ONDAS

· Intuitivamente, son perturbaciones que viajan.

· Rigurosamente, $\psi = \psi(x,t)$ es una onda cuando cumple:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \qquad [v] = \frac{[L]}{[T]} \rightarrow \text{una velocidad} \qquad \Updownarrow \qquad \psi(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\text{Perturbación que viaja hacia la derecha}} + \underbrace{g(x+vt)}_{\text{La perturbación que viaja hacia la izquierda}}}$$

· $\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ en $\mathbb{R}^3$

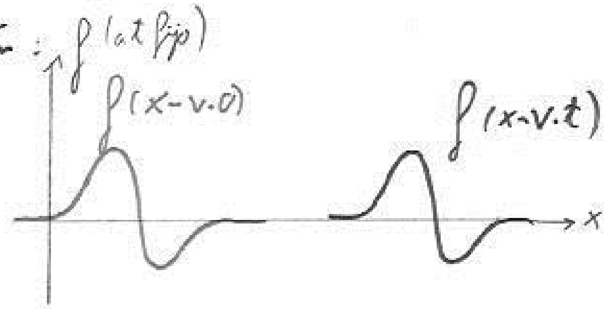
· Una ec para cada componente si la perturbación es vectorial

· A v se le denomina velocidad de fase

· Una forma de llegar a esta ecuación es llevar al continuo la ecuación del movimiento para la cuerda discreta.

· Sobre la visualización de $f(x-vt)$: (sin incluir $g(x+vt)$ la función resultante puede ser absolutamente complicada)

· Es evidente que es algo que viaja: según aumenta t, el argumento disminuye, lo que equivale a desplazar la función:



· – A t fijo, es representar $f(x)$ y trasladar el origen

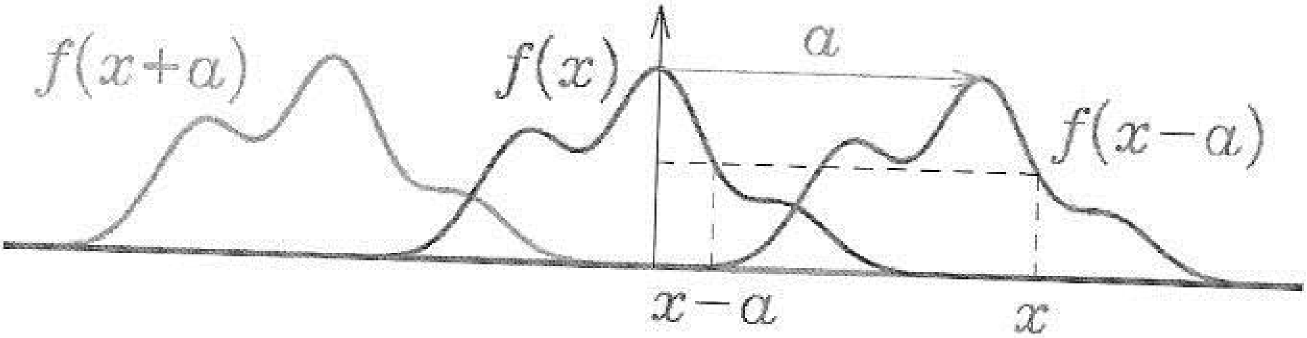
– A x fijo, es representar $f(-vt)$ y trasladar el origen

$\Downarrow$

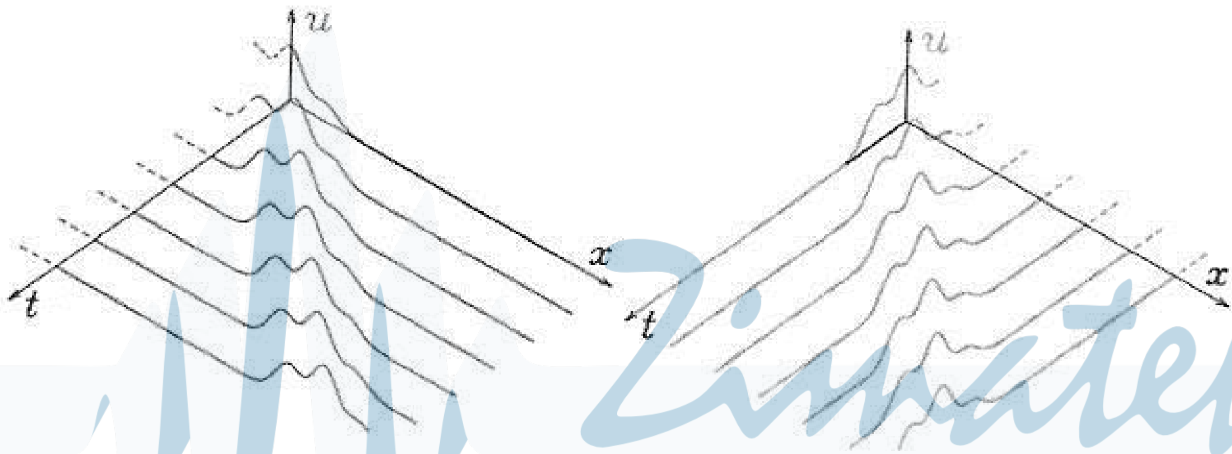
Una representación es: · Invertir la otra

· Escalar el eje de abscisas una cantidad v

· Si hace falta, trasladar el origen



$f(x+a)$
$f(x)$
a
$f(x-a)$
$x-a$
x



u
x
t
u
x
t

ONDAS ARMÓNICAS

$$\boxed{\psi(x,t) = A\cos(\omega t \overset{\text{Hacia la izda}}{\underset{\text{Hacia la dcha}}{\mp}} kx + \phi) = \mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t \mp kx + \phi)}\right]}$$

con $v = \dfrac{\omega}{k}$

Los puntos de un plano tienen igual fase
↓
En $\mathbb{R}^3$, las ondas planas se pueden escribir $\psi = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$, con $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$

· Son funciones con:

· Periodo temporal $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $\left(v = \dfrac{\overset{\text{Espacio}}{\lambda}}{\underset{\text{Tiempo}}{T}}\right)$

· Periodo espacial $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

· Para observar siempre la misma fase, debo moverme a velocidad v

· En general $v = v(k) \Leftrightarrow \omega = \overset{\text{No lineal}}{\omega(k)}$. En caso contrario, el medio se dice dispersivo.

· Si superpongo dos soluciones armónicas de frecuencia próxima obtengo batidos. Para observar siempre la misma modulación, debo moverme a velocidad $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$. En el límite, es lo que se denomina velocidad de grupo $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$. Es la velocidad a la que se transmite información.

· La utilidad de las ondas armónicas es que cualquier función, sea periódica $\left(\psi(x,t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n(\omega t \mp kx)}\right)$ o no $\left(\psi(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{i(kx - \overset{\omega(k)}{\omega} t)}\, dk\right)$ se puede poner como superposición de armónicas. Es cierto que, si el medio es dispersivo, cada armónica tendrá distinta velocidad y ψ se deformará.

SOBRE LA TDA. DE FOURIER

- Se puede trabajar en:

  - Dominio de números de onda: $$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{i(kx-\overset{\omega(k)\text{ en general}}{\omega t})}\, dk$$

  - Dominio de frecuencias: $$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\, e^{i(\overset{k(\omega)\text{ en general}}{kx}-\omega t)}\, d\omega$$

- Es especialmente útil para C.I.:

$$A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,0)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(0,t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

- Para $A(k)$ de anchura Δk y a 1^er^ orden:

$$\psi(x,t)=\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} A(k)\, \underbrace{e^{i[(k-k_0)(x-v_{g_0}t)]}}_{\text{Término que modula la amplitud y viaja a la velocidad de grupo}}\, \underbrace{e^{i(k_0 x-\omega_0 t)}}_{\text{Término viajero a velocidad de fase}}\, dk$$

- $\Delta x\, \Delta k = 2\pi$ (teor. del ancho de banda)

- Ojo que los pulsos armónicos finitos son superposición de infinitos armónicos (con un espectro más pequeño cuanto mayor sea el pulso)

Transformada de Fourier

$f(x)=f(x+\lambda)$ periódica $\quad k=\frac{2\pi}{\lambda}$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inkx} \quad ; \quad C_n=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\, e^{-inkx}\, dx$$

$$\int_0^{\lambda} dx\, e^{-ipkx} f(x) = \sum_{n=-\infty} C_n \underbrace{\int_0^{\lambda} dx\, e^{ikx(n-p)}}_{=\lambda\delta_{np}} = \lambda C_p$$

- Espectro de Fourier: conjunto de valores C_n

- Si f es real $C_{-n}=C_n^{*}$ $\Rightarrow$

$$f(x)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inkx}+C_{-n}e^{-inkx}$$

$$a_0=2C_0 \; ; \; a_n=C_n+C_{-n} \; ; \; b_n=i(C_n-C_{-n}) \quad n>0$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nkx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nkx$$

$$a_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos nkx\, dx \; ; \; b_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\operatorname{sen} nkx\, dx$$

Sea $f(x)$ no periódica. Construimos una función $f_\lambda = f$ en $\left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right]$ que sí lo es. $\Rightarrow$

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inkx}$$

$$C_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} dx\, e^{inkx} f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} dx\, e^{inkx} f(x)$$

$$k_n = nk \Rightarrow k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k_{n+1}-k_n}{2\pi} e^{ik_n x} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} du\, e^{-ik_n u} f(u)$$

- Ahora hacemos $\lambda \to \infty \Rightarrow k_{n+1} - k_n \to 0$ y la suma pasa a integral, $f_\lambda \to f$, k variable continua

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} F(k)$$

$f(x)$, $F(k)$ par de transformadas de Fourier.

$$F(k) = \mathcal{F}(f(x))$$

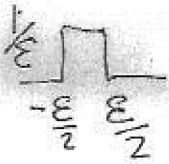
- Lo mismo se hace con las variables, t, ω.

$f(t)$ $\quad F(\omega)$

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)).$$

Ejemplos y propiedades

- DELTA DE DIRAC $\left[f(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) f(x)\, dx \right]$



$\delta \Longrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0}$

- $f(t) = \delta(t)$; $F(\omega) = \frac{1}{2\pi}$ $\left[\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \right]$
- $f(t) = \delta(t-t_0)$; $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t_0}$ $\left[\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \right]$
- $f(t) = e^{i\omega_0 t}$; $F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$
- $f(t) = \cos \omega_0 t$; $F(\omega) = \frac{1}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0) \right]$
- $f(t) = \operatorname{sen} \omega_0 t$; $F(\omega) = \frac{1}{2i}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0) \right]$

- Si $f(t)$ es real $\Longrightarrow F_r(k)$ es par, $F_i(k)$ impar
- Si además $f(t)$ es par $\Longrightarrow F(k)$ es real y par
  " " $f(t)$ es impar $\Longrightarrow F(k)$ es imag e impar

- $f(t) = A e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ Gaussiana

$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, a A e^{-\frac{a^2\omega^2}{2}}$

ancho relacionado con a: cuanto más ancha es $f(t)$, más estrecha es $F(\omega)$

ENERGÍA

· En una cuerda:

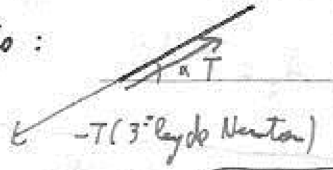
$$\boxed{\begin{aligned} dE_c &= \frac{1}{2}\mu\Big(\overbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}^{dm}\Big)^2 dx \\ dE_p &= \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \end{aligned}}$$

- Si la onda es <u>sinusoidal</u>:

$$\boxed{dE = \mu A^2 w^2 \cos^2(wt - kx)\, dx}$$

Así, $\dfrac{\langle dE \rangle}{dx} = \dfrac{1}{2}\mu A^2 w^2$

- Nótese que sobre el extremo se realiza un trabajo:



$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\text{movimiento vertical}}{=} \int F_y\, dy = \int -T \underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{\text{ss → ángulos pequeños}}\, dy = \boxed{\int -T \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=0} dt = W}$$

$$tg\,\alpha = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}$$

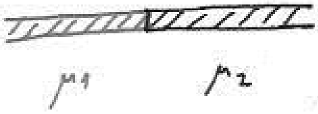
Y una potencia $P = \vec{F}\cdot\vec{v} = \dfrac{dW}{dt} = \boxed{-T\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}\left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=0} = P}$

· En medios tridimensionales:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\langle dE \rangle}{dV} &= \frac{1}{2}\rho A^2 w^2 \\ P = \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2}\rho A^2 w^2 \underbrace{v}_{\text{velocidad}} \cdot \overbrace{S}^{\text{superficie}} \\ I = \frac{dP}{dS} &= \frac{1}{2}\rho A^2 w^2 v \end{aligned}} \Rightarrow \text{Como } \underset{I\cdot 4\pi r^2}{\int I\, dS} \text{ es cte, } A \propto \frac{1}{r}$$

CAMBIOS DE MEDIO

· Sea una cuerda con densidad de masa variable:



· Si incide una onda de amplitud A_i, se reflejará una de amplitud A_r y se transmitirá una de amplitud A_t. Resulta:

$$A_r = \mathbb{R}\, A_i \qquad A_t = \mathbb{T}\, A_i \qquad \text{con} \qquad \underline{\mathbb{R} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}} \qquad \underline{\mathbb{T}} = \frac{2k_1}{k_1+k_2} = \underline{1+\mathbb{R}}$$

(porque $A_r + A_i = A_t$ por continuidad en el punto de unión)

$$\omega_1 = \omega_2$$

· Como ω es común y $\frac{\omega}{k_i} = \sqrt{\frac{T}{\mu_i}}$ ($= v_i$), resulta que $\mathbb{R} = \frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}$ $\Rightarrow$ Ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{T}$ depende de k

Así, en medios no dispersivos, la altura del pulso no varía y su anchura se multiplica por $\frac{v_2}{v_1}$ (pues $\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2}k_1} = \frac{v_2}{v_1}\lambda_1$). $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1}$

La del transmitido, el reflejado queda igual

· En lo que se refiere a la energía:

$$E_r = \mathbb{R}_E\, E_i \qquad E_t = \mathbb{T}_E\, E_i \qquad \text{con} \qquad \underline{\mathbb{R}_E} = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 = \underline{\mathbb{R}^2} \qquad \underline{\mathbb{T}_E} = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = \underline{1-\mathbb{R}_E}$$

(Así, $\mathbb{R}_E + \mathbb{T}_E = 1$ y la energía se conserva)

· Se suele definir la impedancia $\boxed{Z \equiv \frac{F_y}{v_y}}$. Para oscilaciones sinusoidales, $\boxed{Z = \frac{Tk}{\omega} = \frac{T}{v} = \sqrt{T\mu}}$ y todas las fórmulas son válidas con $\underline{k_i \to Z_i}$

ONDAS SONORAS

- Un gas cumple una serie de ecuaciones de estado:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= \rho_0\left(1-\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \\ P &= P_0 - \alpha\frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned}}$$

Con:

- ρ_0 la densidad en reposo
- P_0 la presión en reposo
- ξ el desplazamiento del equilibrio
- $\alpha \equiv -V_0 \left.\dfrac{dP}{dV}\right|_{P_0}$, el módulo elástico (a más α, menos compresible)

- Imponiendo la conservación de la masa se llega a que ξ, P y ρ cumplen una ecuación de onda de velocidad $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{\rho_0}{\alpha}}} \propto \sqrt{T}$

En gases, imponiendo proceso adiabático $\Rightarrow P = C\rho^\gamma$
gas ideal $\Rightarrow P \cdot V = NkT$

- En promedio, la densidad de energía vale $\dfrac{\langle \Delta E \rangle}{\Delta V} = \dfrac{1}{2}\rho_0 \omega^2 \xi_0^2$
por onda armónica

Amplitud en cambio de presión

la intensidad vale $I = \dfrac{1}{2} v \rho_0 \omega^2 \xi_0^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_0}{\rho_0 v}$

- La fisiología humana es logarítmica, así que se define la intensidad sonora $B = 10\log_{10}\dfrac{I}{I_0}$

intensidad mínima a la que oímos (depende de ν, $\approx 10^{-12}$ para $\nu = 400\,Hz$)