Mecánica y Ondas

Jorge Rodríguez San José

• El problema de 2 cuerpos y su momento lineal

Supongamos 2 cuerpos en un sistema de referencia $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ y masas m_1 y m_2.
Si sufren fuerzas centrales cada uno debido al otro, podemos escribir:

$$\begin{cases} \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}_1 \\ -\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}_2 \end{cases}$$

Posición respecto al centro de masas

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Posición relativa de m_1 y m_2: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Si sumamos las ecuaciones:

$$0 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2$$

o lo que es lo mismo $\boxed{0 = M\ddot{\vec{R}}}$ $\quad M = m_1 + m_2$

Si las restamos:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 - m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 2\vec{F} \qquad [1]$$

Usando la relación:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{\mu}\vec{r}$$
$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Tenemos que $\boxed{\vec{F} = \mu\ddot{\vec{r}}}$

Deducimos que:

- El momento lineal del conjunto es constante, pues si

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 \implies M\dot{\vec{R}} = cte$$

- El problema de dos cuerpos queda reducido al de un cuerpo de masa reducida $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

• Respecto del momento angular de un sistema de 2 cuerpos

Tenemos que:

$$\vec{J} = \vec{r}_1 \wedge m_1\dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2\dot{\vec{r}}_2$$

Pero teniendo en cuenta que:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \quad y \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

$$\vec{J} = \left(\vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}\right) \wedge m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right) + \left(\vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}\right) \wedge m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)$$

Quedándonos:

$$\boxed{\vec{J} = M\dot{\vec{R}} \wedge R + \mu\dot{\vec{r}} \wedge r} \qquad [2]$$

- Respecto a la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}$$ Aplicándole los mismos cambios $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2} \quad [3]$$

- Referidas las expresiones al Centro de Masas.

Si las expresiones anteriores las tenemos en el centro de masas como sistema de referencia, es evidente que $\vec{R}^* = 0$ y por tanto

$$\vec{r}_1^{\,*} = \frac{m_2}{M} \vec{r} \qquad \vec{r}_2^{\,*} = -\frac{m_1}{M} \vec{r}$$

Tenemos en consecuencia que:

$$\left.\begin{aligned} &a)\quad \vec{p}^{\,*} = m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,*} = -m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,*} = \mu \dot{\vec{r}} \\ &b)\quad \vec{J}^{\,*} = \mu \dot{\vec{r}} \wedge \vec{r} = \vec{r} \wedge \vec{p}^{\,*} \\ &c)\quad T^* = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 = \frac{p^{*2}}{2\mu} \end{aligned}\right\} [4]$$

Y referido a un sistema de referencia cualquiera:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{P} = M \dot{\vec{R}} \\ &\vec{J} = M \dot{\vec{R}} \wedge \vec{R} + \vec{J}^{\,*} \\ &T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T^* \end{aligned}\right\} [5]$$

- Leyes de conservación y ecuación del movimiento

Un campo de fuerzas centrales es siempre conservativo pues $\exists\, V(r)$ en la que la relación con su potencial viene dado por:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{dV}{dr} \hat{r}$$

Por lo tanto la energía mecánica siempre se conserva y es:

$$\boxed{E = T + V(r) = cte} \quad [6]$$

Que en un sistema centrado en el c.m se puede escribir como:

$$\boxed{\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) = E} \quad [7]$$

Es inmediato ver que el momento total de cualquier fuerza central es 0, por:

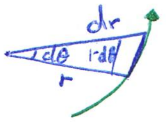
$\vec{M} = r \wedge \vec{F}$ pero como $\vec{r} \parallel \vec{F}$ $\quad \sin 0 + k\pi = 0$

Pero además, como $\vec{M} = \dfrac{d\vec{J}}{dt} \Rightarrow \vec{J} = cte$ y $\vec{J}^* = cte$

Como el vector $\vec{J}$ es perpendicular a $\vec{r}$ y $\vec{v}$ y es constante, el movimiento tiene lugar en un plano.

Por ello, es más sencilla la descomposición usando coordenadas planas bidimensionales y dependiendo solo de r y θ.

- Expresión de las magnitudes en coordenadas polares



la velocidad se puede descomponer:

$$v \equiv \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

La magnitud del momento angular es:

$$J = |\vec{r} \wedge \vec{p}| = |\vec{r} \wedge \mu \dot{\vec{r}}| = \mu r^2 \dot{\theta}$$

$$\boxed{J = \mu r^2 \dot{\theta}} \quad [8] \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{J}{\mu r^2}$$

Y se cumple la 2ª ley de Kepler, pues el area barrida por el vector $\vec{r}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{2\mu} = cte$$

Por otro lado retomando la expresión de la energía

$$E = T + V(r) = \frac{1}{2}\mu \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

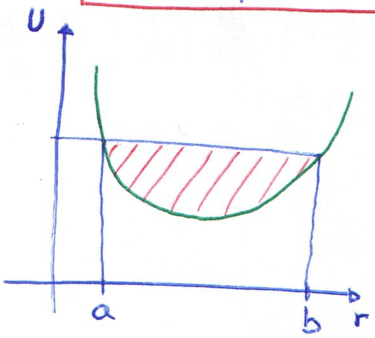
Como $\dot{\theta} = \dfrac{J}{\mu r^2}$ se queda como:

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{J}{\mu r^2}\right)^2\right) + V(r) \quad \text{y operando:}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r)} \quad [9]$$

La segunda parte de la expresión contiene el término de la velocidad radial ($\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$) y otro término que se suele llamar potencial efectivo:

$$\boxed{U(r) = \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r)} \quad [10]$$



$E = U \Leftrightarrow \dot{r} = 0$, lo que corresponde con los puntos a y b.
El movimiento tendrá lugar en valores de r que cumplan la condición $b \leq r \leq a$. Si la energía del sistema es igual a la del mínimo del potencial efectivo, entonces $r = cte$ y por tanto el movimiento es circular.

- Solucionando la ecuación del movimiento

De la expresión [9] de la energía, despejamos $\dot{r}$ tq:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{J^2}{2\mu r^2}\right)}$$

Integrando obtendríamos $r(t)$, pero nos interesa más la trayectoria del cuerpo, $r(\theta)$. Para ello usaremos la siguiente relación:

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}\,dr \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$$

También tenemos que $J = \mu r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{J}{\mu r^2}$

Aplicando los cambios en la ecuación anterior:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{J^2}{2\mu r^2}\right)} \Rightarrow \frac{J}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{J^2}{2\mu r^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{(J/r^2)\,dr}{\sqrt{2/\mu\left(E - V(r) - \frac{J^2}{2\mu r^2}\right)}}$$ integramos:

$$\theta(r) = \int \frac{(J/r^2)\,dr}{\sqrt{2/\mu\left(E - V(r) - \frac{J^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

Aumenta monótonamente con el tiempo y en general es difícil de solucionar.

Pero existe solución que puede expresarse en términos de integrales elípticas cuando $F(r) \propto r^n$ con $n = 1, -2, -3$

Si $n = 1$ tenemos el oscilador armónico.

$n = -2$ tenemos las interacciones gravitatoria y eléctrica.

A partir de la ecuación de la energía [9] podemos derivar hasta la ecuación de Binet, que nos dará la expresión más apropiada para solucionar la ecuación de la trayectoria.

Tenemos que: $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r)$, derivando respecto al tiempo $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \mu\dot{r}\ddot{r} - \frac{J^2\cancel{\dot{r}}}{2\mu r^3} - F(r)\cdot\cancel{\dot{r}} \Rightarrow F(r) = \mu\ddot{r} - \frac{J^2}{\mu r^3}$$

Tomando $u = \frac{1}{r}$ como cambio de variable y recordando que $\dot{\theta} = \frac{J}{\mu r^2}$, obtenemos

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{J^2}\frac{1}{u^2}F(u)} \quad [11]$$

Ecuación de "Binet"

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dt}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\dfrac{\mu}{J}\dot{r} \\[2ex] \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = \dfrac{d}{d\theta}\left(-\dfrac{\mu}{J}\dot{r}\right) = \dfrac{dt}{d\theta}\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{\mu}{J}\dot{r}\right) = -\dfrac{\mu}{J\dot{\theta}}\ddot{r} = \\[2ex] = -\dfrac{\mu^2}{J^2}r^2\ddot{r} \end{cases}$$

Problema de las órbitas newtonianas

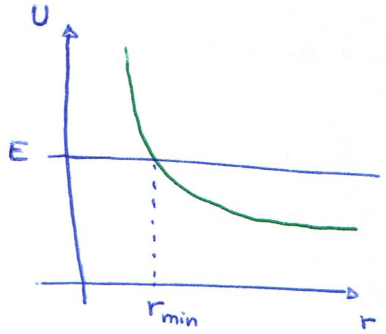
Vamos a considerar fuerzas del tipo $F(r) = -\frac{K}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{K}{r}$

Consideramos 2 casos:

- Caso repulsivo $K<0$ (Ej. interacción eléctrica $K = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}$)
- Caso atractivo $K>0$ (Ej. interacción gravitatoria $K = Gm_1m_2$)

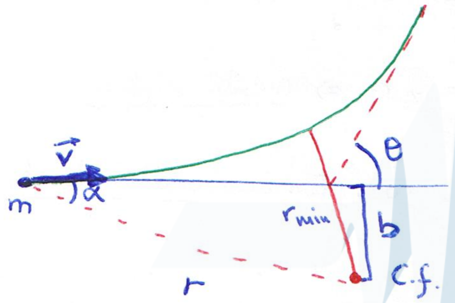
Fuerzas repulsivas

$K<0$



El potencial U decrece monotonamente desde $u=0$ si $r=\infty$ y $u=\infty$ si $r=0$.
No se presenta un mínimo $\Rightarrow$ No puede haber orbitas circulares. Todas las órbitas posibles son abiertas.

Nos interesa calcular cuál es la distancia mínima (r_{min}) que tendrá la partícula con el centro de fuerzas antes de alejarse.



Supongamos que una partícula se acerca desde ∞ a lo largo de una recta que si la prolongamos hasta el centro de fuerzas pasa a una distancia b de éste.

b ≡ parámetro de impacto.

A esa distancia $V(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ por lo que podemos decir que $E = \frac{1}{2}\mu v^2$

Y el momento angular: $J = \mu r \sin\alpha\, v$ como $r\sin\alpha = b \Rightarrow J = \mu b v$

Recordamos que el radio mínimo se da cuando $U = E$ por tanto cuando $\dot{r} = 0$
Así que de la ecuación general de la energía, teniendo en cuenta el potencial que les ocupa $\left(V = -\frac{K}{r}\right)$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}$$

Como estamos a gran distancia la energía total es la cinética puesto que la potencial es despreciable

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad y \quad \dot{r}^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{J^2}{2\mu r_{min}^2} - \frac{K}{r_{min}} \qquad y \qquad J = \mu b v$$

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{\mu^2 b^2 v^2}{2\mu r_{min}^2} - \frac{K}{r_{min}} \longrightarrow r_{min}^2 - 2a r_{min} - b^2 = 0$$

$$\boxed{r_{min} = a + \sqrt{a^2+b^2}} \; [12] \qquad \text{con} \quad a = \frac{-K}{\mu v^2}$$

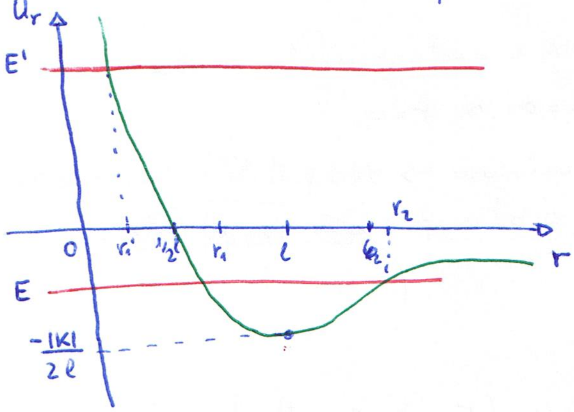
Fuerzas atractivas ($K>0$)

Definimos la cantidad $l = \frac{J^2}{\mu K}$. En la ecuación para el potencial efectivo:

$$U(r) = \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} \qquad \text{sustituyendo } J^2 = l\mu K$$

$$U(r) = \frac{l\mu K}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} = \frac{lK}{2r^2} - \frac{K}{r} = \boxed{K\left(\frac{l}{2r^2} - \frac{1}{r}\right) = U(r)}$$

Nos da una curva del tipo



Que tiene un mínimo en $r = l$

a) La energía es mínima $E = \frac{-K}{2l}$ y el radio es constante ($r = l$). Por tanto es una órbita circular

b) $E \in (-K/_{2l}, 0)$. El movimiento está acotado entre r_1 y r_2 $\Rightarrow$ Órbita elíptica

c) Si la distancia mínima ($E=0$) es $l/_2$, la máxima es ∞. Es una órbita abierta, en este caso es parabólica.

d) $E>0$, si la distancia mínima es $r = r_1'$. La órbita es abierta. Es una órbita hiperbólica.

Se pueden deducir las órbitas matemáticamente mediante la ecuación de Binet.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\mu}{J^2}\frac{F(u)}{u^2}$$

Como se trata de una fuerza newtoniana $F = -\frac{K}{r^2}$. Pero con $u = \frac{1}{r} \Rightarrow u^2 = \frac{1}{r^2}$ así que $F(u) = -Ku^2$. Entonces nos queda:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\mu}{J^2} \cdot \frac{-Ku^2}{u^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu K}{J^2}}$$

Y como $l = \frac{J^2}{\mu K}$ se bien que $\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{l}}$

La solución de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$u = \frac{\varepsilon}{l}\cos\theta + \frac{1}{l}$$

Zinatek

- Significado de ε

Recordamos que $E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}$ y $J = \mu r^2 \dot{\theta}$

Transformamos:

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr/dt}{d\theta/dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \Rightarrow \dot{r} = -\dot{\theta} r^2 \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{J}{\mu r^2} r^2 \frac{du}{d\theta} =$$

- $\dot{r} = \frac{-J}{\mu}\frac{du}{d\theta}$

Sustituyendo en la energía

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{-J}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r}$$

$$E = \frac{J^2}{2\mu}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{J^2}{2\mu}u^2 - Ku$$

Si llevamos la solución de Binet a esta ecuación $\left(u = \frac{\varepsilon}{\ell}\cos\theta + \frac{1}{\ell}\right)$

$$E = \frac{J^2}{2\mu}\left(\frac{\varepsilon}{\ell}\sin\theta\right)^2 + \frac{J^2}{2\mu\ell^2}(\varepsilon\cos\theta + 1)^2 - \frac{K}{\ell}(\varepsilon\cos\theta + 1)$$

Si llegamos hasta el final de la operación:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2E\ell}{K} + 1} = \sqrt{\frac{2EJ^2}{\mu K^2} + 1}$$

Tenemos así el siguiente esquema:

Potencial atractivo $(K>0)$

- Si $r = \ell \longrightarrow E = \frac{-K}{2\ell} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{\frac{-2K\ell}{2K\ell} + 1} = 0$ (Circular)
- Si $E \in \left(\frac{-K}{2\ell}, 0\right) \longrightarrow 0 < \varepsilon < 1$ (Elíptica)
- Si $E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$ (Parabólica)
- Si $E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$ (Hiperbólica)

Potencial repulsivo $(K<0)$ $\longrightarrow$ $\varepsilon > 1$ pues $\varepsilon = \sqrt{\frac{2EJ^2}{\mu K^2} + 1}$ y $\frac{2EJ^2}{\mu K^2} > 0$

(Hipérbola)

- **Estudio particular de órbitas elípticas**

Recordamos que se daba trayectoria elíptica cuando $E<0$ y $0<\varepsilon<1$.

La ecuación en coordenadas polares es:

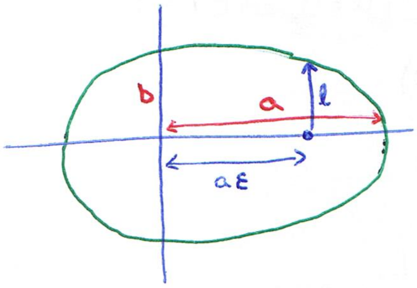
$$\boxed{\frac{l}{r} = \varepsilon\cos\theta + 1}$$

y la ecuación en cartesianas:

$$\frac{(x+a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a = \frac{l}{1-\varepsilon^2} = \frac{-K}{2E} \qquad b^2 = al = \frac{-J^2}{2\mu E}$$

$E = \frac{-K}{2a}$, la <u>energía total sólo depende del semieje mayor de la órbita</u>

Supongamos una elipse desplazada $-a\varepsilon$



Por la segunda ley de Kepler, sabemos que se barren areas iguales en tiempos iguales.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{J}{2\mu} \implies dA = \frac{J}{2\mu}dt$$

con toda la órbita $\begin{cases} dA = \pi ab \\ dt = \tau \end{cases}$

$$\pi ab = \frac{J}{2\mu}\tau \implies \tau = \frac{2\mu\pi ab}{J} \implies \tau^2 = \frac{(2\pi)^2 a^2 b^2 \mu^2}{J^2} \qquad \text{si } b^2 = \frac{aJ^2}{\mu K}$$

$$\tau^2 = \frac{(2\pi)^2 a^2 a \cancel{J^2} \mu^{\cancel{2}}}{\cancel{\mu} K \cancel{J^2}} \implies \boxed{\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu}{K}a^3}$$

Si consideramos $K = GMm$ y teniendo en cuenta que $\mu = \frac{Mm}{M+m}$, llegamos a que $\boxed{\tau^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3}$ que es la 3ª ley de Kepler

- **Estudio particular de órbitas hiperbólicas**

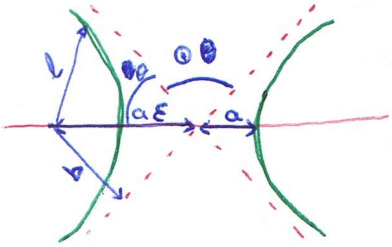
Recordamos que en una órbita hyperbólica $E>0$ y $\varepsilon>1$, la ecuación en coordenadas polares, sigue siendo:

$$\frac{l}{r} = \varepsilon\cos\theta + 1$$

Y en cartesianas:

$$\frac{(x-a\varepsilon)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde } a = \frac{l}{\varepsilon^2-1} = \frac{K}{2E} \qquad b^2 = \frac{J^2}{2\mu E}$$

La órbita para el caso repulsivo es igual pero $a = -\frac{K}{2E}$



Si tomamos $b^2 = \frac{J^2}{2\mu E}$ y teniendo en cuenta que, en ∞ $V(r) \to 0$.

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad \text{y} \quad b^2 = \frac{J^2}{2\mu\frac{1}{2}\mu v^2} = \frac{J^2}{\mu^2 v^2} \implies J = \mu v b$$

con $b \equiv$ parámetro de impacto.

Además, de la ecuación $\frac{l}{r} = \varepsilon\cos\theta + 1$ $\quad r \to \infty$

con $\theta = -\frac{1}{\varepsilon}$, por tanto

$$\theta : \begin{cases} -\text{caso repulsivo} \to \theta = \pm \arccos\frac{1}{\varepsilon} \\ -\text{caso atractivo} \to \theta = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

Se ve que: $\pi = 2\theta + \Theta$ Donde Θ se llama ángulo de despersión.

$$\Theta = \pi - 2\theta = \pi - 2\arccos\frac{1}{\varepsilon}$$

Θ es el ángulo que marca la diferencia entre la trayectoria de entrada y la de salida.

Se puede relacionar con b:

$$b^2 = a\,l = a^2(\varepsilon^2 - 1) \qquad \text{Como } \varepsilon^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{(\pi - \Theta)}{2}}$$

$$b^2 = a^2\left(\frac{1}{\cos^2\frac{(\pi-\Theta)}{2}} - 1\right) = a^2\cot^2\frac{\Theta}{2}$$

Por último

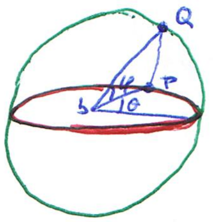
$$\boxed{b = \frac{|K|}{N v^2}\cot\frac{\Theta}{2}}$$

- La ecuación de Kepler

Sabemos que el area barrida por una órbita elíptica es constante. $\frac{dA}{dt} = cte$

Luego, en un instante $dt \Rightarrow dA = \frac{\pi ab}{\tau}\,dt$

Kepler, ideó un método para resolver la órbita y poder obtener $\theta(t)$



Consiste en proyectar el punto p de la elipse sobre una circunferencia, y definirlo según el ángulo ψ.

Llegando así a 2 relaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{2\pi t}{\tau} &= M = \psi - \varepsilon\sin\psi \\ \tan\frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{\psi}{2} \end{aligned}}$$

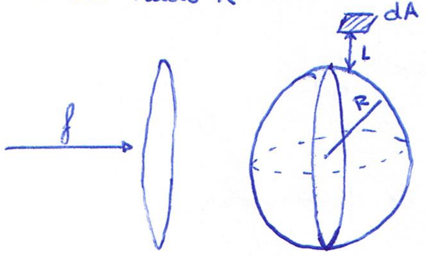
$M \equiv$ "anomalía media"

$\psi \equiv$ "anomalía excéntrica"

Así se puede obtener por aproximación $\psi(t)$ y con ello $\theta(t)$

- Sección eficaz de dispersión

Comenzamos con el caso en el que un haz de partículas impacta sobre una superficie esférica de radio R



El número de partículas que impactan es

$W = f\sigma$ donde $\sigma = \pi R^2$ y se dice "sección eficaz de dispersión" y f es el flujo de partículas.

Supongamos que ponemos un detector de área dA a una distancia L de la esfera. ¿Cuántas partículas lo atraviesan? Tras algo de cálculo se obtiene:

$$\boxed{dW = f \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA}{L^2}}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ se dice "sección eficaz diferencial" y en una esfera vale $\frac{R^2}{4}$.

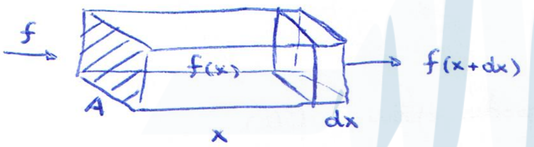
La sección eficaz total puede calcularse sabiendo que:

$$\sigma = \int_S \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad \text{donde} \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

(En coordenadas polares esféricas)

- Recorrido libre medio

Es un concepto que da cuenta de la distancia que recorren las partículas sin chocarse contra el material. Supongamos la muestra



Con área A y grosor x

Si la densidad de partículas "n", el recorrido libre medio se define como:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{n\sigma}}$$

Y la expresión que relaciona el flujo de partículas con su posición es:

$$f(x) = f_0 e^{-x/\lambda}$$

Es un resultado importante que si $\lambda \ggg x$ entonces el choque de una partícula se puede generalizar al choque de N partículas y se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} W = N f \sigma \\ dW = N f \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dA}{L^2} \end{array}}$$