FENÓMENOS ONDULATORIOS

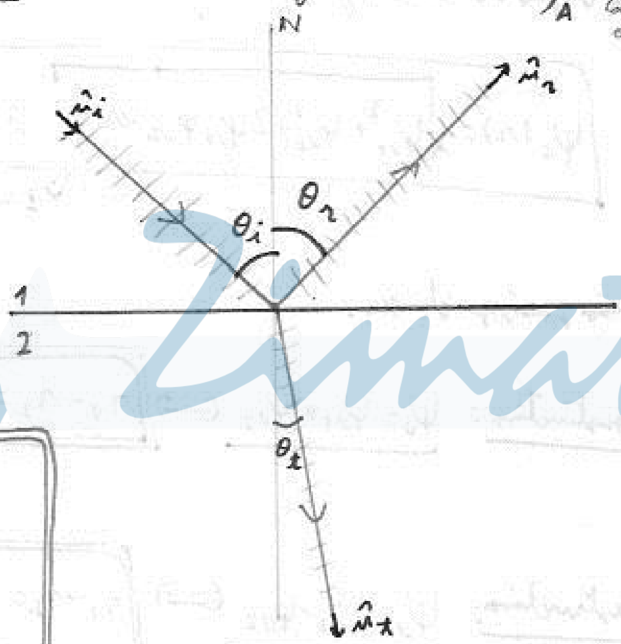
· Este tema se basa en una definición y dos principios:

Rayo: línea perpendicular a los frentes de onda. Muestra la dirección en la que se propaga la onda.

Principio de Huygens: en la propagación de una onda, todo punto es emisor de una nueva onda, cuyas superposiciones forman la onda total.

Principio de Fermat: el camino que recorre un rayo es tal que $\int_A^B \underbrace{n\, ds}_{\text{camino óptico}}$ es un extremal.

LEYES DE SNELL



· $\hat{u}_i, \hat{u}_t, \hat{u}_r$ y N son coplanarios

· $\theta_i = \theta_r$

· Si $n_i \equiv \frac{c}{v_i}$; $n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_t$

velocidad en un medio de referencia

velocidad en el medio i

· Si el medio es dispersivo, $n = n(\omega)$ y cada frecuencia se transmite con distinto ángulo

· Si $v_2 < v_1$, hay un desfase de π entre onda transmitida e incidente

· Si $n_2 > n_1$, se da un fenómeno curioso: $\theta_t \geq \frac{\pi}{2} \overset{\text{No hay transmisión}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{sen} \theta_i \geq \frac{n_2}{n_1}$

A partir del ángulo límite $\theta_l = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$, no hay transmisión.

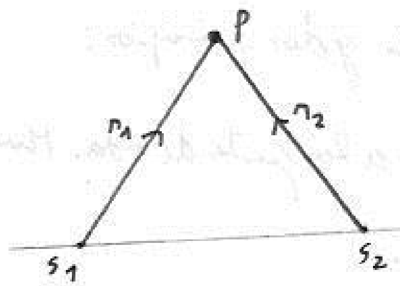
$\Updownarrow$

$\theta_i \geq \theta_l$

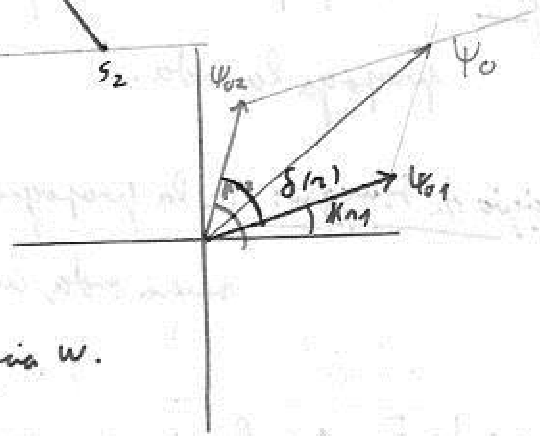
INTERFERENCIA

. Sean dos focos coherentes $\iff$ el desfase no depende de t: $\Psi_1 = \Psi_{01}\,\text{sen}(\omega t - kr_1)$

$\Psi_2 = \Psi_{02}\,\text{sen}(\omega t - kr_2)$



$\Psi_P = \Psi_1 + \Psi_1$. Gráficamente:



La oscilación resultante será armónica de frecuencia ω.

Su amplitud dependerá de P, y valdrá:

$$\boxed{\Psi_0(r) = \sqrt{\Psi_{01}^2 + \Psi_{02}^2 + 2\Psi_{01}\Psi_{02}\cos\delta} \quad ; \text{con } \delta = k(r_2 - r_1)}$$

Análog. $\Downarrow$ $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$

La interferencia, así, puede ser:

. Constructiva: $\Psi_0 = \Psi_{01} + \Psi_{02} \iff \underset{\delta = 2n\pi}{\boxed{r_1 - r_2 = n\lambda}}$ → HIPÉRBOLAS

. Destructiva: $\Psi_0 = \Psi_{01} - \Psi_{02} \iff \underset{\delta = (2n+1)\pi}{\boxed{r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}}}$ → HIPÉRBOLAS

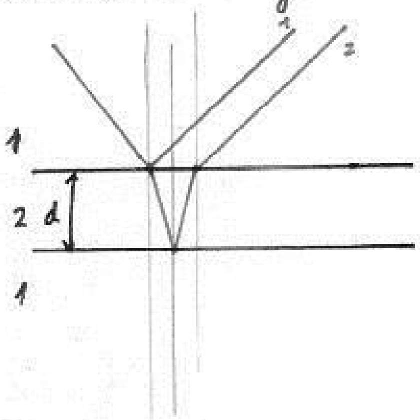
. Si los focos no son coherentes, $\delta = \delta(t)$ y, al promediar, $\Psi_0^2 = \Psi_{01}^2 + \Psi_{02}^2$

$\Downarrow$

$$\boxed{I = I_1 + I_2}$$

GAFAS ANTIRREFLECTANTES

· Consideremos una lente de grosor d sobre la que inciden rayos prácticamente verticales:



Los rayos 1 y 2 van a interferir. La diferencia de caminos es 2d, a lo que hay que añadir un desfase de π por la reflexión con un medio de menor velocidad. Así,

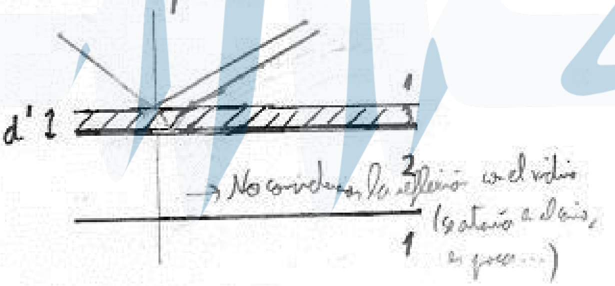
$$\delta = k\,\Delta r + \pi = 2d\cdot\frac{2\pi}{\lambda_2} + \pi$$

Interferencia constructiva: $\boxed{d = (2n+1)\frac{\lambda_2}{4}}$

$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n_2}$

Interferencia destructiva: $\boxed{d = 2n\frac{\lambda_2}{4}}$

· Como en la práctica d varía para cada lente, y determina su óptica, se suele añadir encima de la lente una película con índice de refracción n_3 tq $n_1 < n_3 < n_2$:



Ahora como ambas reflexiones se producen con un medio de menor velocidad, ambos rayos están desfasados en π ⇒ No hay desfase extra entre ellos.

Ahora la cosa es al revés:

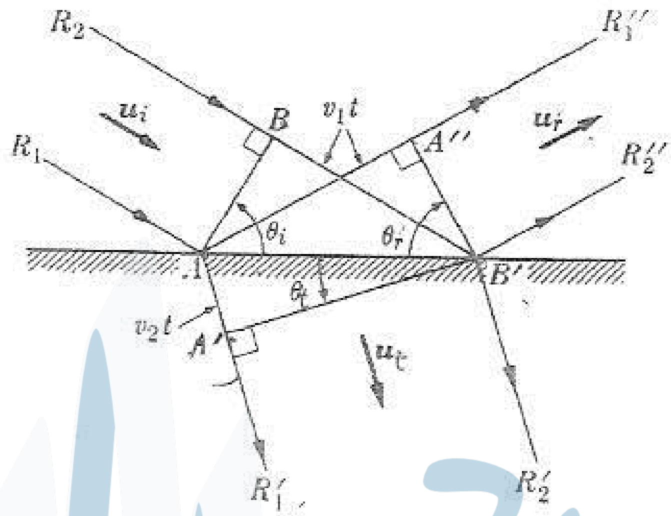
Constructiva: $\boxed{d' = 2n\frac{\lambda_3}{4}}$

$\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{n_3}$

Destructiva: $\boxed{d' = (2n+1)\frac{\lambda_3}{4}}$

LEYES DE SNELL

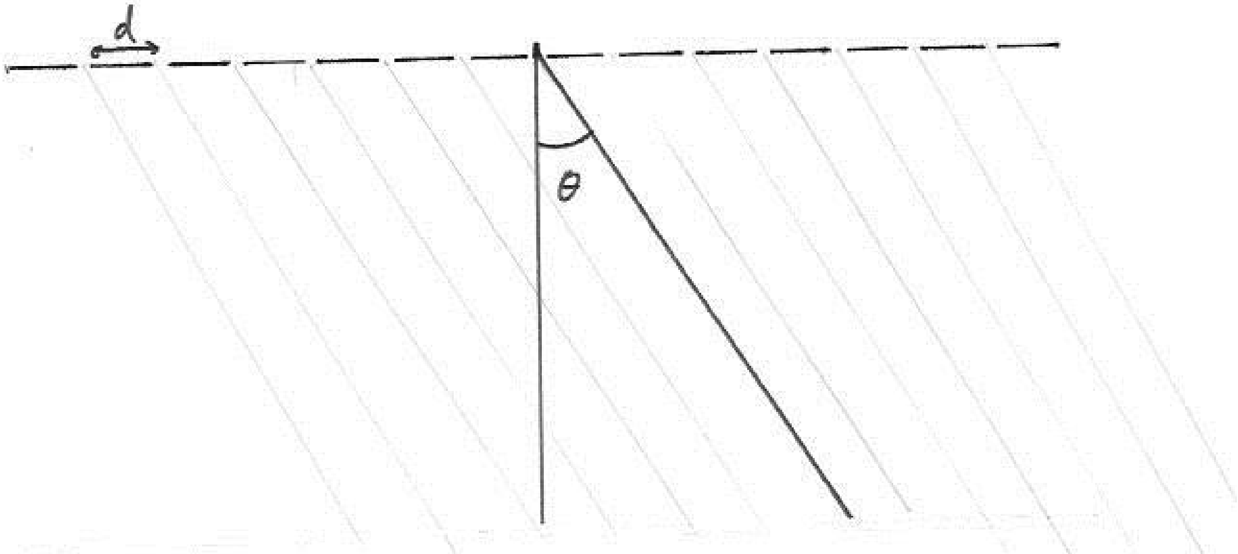
$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \theta_i = \theta_r$$



$$\operatorname{sen}\theta_i = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'} \qquad \operatorname{sen}\theta_t = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v_2 t}{AB'} \qquad \operatorname{sen}\theta_r = \frac{AA''}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'}$$

INTERFERENCIA DE N FOCOS COHERENTES

- Sean n focos coherentes puntuales equiespaciados una distancia d (por ejemplo, rendijas muy estrechas sobre las que incide una onda)



Me coloco a distancia lejana (para que todos los rayos lleguen paralelos).

En función del ángulo θ recibiré una intensidad u otra (habrá múltiples interferencias). Si I_1 es la intensidad de una única fuente:

$$\boxed{I(\theta) = I_1 \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} N \delta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \delta}\right]^2}, \quad \text{con } \underline{\delta = \frac{2\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}} \qquad I_1 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{N\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}}{\operatorname{sen} \frac{\pi d \operatorname{sen}\theta}{\lambda}}\right)^2$$

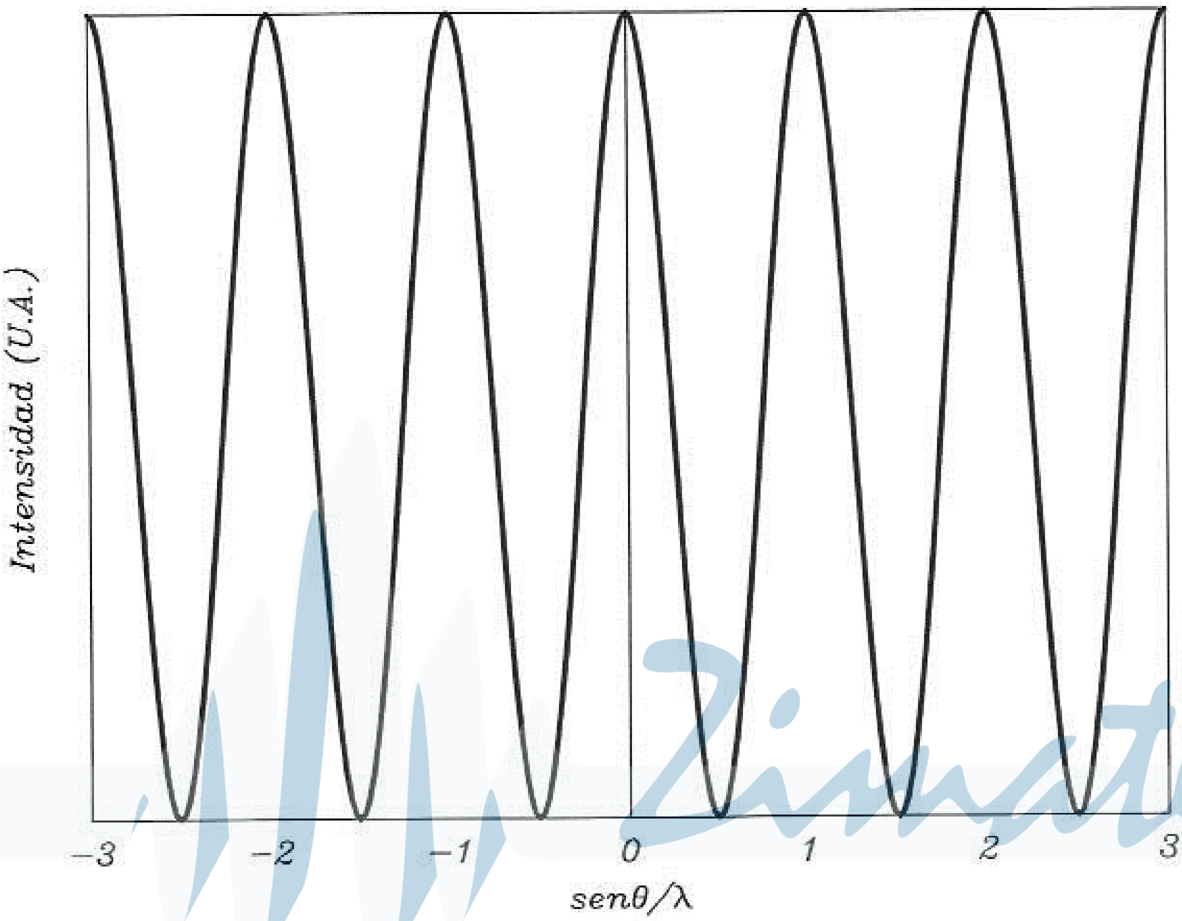
No estoy en la difracción

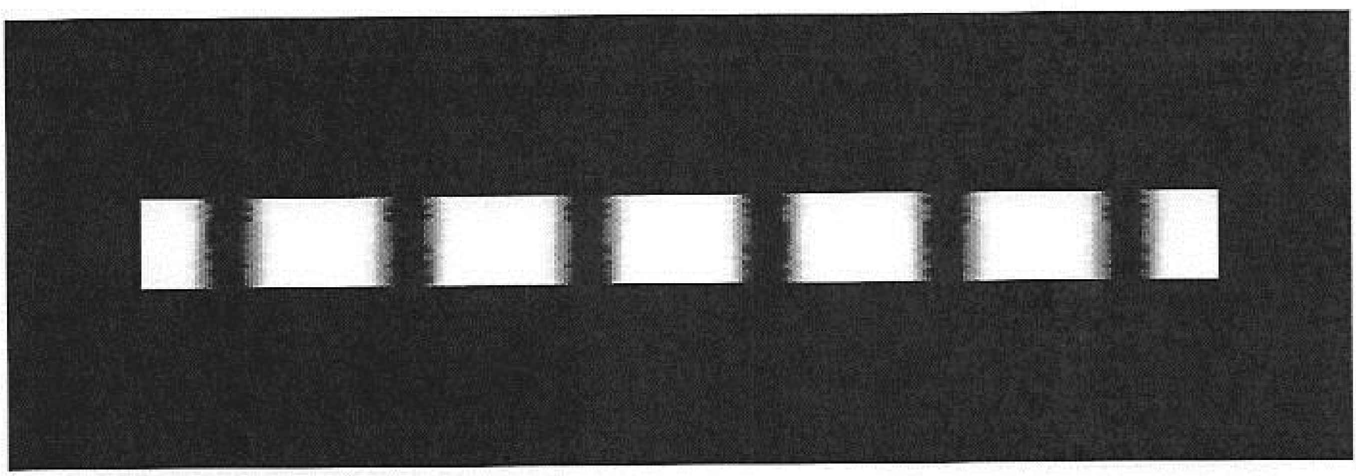
- El valor máximo de I es $I_1 N^2 \Leftrightarrow \boxed{d \operatorname{sen}\theta = n\lambda}$; $n \in \mathbb{Z}$ (Denominador 0)

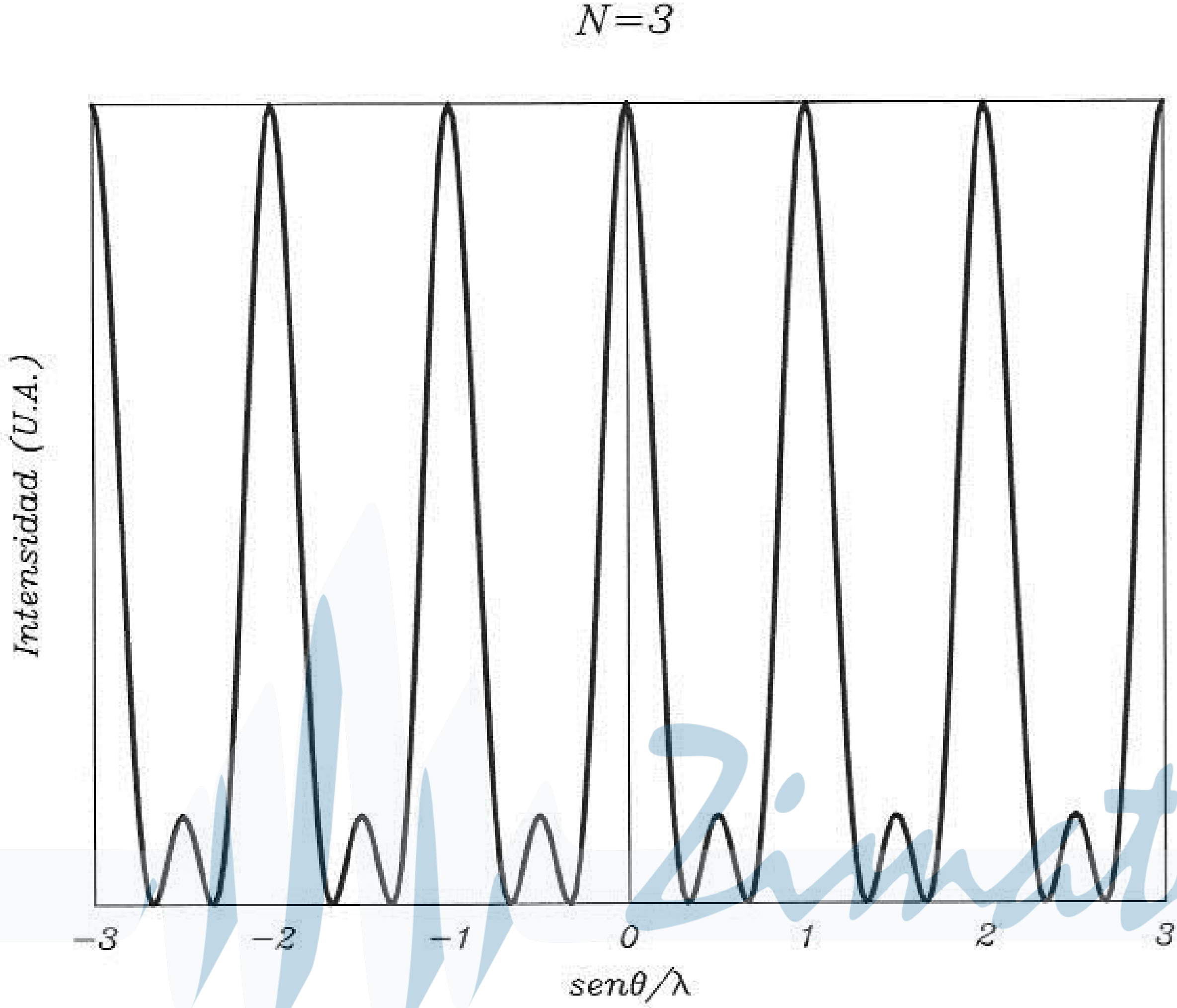
  El valor mínimo de I es $0 \Leftrightarrow \boxed{d \operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{N}}$; $m \in \mathbb{Z}$, $m \not\propto N$ (Numerador 0)

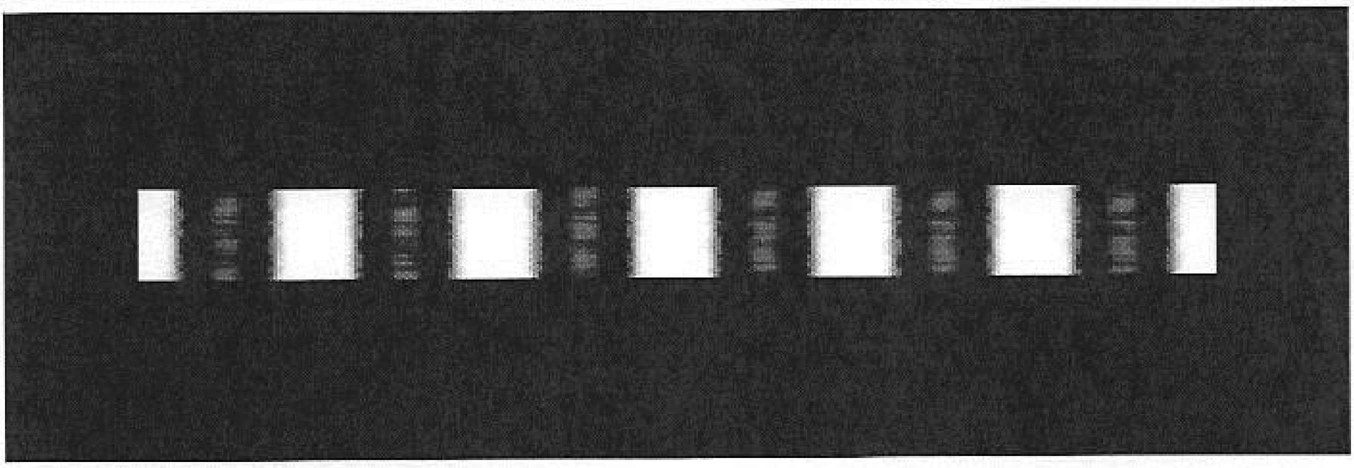
  - Entre dos máximos consecutivos hay N-1 mínimos
  - Al añadir fuentes (variando así d), algunos de los antiguos máximos globales pasan a estar entre mínimos consecutivos, formándose ahí máximos locales pequeños.
  - Como depende de λ, esto se separa la onda en sus componentes.
  - Cuanto mayor sea N, más agudos son los picos, y más direccional la emisión
  - Si $d \ggg \lambda$, $\frac{\lambda}{d} \lll$ y los máximos están muy juntos $\Rightarrow$ No se observa interferencia

$N=2$

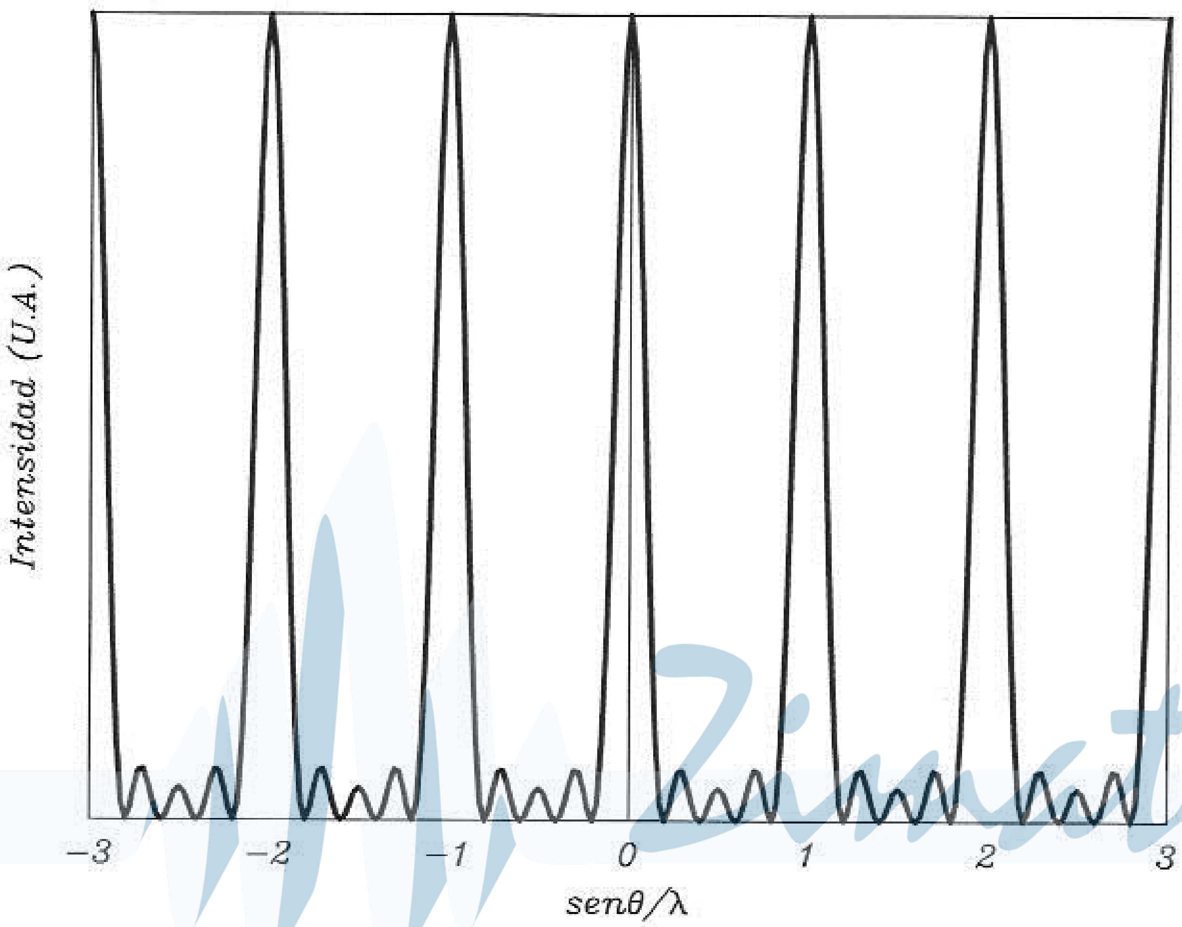


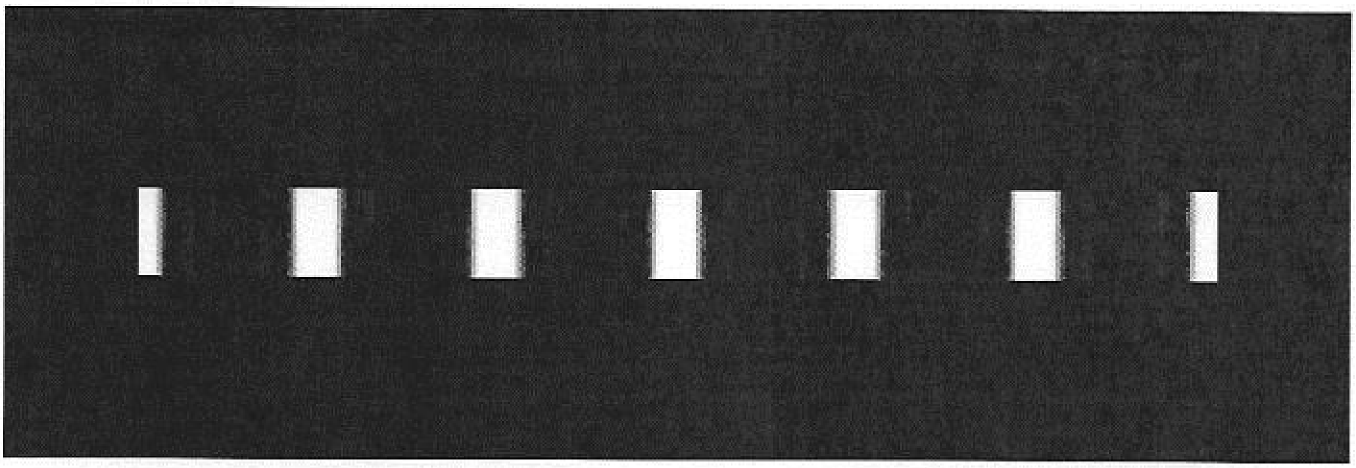



N=3
Intensidad (U.A.)
−3
−2
−1
0
1
2
3
senθ/λ

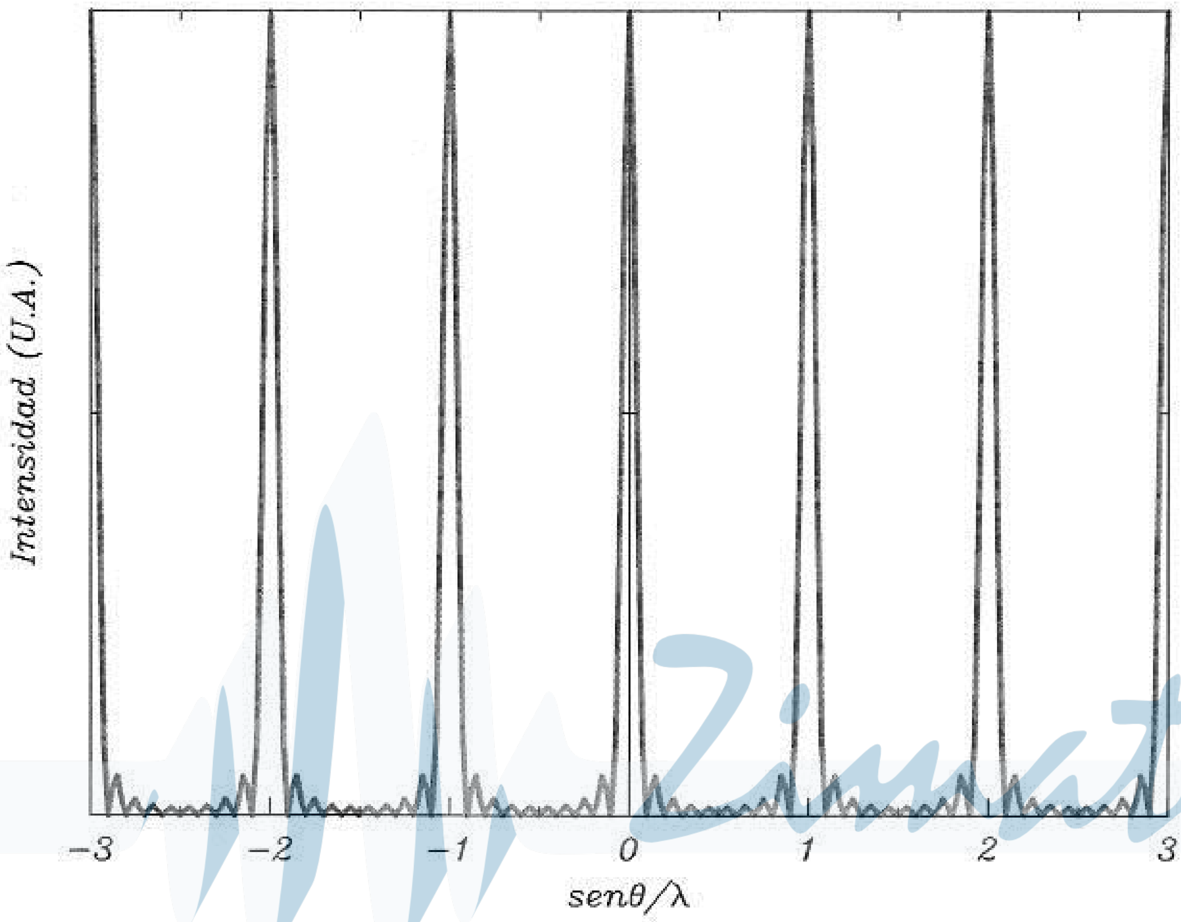


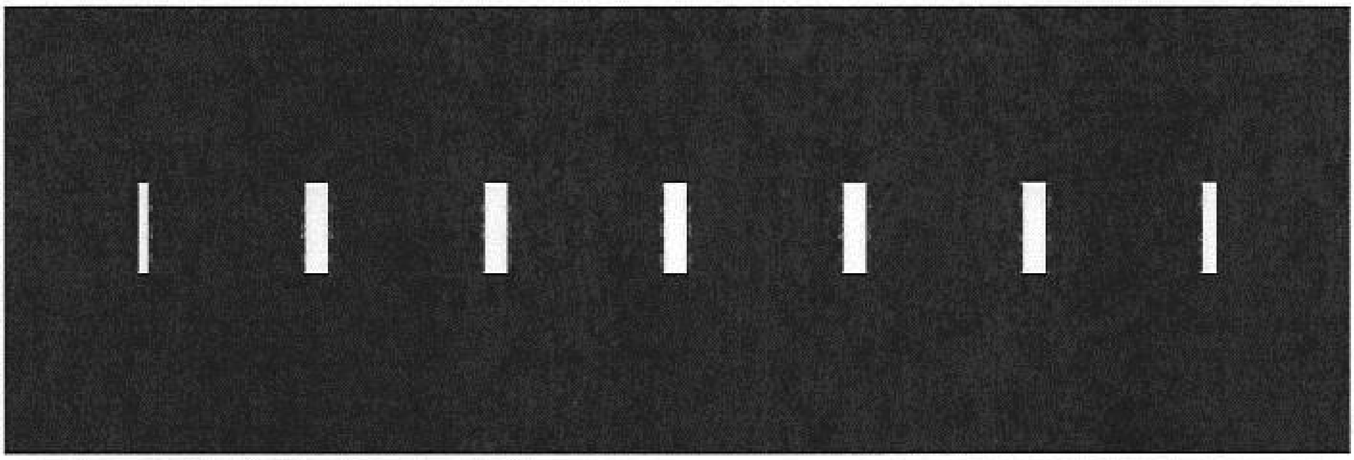
$N\!=\!5$





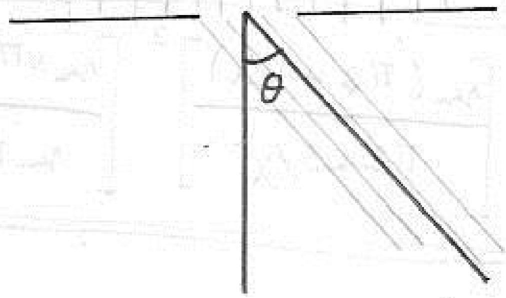
N=10





DIFRACCIÓN

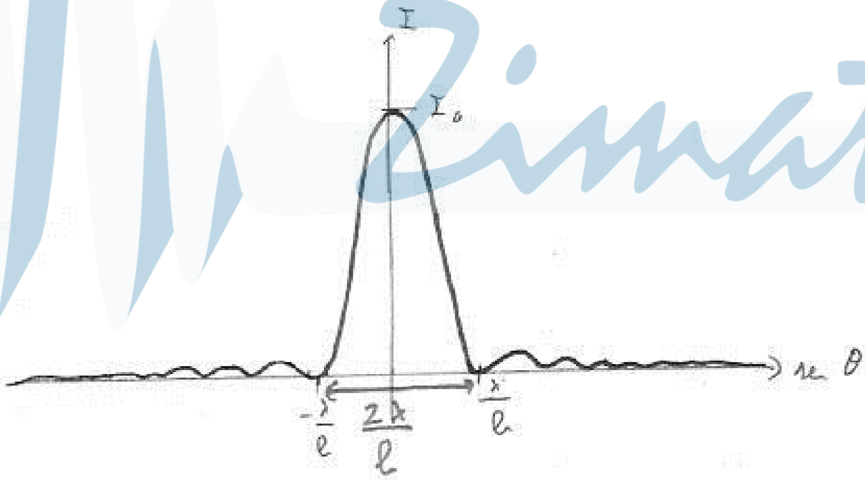
· Sea una rendija con un cierto tamaño al que llega una onda plana:



Me coloco a distancia lejana para que los rayos lleguen paralelos:

$$\boxed{I(\theta) = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\pi \frac{l}{\lambda} \operatorname{sen}\theta\right)}{\left(\pi \frac{l}{\lambda} \operatorname{sen}\theta\right)^2}}$$

Gráficamente:



· Máximo en $\theta = 0$

· Mínimos en (menos 0) $\frac{\pi}{\lambda} l \operatorname{sen}\theta = n\pi$

· Va a 0 bastante rápido en cuanto θ crece un poco

· Cuanto menor sea $\frac{\lambda}{l}$, más estrecho será el máximo y menos se verá la difracción (se verá todo concentrado)

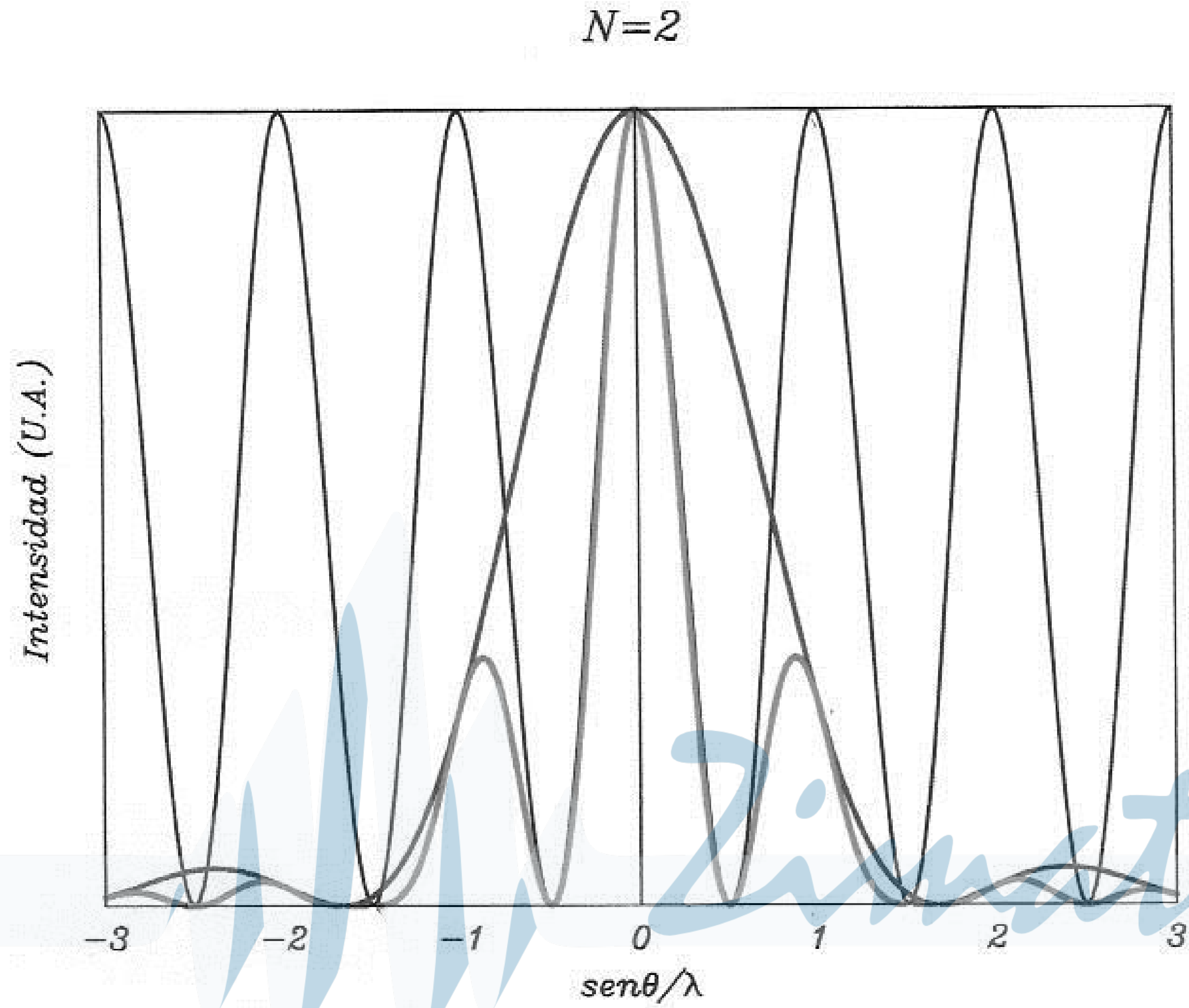
· Si yo pretendo distinguir dos rayos diferentes, necesitaré que sus patrones de difracción estén lejos ⇒

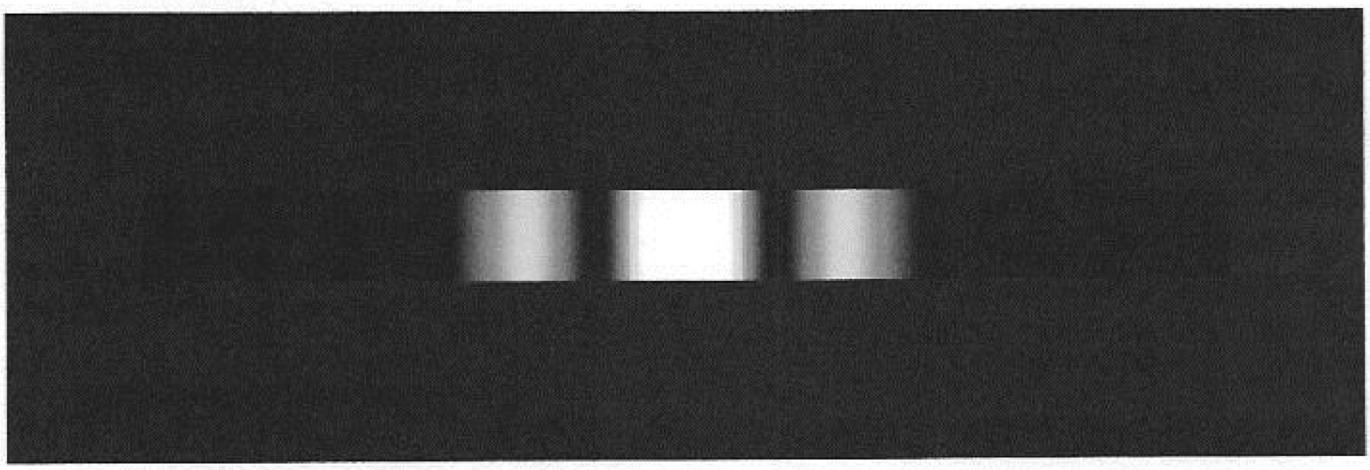
⇒ no se puede ver nada separado menos de una longitud de onda.

RENDIJAS CON GROSOR

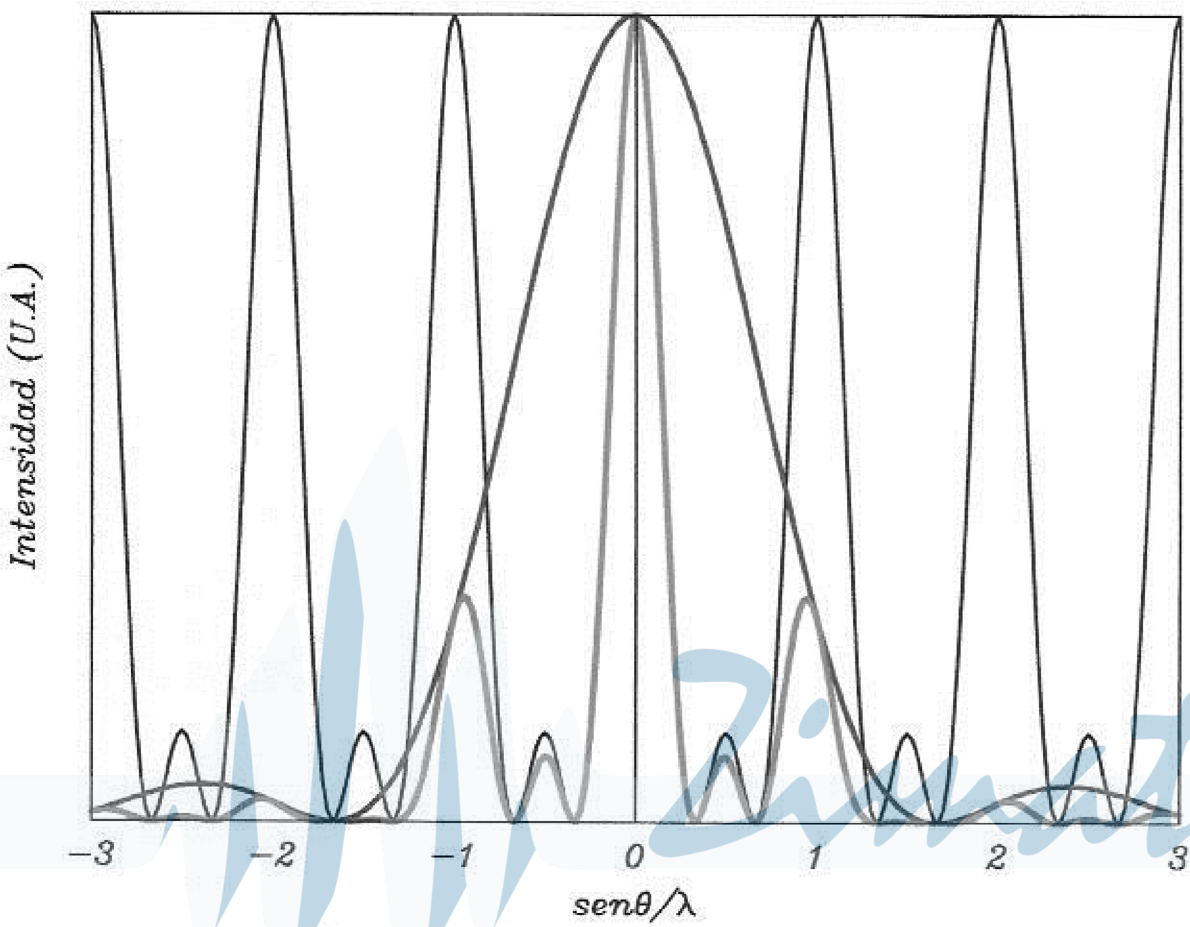
· Si vuelvo a repetir el experimento de N rendijas, pero ahora con un cierto grosor, el patrón de interferencia se verá modulado por el patrón de difracción:

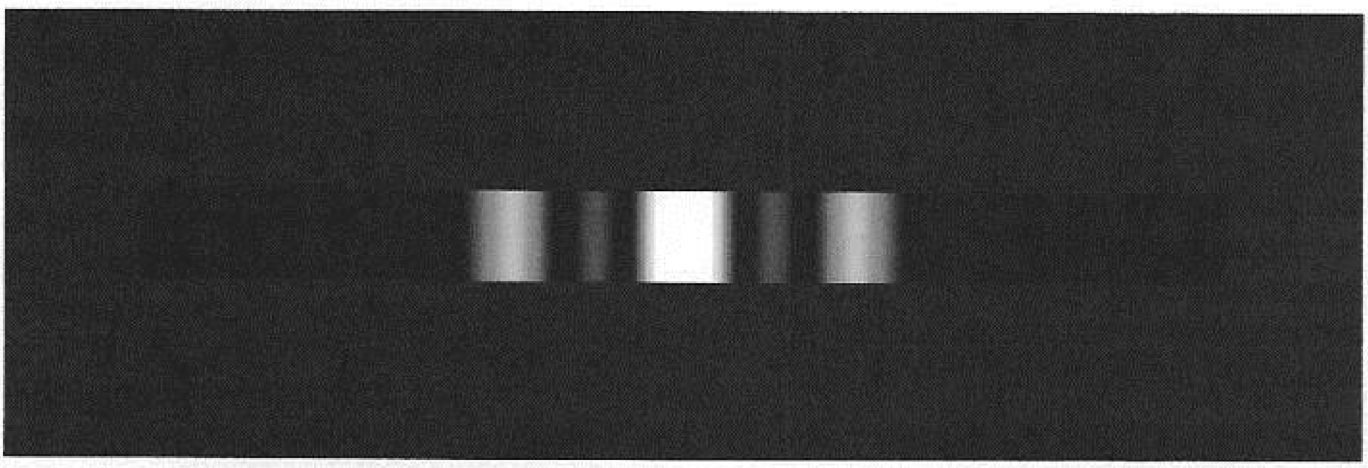
$$\boxed{I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi b \operatorname{sen}\theta/\lambda)}{\pi b \operatorname{sen}\theta/\lambda}\right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen} N\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda}{\operatorname{sen}\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda}\right]^2}$$

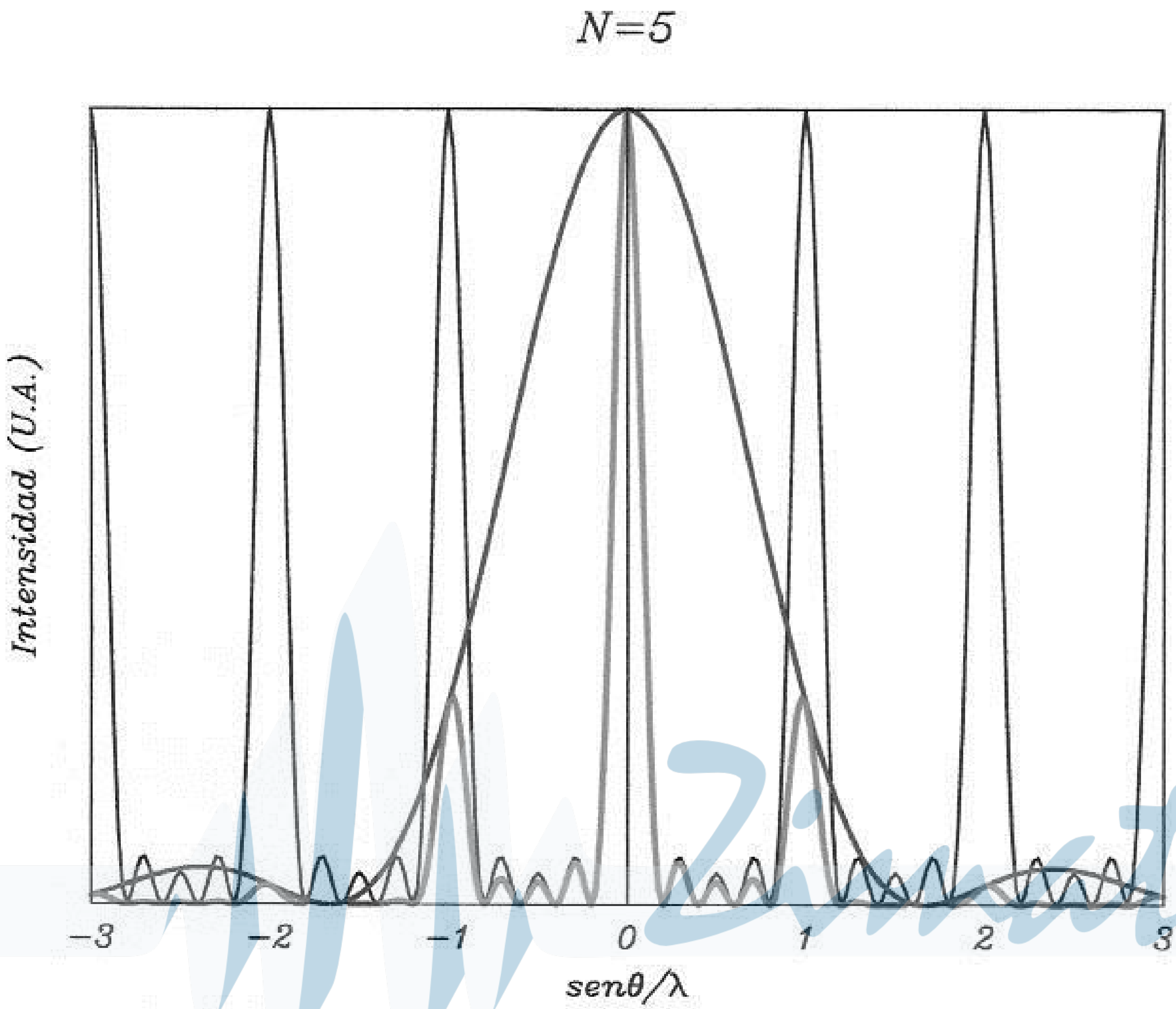

N=2
Intensidad (U.A.)
−3
−2
−1
0
1
2
3
senθ/λ

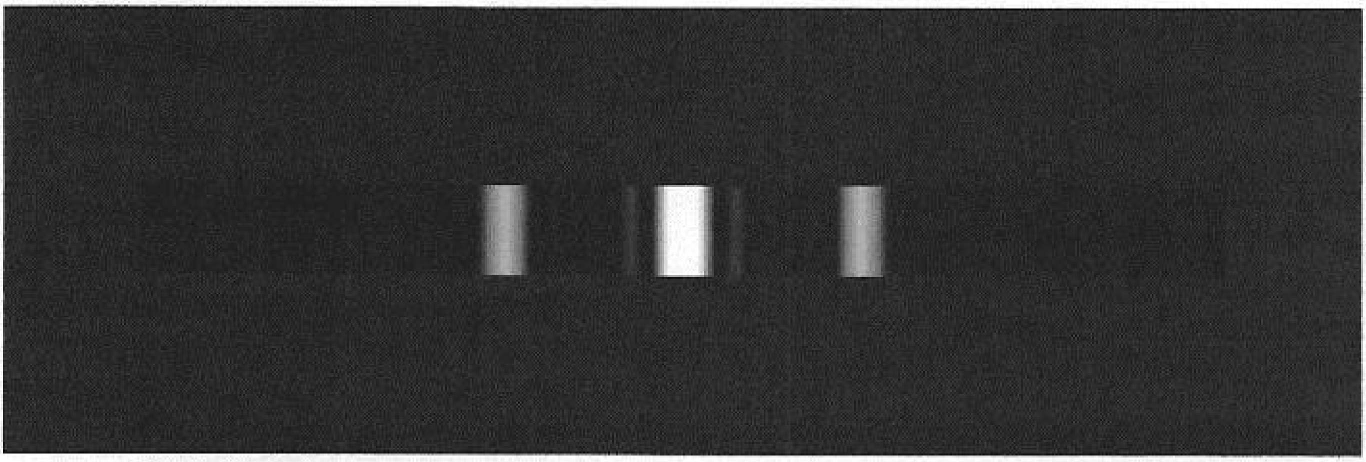


N=3



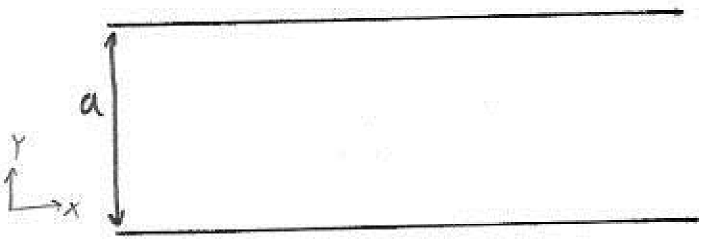



N=5
Intensidad (U.A.)
−3
−2
−1
0
1
2
3
senθ/λ



GUÍAS DE ONDA

· Sean dos placas reflectoras separadas por una distancia a:



Si introducimos una onda armónica, habrá reflexiones e interferencias. Como resultado:

$$\boxed{\psi(x,y,t) = -2\psi_0 \,\text{sen}\, k_2 y \, \cos(\omega t - k_1 x)} \; ; \; k_2 = \frac{n\pi}{a}$$

Siendo $(k_1,k_2)=\vec{k}$ el vector de onda inicial

· Es decir, una onda que viaja en la dirección x pero cuya amplitud se modula la altura.
Esas modulaciones, además, no son cualesquiera: tengo una especie de modos normales.

· Como $k=\sqrt{k_1^2+k_2^2} = \frac{\omega}{v}$, se tiene que:

$$\boxed{\begin{array}{l} v_f = \dfrac{k}{k_1} v > v \\[2ex] v_g = \dfrac{k_1}{k} v < v \end{array}} \qquad v_f v_g = v^2$$

Aun siendo vacío, funciona como un medio dispersivo (por el hecho de tener una modulación)

· Como $k_1 = \sqrt{k^2-k_2^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}} > 0$, hay una frecuencia de corte: $\boxed{\omega > \frac{n\pi v}{a}}$

EFECTO DOPPLER

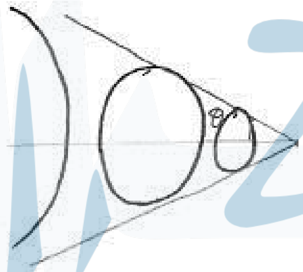
- En un S.R. en el que el medio está en reposo:

El observador mide $\boxed{f' = f\,\frac{v-v_o}{v-v_s} \approx f\left(1-\frac{v_{os}}{v}\right)}$ si $v_s \lll v$, $v_o \lll v$

- Si la fuente está a la dcha, los signos se invierten. Para recordarlo: se acercan $\Leftrightarrow$ f aumenta

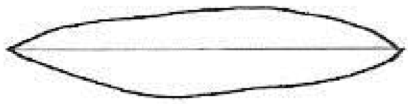
- Si las velocidades no son colineales, $\boxed{f' \approx f\left(1-\frac{v_{os}\cos\theta}{v}\right)}$

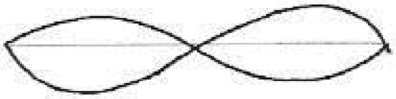
- Si $v_s > v$, las ondas dejadas forman un cono de apertura $\boxed{\sin\theta = \frac{v}{v_s}}$ $\frac{1}{\text{nº de mach}}$



ONDAS ESTACIONARIAS

· Cuando vibra la cuerda, vemos una serie de nodos de vibración:

1  $\lambda_1 = \frac{L}{2}$

2  $\lambda_2 = L$

3  $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$

· Esto se puede obtener como superposición de:

Incidente

· Onda que va a la derecha $\Rightarrow y_i = A_i \,\text{sen}\,(\omega t - Kx)$

· Onda que va a la izquierda $\Rightarrow y_r = A_r \,\text{sen}\,(\omega t + Kx)$

Reflejada

- Imponiendo:

$y(0,t)=0$

$y(L,t)=0$

$\Downarrow$

$K = \frac{n\pi}{L}$

$\Rightarrow A_r = -A_{i=\frac{A}{2}} \Rightarrow y(x,t) = \frac{A}{2}\left[\text{sen}\,(\omega t - Kx) - \text{sen}\,(\omega t + Kx)\right] =$

$= A\cos\frac{\omega t - Kx + \omega t + Kx}{2}\,\text{sen}\,\frac{\omega t - Kx - \omega t - Kx}{2} =$

$= -A\cos\omega t\;\text{sen}\,Kx$

$\Downarrow$

La expresión para un modo normal

- Si un extremo es libre, la cosa cambia. Para que la aceleración sea 0, la fuerza es 0, la curva ahí debe ser horizontal ($y_x(L,t)=0$) $\Rightarrow (\ldots) \Rightarrow \boxed{L = \frac{(2n+1)\lambda}{4}}$

Sea una onda electromagnética plana armónica linealmente polarizada $\Rightarrow \vec{S}$?

" " circularmente " $\Rightarrow \vec{S}$?

Se sabe:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{E} = w\vec{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \hat{u}_k \times \vec{H} \\ \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \hat{u}_k \times \vec{E} \end{array}$$

Caso linealmente polarizado:

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_0}_{cte}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \underbrace{\hat{u}_k \times \vec{E}}_{\text{Módulo: } \underset{1}{|\hat{u}_k|}\cdot|\vec{E}|\cdot \underset{1}{\operatorname{sen}\widehat{\hat{u}_k,\vec{E}}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)}\, \hat{v}$$

Sea $\hat{v} = \hat{u}_{\vec{k}\times\vec{E}}$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E \cdot H \cdot \underset{\vec{E}\perp\vec{H}}{1} \cdot \hat{u}_k = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0^2$$

Caso circularmente polarizado: $\nearrow$ Un desfase entre las componentes x e y

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{\imath} + i E_{0y}\hat{\jmath} \quad (\text{con } E_{0x} = E_{0y})$$
$$= E_{0x}\hat{\imath} + E_{0y} e^{i\pi/2}\hat{\jmath}$$

$$\vec{E} = e^{i(kz - wt)}\vec{E}_0 = e^{ikz}\left(E_{0x} e^{iwt}\hat{\imath} + E_{0y} e^{i(wt + \frac{\pi}{2})}\right)$$

$\Downarrow$ Desfase $\pi/2 \Rightarrow$ circularmente polarizado!!!

(...)

Linealmente polarizado $\Rightarrow$ Depende de t

Circularmente " $\Rightarrow$ No depende de t (lógico pues los campos no oscilan en amplitud)