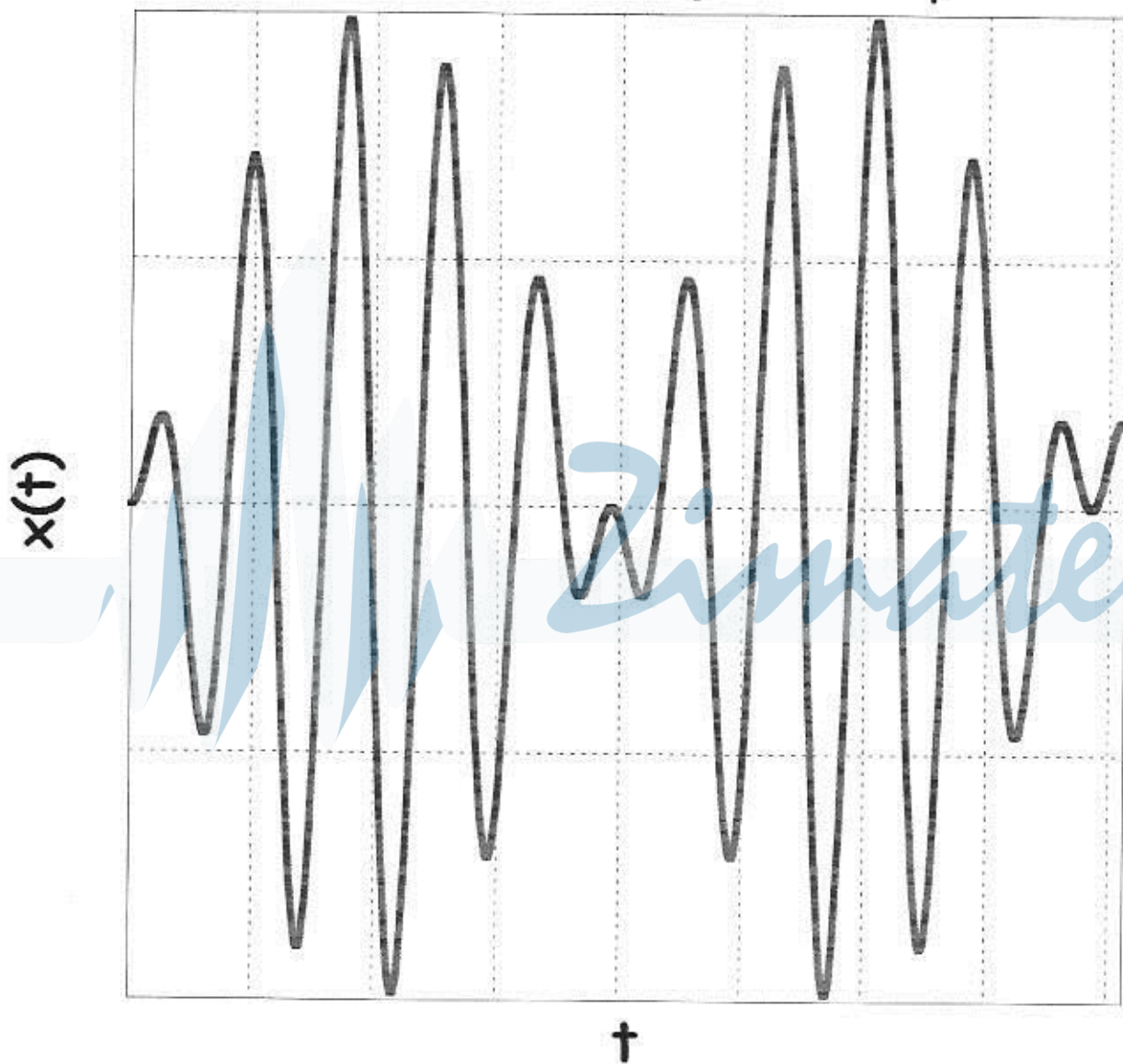
Transitorios ( $\beta=0$ ,  $\omega_0=100$ ,  $\omega_F=100$ )



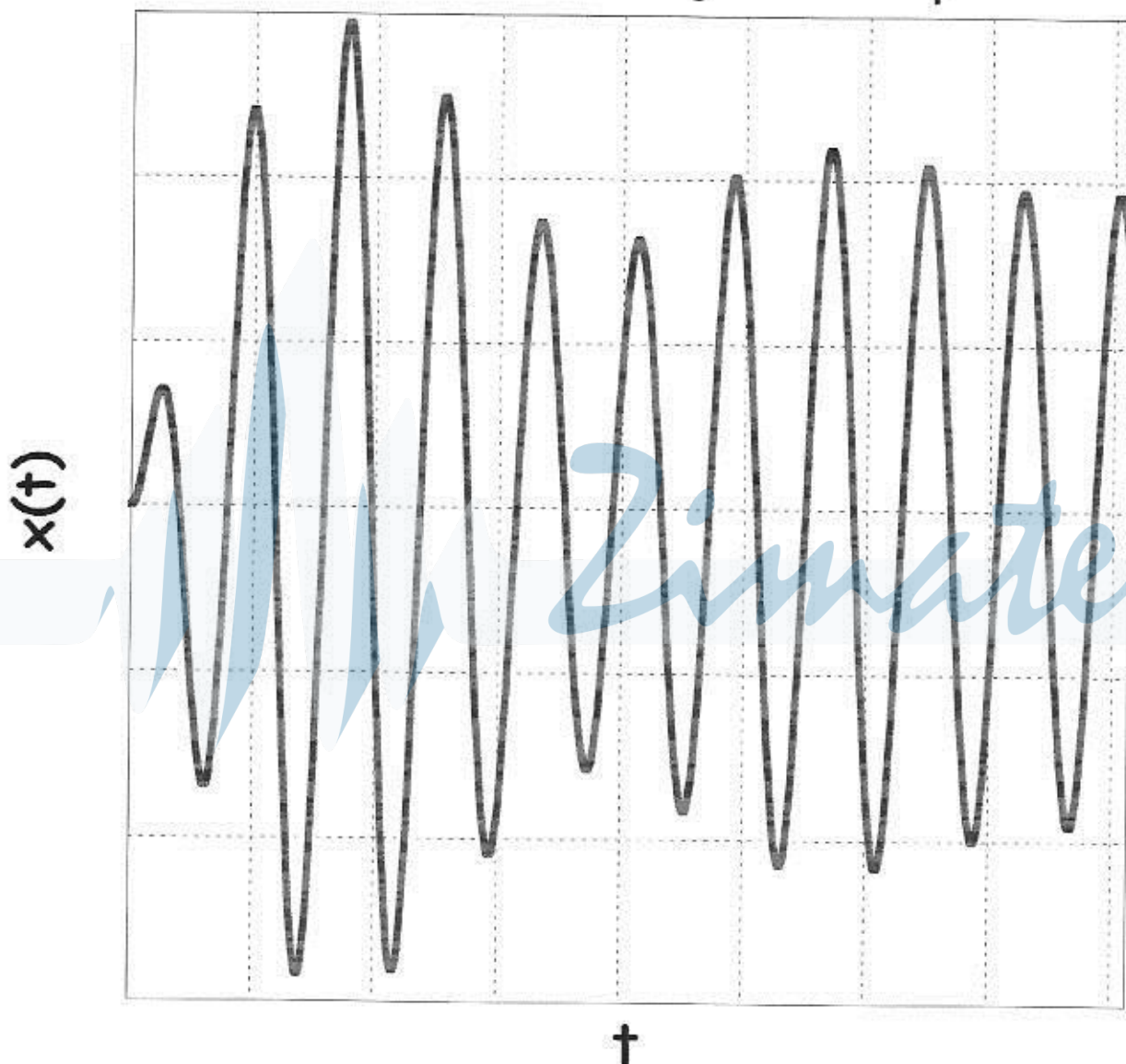




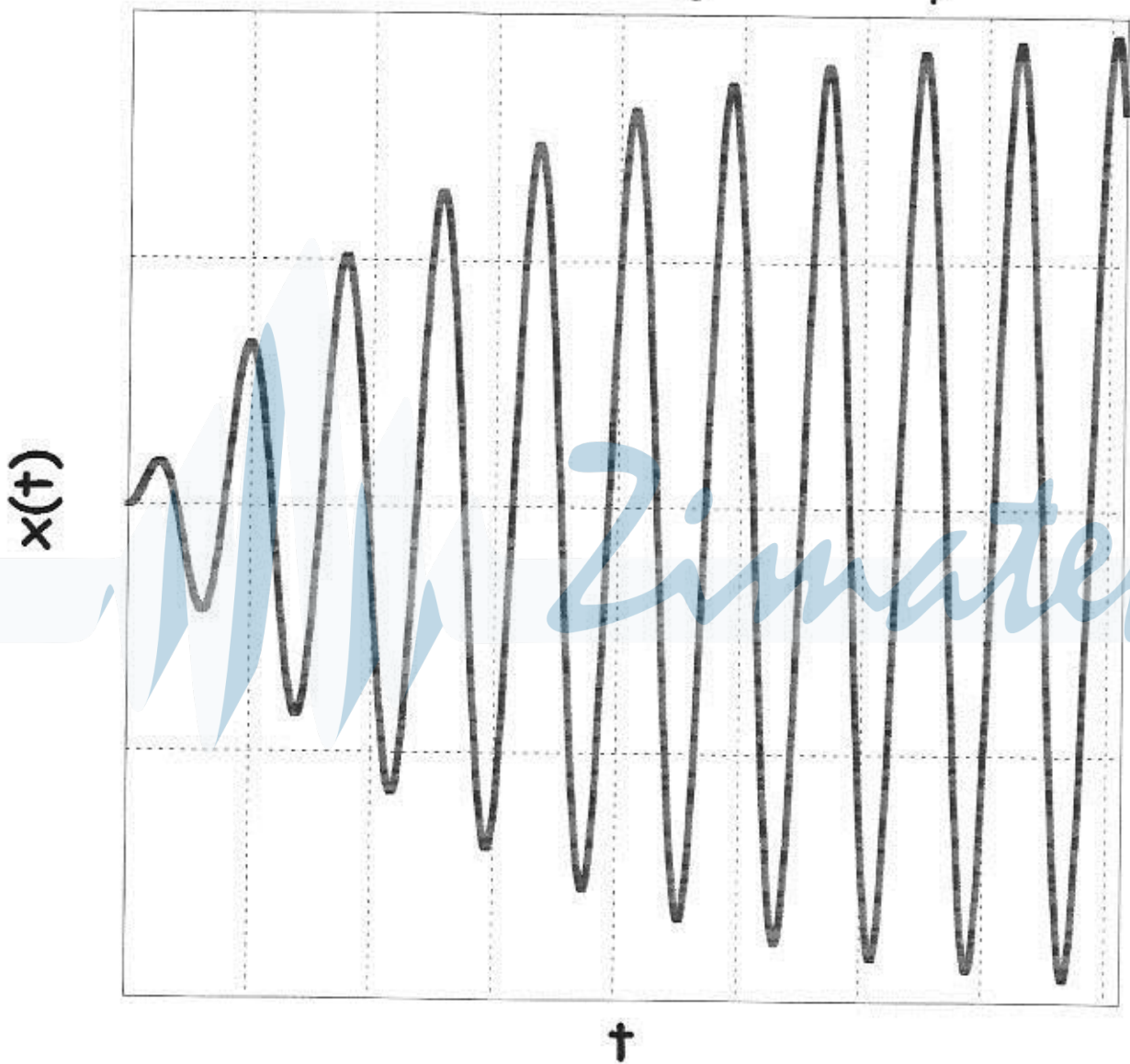
Transitorios ( $\beta=0$ ,  $\omega_0=100$ ,  $\omega_F=120$ )



Transitorios ( $\beta=5$ ,  $\omega_0=100$ ,  $\omega_F=120$ )



Transitorios ( $\beta=5$ ,  $\omega_0=100$ ,  $\omega_F=100$ )



## ANALOGÍA ELÉCTRICA

• Las ecuaciones del oscilador forzado y libre en un circuito RLC son las mismas, haciendo el cambio (sólo etc. de proporcionalidad):

$$\begin{array}{l} m \longrightarrow L \\ \beta \longrightarrow R \text{ (si } R=0 \text{ y } \varepsilon=0 \text{ queda el simple)} \\ K \longrightarrow C \\ F \longrightarrow \varepsilon \text{ (si } \varepsilon=0 \text{ queda el no forzado)} \end{array}$$

• Si no hay resistencia, la energía se conserva, alternando entre:

- Energía eléctrica (en el condensador)  $\Leftrightarrow V$
- Energía magnética (en la bobina)  $\Leftrightarrow T$

La resistencia disipa energía, y el generador la suministra.



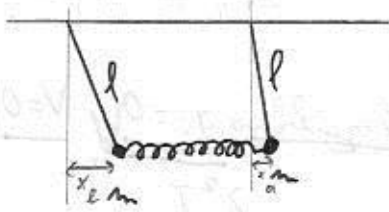
Zimatek



# OSCILACIONES ACOPLADAS

Vamos a estudiar sistemas con más grados de libertad, siempre en pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio.

Ejemplo:



Las ecuaciones del movimiento son, para pequeñas oscilaciones:

$$\begin{cases} \ddot{x}_a + x_a \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{k}{m} (x_a - x_b) = 0 \\ \ddot{x}_b + x_b \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{k}{m} (x_b - x_a) = 0 \end{cases}$$

Si llamamos  $\omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}$  y  $\omega_c^2 \equiv \frac{k}{m}$ :

$$\begin{cases} \ddot{x}_a + x_a (\omega_0^2 + \omega_c^2) - \omega_c^2 x_b = 0 \\ \ddot{x}_b + x_b (\omega_0^2 + \omega_c^2) - \omega_c^2 x_a = 0 \end{cases}$$

Un sistema acoplado!!!

Para desacoplarlo, sumo y resto. Si deato  $\begin{cases} q_1 \equiv x_a + x_b \\ q_2 \equiv x_a - x_b \end{cases}$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + q_1 \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \text{MAS de } \omega_1 = \omega_0 \\ \ddot{q}_2 + q_2 (\omega_0^2 + 2\omega_c^2) = 0 \Rightarrow \text{MAS de } \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1(t) = C_1 \cos \omega_1 t \\ q_2(t) = C_2 \cos \omega_2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_a = \frac{1}{2} C_1 \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} C_2 \cos \omega_2 t \\ x_b = \frac{1}{2} C_1 \cos \omega_1 t - \frac{1}{2} C_2 \cos \omega_2 t \end{cases}$$

He encontrado dos soluciones muy curiosas:

- En ambas, ambas oscilaciones oscilan a la misma frecuencia
- En una de ellas, ambas se mueven como si no hubiera muelle
- En la otra, se mueven en oposición de fase
- Si las C.I. existen sólo una de las soluciones, el sistema se quedará ahí.
- Como tengo tantas soluciones como grados de libertad, he resuelto el problema.

A esto se le conoce como MODOS NORMALES.

Vamos a generalizar esto.

- Sea un sistema descrito por las coordenadas  $q_i$ , de  $n$  grados de libertad

- Supongamos que dicho sistema se encuentra en equilibrio estable  
 $\Downarrow$   
 $q_i = 0$   $\Rightarrow V(q_1, \dots, q_n)$  tiene un m.

Mediante un simple cambio de coordenadas, hacemos que el equilibrio  $q_i = 0$ :

Ahora:  $T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ , siendo  $m_{jk} = m_{kj} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}$

Como vamos a considerar movimientos alrededor del equilibrio, estas derivadas se pueden calcular en el equilibrio.

$\rightarrow$  Desarrollo en serie alrededor de 0, equilibrio por punto de equilibrio

$$V = V(q_1, \dots, q_n) \approx V(0) + \sum_j \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0 q_j q_k + \dots$$

$\downarrow$  Me olvido de él (se va al derivar)       $\downarrow$  Cero en punto de equilibrio

Quedándose a 2º orden,  $V = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0 q_j q_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k$

$\mathcal{L} = T - V$  y  $\forall k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0$ . Teniendo en cuenta las expresiones

halladas para  $T$  y  $V$  y que los tensores están hechos de números (se han sacado en el equilibrio):

$$\forall k, \sum_j A_{jk} q_j + \sum_j m_{jk} \ddot{q}_j = 0$$

Nos preguntamos, ¿ $\exists$  soluciones armónicas?  $\Leftrightarrow \exists \omega$  t.q.  $q_j = a_j \cos(\omega t + \delta)$

$$\forall_j? \Leftrightarrow \exists \omega \text{ t.q. } \sum_j A_{jk} a_j = \omega^2 \sum_j m_{jk} a_j?$$

Es decir, el problema de hallar nodos normales,  $q$ :

• Habiendo que, en equilibrio,  $q_i = 0 \forall i$ :

• Hallar  $w_i$  y  $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \neq 0 \forall q$

$\swarrow$  amplitud       $\searrow$  modo

$$\bar{A} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = w_i^2 \bar{M} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{A} - w_i^2 \bar{M}) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $A_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{eq}$  y  $M_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{eq}$

• Los  $w_i$  se hallan imponiendo  $|\bar{A} - w_i^2 \bar{M}| = 0$  y los  $\vec{a}$  resueltos el sistema homogéneo que queda.

• La solución general será  $q_k = \sum_i a_{ki} \cos(w_i t + \delta_i)$

$\nearrow$  libro, depende de los C.L. pero  $\delta_i$  con todos los amplitudes  
 $\searrow$  libro, depende de los C.L. y otros relacionados con el de otros osciladores

• Comenciamos teorías por el álgebra:

•  $w_i^2 \in \mathbb{R}$

$w_i = 0$  son degeneraciones en el sistema. No se ven ahí es del  $q_i = 0 + \delta_i t$

Es más, como  $T \geq 0$ ,  $\bar{A}$  es definida positiva y  $w_i^2 > 0 \Rightarrow$  Nunca a haber frecuencias complejas (representan amortiguamiento)

•  $\exists \{ \vec{a}_i \}_{i=1}^n$  linealmente independientes (base)  $\Rightarrow$  Hay  $n$  soluciones, L.I.  $\Rightarrow$  la longitud

de nodos normales, no cambia la solución general  $\Rightarrow$  El movimiento general va a ser C.L. de nodos normales. Es más, si consideramos un nodo normal formado tanto por frecuencia como por relación de amplitudes, hay tantos nodos normales como grados de libertad. (Puede haber más en los degenerados)



# PASO AL CONTINUO

Sea un sistema de  $N$  partículas equiespaciadas situadas a una cuerda tensa:



Los extremos de la cuerda se simbolizan por dos partículas más: 0 y  $N+1$ .

Para pequeñas oscilaciones (se hacen aproximaciones de Taylor), la ecuación del movimiento es:

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} + 2w_0^2 y_p - w_0^2 (y_{p+1} + y_{p-1}) = 0$$
$$\text{con } w_0^2 = \frac{T}{ml}$$

Imponiendo que los extremos están fijos ( $y_0 = y_{N+1} = 0$ ) se llega a que los modos normales vienen dados por:

$$y_{p,n}(t) = C_n A_{p,n} \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

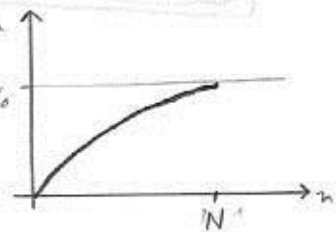
$C_n$  y  $\delta_n$  libres

$$A_{p,n} = \sin \frac{p n \pi}{N+1} \rightarrow \text{En } p=0 \text{ o } p=N+1 \text{ da } 0$$

$$\omega_n = 2w_0 \sin \frac{n\pi}{2(N+1)}$$

Notare: • Esto equivale a  $y_{p,n}(t) = A_{p,n} [\alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t]$

•  $\omega_n < 2w_0$ ; ya que hay  $N$  modos normales:



• Es útil definir, para cada modo:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow \omega_n = 2w_0 \sin \frac{k_n l}{2}$$

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad A_{p,n} = \sin(k_n p l)$$



• Vamos a pasar al continuo. Para ello,

- Definir  $\mu \equiv \frac{m}{l}$
- Exigir  $\begin{cases} L = Nl \\ M = Nm \end{cases}$   $\begin{matrix} \rightarrow \text{logitud de la cuerda} \\ \text{se mantengan fijos} \\ \rightarrow \text{masa de la cuerda} \end{matrix}$

- Hacemos  $N \rightarrow +\infty \Rightarrow m \rightarrow 0$   
 $\Rightarrow l \rightarrow 0$

Queda:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \delta_n)$$

$$\cdot k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}, \text{ y } \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\cdot \omega_n = n \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = n \omega_1$$

•  $c_n$  y  $\delta_n$  etc. que depende de las C.I.

• Vamos ahora a estudiar la energía. Para esto, es útil cambiar de notación:  $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t]$ . Derivando  $\eta(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$  e integrando:

$$E_c = \frac{\mu L}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\eta}_n^2 = \frac{\mu L}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n \omega_n \sin \omega_n t + B_n \omega_n \cos \omega_n t)^2$$

$$E_p = \frac{\mu L}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \eta_n^2 = \frac{\mu L}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)^2$$

$$E = \frac{\mu L}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 c_n^2 = \frac{\mu L}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) = \text{cte.}$$

Se ve que, al ser  $\omega_n$  distintos, como  $\frac{1}{2} k \Delta y^2$  e integral

# Cuerda Discreta

## Relación de Dispersión

