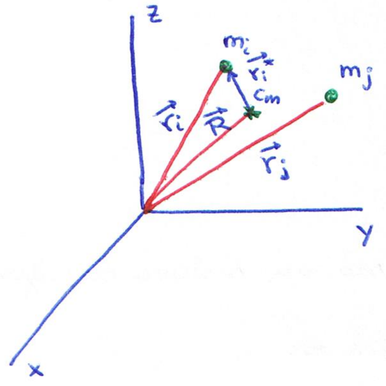
Tema II: Sistemas de Partículas y Referencias no Inerciales

• Dinámica de un sistema de N partículas



Llamamos $\vec{R}$ a la posición del centro de masas, y tomamos $\vec{F}_{ij}$ como la fuerza que ejerce la partícula j sobre i.

Sean $\vec{F}_i$ las fuerzas externas sobre la partícula i.

La 2ª ley de Newton para la partícula i es:

$$m\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i,j}^{N} \vec{F}_{ij} + F_i$$

La posición del CM ($\vec{R}$) será:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \qquad \text{con } M = \sum_i m_i$$

El momento lineal total será por tanto:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}$$

Que es lo mismo que el momento de 1 partícula moviendose como el C.M.

Su derivada es:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i \longrightarrow \text{Como } \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ij} \text{ se cancelan término a término}$$

Y queda:

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i}$$

Es decir, en ausencia de fuerzas externas $\vec{P}$ es cte.

En cuanto al momento angular, tenemos que:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i$$

Luego, el momento de las fuerzas es:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Si suponemos que la fuerza que actua es central, tenemos que el primer término se anula:

$$\boxed{\vec{N} = \dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i}$$

De nuevo en ausencia de fuerzas externas, $\vec{L}$ se conserva.

Introducimos ahora la posición respecto al C.M. Es inmediato que:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^* \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

Por definición, respecto al c.m $\vec{R}^* = 0$, así que $\sum_i m_i \vec{r}_i^* = 0$

Sustituyendo en el momento angular:

$$\boxed{\vec{L} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{L}^*}$$

El momento angular respecto de cualquier sistema de referencia que no sea el c.m ($\vec{M}\vec{R} \times \dot{\vec{R}}$) más el momento respecto del c.m ($\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*} \times \dot{\vec{r}}_i^{\,*}$

Derivando:

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} = M\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{L}}^* = R \times \sum_i \vec{F}_i + \dot{\vec{L}}^*$$

Al final tenemos que:

$$\boxed{\vec{N}^* = \dot{\vec{L}}^* = \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times \vec{F}_i}$$

Es un resultado importante, pues se cumple aunque el c.m no sea un sistema de referencia inercial.

Por último, en cuanto a la energía, tenemos que la energía cinética es:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

Que también puede expresarse como:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*} = \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 + T^*}$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{T} = \sum_i \sum_j \dot{\vec{r}}_i \vec{F}_{ij} + \sum_i \dot{\vec{r}}_i \vec{F}_i$$

Pero si para cada pareja, la fuerza responde a un potencial:

$$-\nabla V_{ij} = \vec{F}_{ij} \Rightarrow dV_{ij} = -\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r} \quad \text{y derivando}$$

$$\frac{dV_{ij}}{dt} = -\vec{F}_{ij} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \dot{\vec{r}}\,\vec{F}_{ij} = -\frac{dV_{ij}}{dt}$$

Luego la expresión de la variación de energía cinética

$$\dot{T} = -\frac{dV_{ij}}{dt} + \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Llamamos $V_{ij} = V_{int}$, pues es la potencia de las partículas del sistema.

$$\boxed{\frac{d(T + V_{int})}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i}$$

Es decir el cambio en la energía total del sistema por unidad de tiempo es igual a la potencia desarrollada por las fuerzas externas.

Con $T = \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 + T^*$ podemos decir que

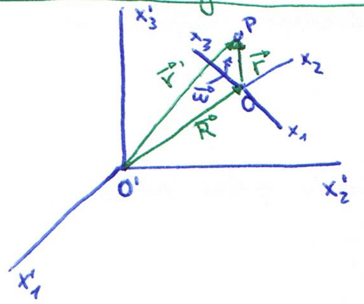
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 + T^* + V_{int}\right) = \dot{\vec{R}} \sum_i \vec{F}_i + \frac{d}{dt}(T^* + V_{int}) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$$

Aplicando que $\vec{r}_i = R_i + \vec{r}_i^{\,*}$ se tiene finalmente que:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T^* + V_{int}) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*} \cdot \vec{F}_i}$$

Es decir, que centrándonos en el c.m, la variación de la energía también es igual a la potencia de las fuerzas externas.

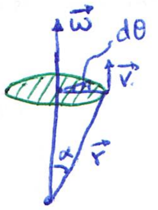
Sistemas de referencia no inerciales



Supongamos un sistema fijo O', y que es inercial, y uno que se mueve arbitrariamente O, que no es inercial.

Es inmediato que $\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r}$

Todo movimiento puede describirse como un giro alrededor de un eje en un instante determinado. Por ejemplo, supongamos la siguiente situación:



La relación entre la velocidad lineal y angular será:

$$V = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

La relación entre la posición y la velocidad lineal se puede ver que es $\quad V = r\omega \sin\alpha \quad$ es decir:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{r} \times \vec{\omega}}$$

y por tanto $\quad d\vec{r} = d\theta \times \vec{r}$

Ahora consideramos que el sistema de referencia no inercial O, gira un ángulo $d\theta$. Supongamos que la partícula P está en reposo respecto de este sistema. Entonces, la variación de su posición con respecto del sistema fijo (O') es:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

De manera más general, suponiendo que la partícula se mueva también respecto del sistema no inercial, entonces será:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{giro} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Resultado muy importante:

$$\forall \vec{Q} \in \mathbb{R}^3 \qquad \boxed{\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{giratorio} + \vec{\omega} \times \vec{Q}}$$

Es decir, la expresión es una transformación de coordenadas $\forall$ vector.

Si además, O se mueve en una traslación respecto de O', entonces:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} = \quad + \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{fijo} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{giro}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Aplicando trivialmente que $\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{fijo} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo}$

y $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{giro} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\boxed{\vec{V}_f = \vec{V} + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Que se traduce en: la velocidad del punto P respecto del sistema fijo es igual a la velocidad del sistema móvil (no inercial) respecto del fijo, más la velocidad respecto del giratorio (no inercial) de P más el término $\vec{\omega} \times \vec{r}$.

Las leyes de Newton en referencias no inerciales:

Queremos encontrar una expresión generalizada de las leyes de Newton para sistemas de referencia no inerciales.

Recordamos que para nuestro sistema fijo (inercial), tenemos que

$$\vec{F} = m\vec{a_f} = m\frac{\vec{V_f}}{dt}$$ Aplicando las transformaciones anteriores se tiene que:

$$\vec{F} = m\left[\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{fijo} + \left(\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right)_{fijo} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo}\right]$$

Ahora bien:

$$\left(\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right)_{fijo} = \left[\left(\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right)_{giro} + \vec{\omega} \wedge \vec{V_r}\right.$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{giro} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{V_r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Llevándolo a la ecuación:

$$\vec{F} = m\left[\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{fijo} + \left(\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right)_{giro} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{giro} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\right]\right]$$

De lo cual llegamos a:

Teorema de coriolis

$$\left(\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right)_{giro} = \left(\frac{d\vec{V_f}}{dt}\right)_{fijo} - \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{fijo} - \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}}_{\text{Ac. Coriolis}} - \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}_{\text{Ac. Centrífuga}}$$

Es importante destacar que:

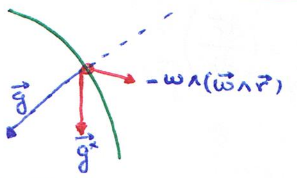
- Normalmente $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$, pues elegimos que el sistema no inercial se mueva con v constante respecto del inercial
- El término de coriolis es $\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$ lo cual significa que solo aparece si P se mueve también respecto del sistema no inercial.
- Las transformaciones son válidas $\Leftrightarrow$ $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ la rotación es constante

El teorema de coriolis se puede escribir:

$$\vec{a_r} = \vec{a_f} - \ddot{\vec{R_f}} - 2\vec{\omega} \times \vec{V_r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

Así que: $\vec{F_{ef}} = m\ddot{\vec{r}}_{giro} = m\ddot{\vec{r}}_{fijo}$ + "términos no inerciales".

Efecto de la aceleración centrífuga



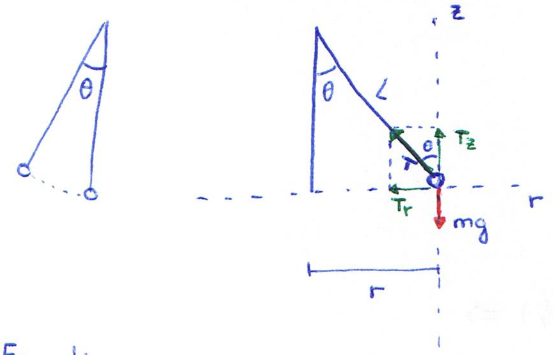
Este es el efecto que provoca la "gravedad aparente", una pequeña modificación en el vector $\vec{g}$ cuando colocas un cuerpo inmóvil (una plomada)

$$\left(\frac{d\vec{V_f}}{dt}\right)_{fijo} = \vec{g} = \vec{F_{ext}} + \left(\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right)_{giro} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

Como $\vec{F_{ext}} = 0$ y la plomada no se mueve $\Rightarrow$ ac. coriolis $= 0$

$$\vec{g} = \left(\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right)_{giro} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \Rightarrow \left(\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right)_{giro} = \vec{g^*} = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

El Péndulo de Foucault. Resolución



El péndulo de Foucault comienza a moverse en un plano pero tiene libertad para cambiar libremente.

Despreciaremos el término $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$ al ser $|\vec{\omega}| \simeq 10^{-7}$ y trataremos el péndulo como un oscilador armónico, al ser $\theta <<< 1$

Escribimos por componentes el punto dibujado:

$$T_z = T\cos\theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$T_r = -T\sin\theta = mg\tan\theta \simeq mg\theta = \frac{mgr}{L}$$

$\theta <<< L$

$L\theta = r \Rightarrow \frac{r}{L} = \theta$

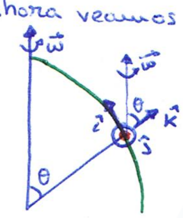
Su ecuación de movimiento es también:

$$m\ddot{\vec{r}} = -T\sin\theta\,\hat{u}_r \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -\frac{mg}{L}r \Rightarrow \ddot{r} + \frac{g}{L}r = 0$$

Así que en un sistema inercial, tenemos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0 \qquad \text{con} \quad \omega^2 = g/L$$

Ahora veamos cómo es la ecuación para el sistema no inercial.

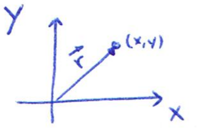


Situamos el sistema no inercial en el punto de la tierra donde está, el péndulo, tal y como se indica.

$$\vec{\omega} = \omega\sin\theta\,\hat{\imath} + \omega\cos\theta\,\hat{k}$$

Usamos la transformación de aceleraciones:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_f - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \qquad (\text{ignorando } \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}))$$



El péndulo oscila en el plano (Y, X)

En un punto cualquiera de su trayectoria

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{v}_r = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}$$

Luego, el término de Coriolis es:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \omega\sin\theta & 0 & \omega\cos\theta \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = -\dot{y}\cos\theta\,\hat{\imath} + \dot{x}\cos\theta\,\hat{\jmath} + \dot{y}\omega\sin\theta\,\hat{k}$$

Ahora recordemos que la ecuación del sistema inercial era:

$\ddot{\vec{r}} = -\frac{g}{L}\vec{r}$ Luego, aplicando $\vec{a}_r = \vec{a}_f - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{g}{L}\vec{r} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \qquad \text{En componentes:} \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{L}x + 2\dot{y}\omega\cos\theta \\ \ddot{y} = -\frac{g}{L}y + 2\dot{x}\omega\cos\theta \end{cases}$$

Tenemos que solucionar un sistema de 2 ecuaciones lineales de orden 2.

Solución del sistema

Multiplicamos la ecuación de y por i

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x + 2\dot{y}\,\omega\cos\theta$$
$$\ddot{y} = -\frac{g}{L}iy - 2\dot{x}i\,\omega\cos\theta$$

Las sumamos

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -\frac{g}{L}(x+iy) + 2\omega\cos\theta(\dot{y}-i\dot{x}) - 2\omega\cos\theta(i\dot{x}+\dot{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + i\ddot{y} = -\frac{g}{L}(x+iy) - 2\omega\cos\theta\, i(\dot{x}+i\dot{y})$$

Definimos $z = (x+iy)$, Entonces:

$$\ddot{z} = -\frac{g}{L}z - 2\omega\cos\theta\, i\,\dot{z}$$

g/L es la frecuencia, así que definimos $g/L = \omega_0^2$

$\omega\cos\theta$ es la frecuencia de la tierra, $\Omega = \omega\cos\theta$

Entonces tenemos que:

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z - 2\Omega i\dot{z} \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + 2\Omega i\,\dot{z} + \omega_0^2 z = 0}$$

Es la ecuación a resolver, tiene como solución $z = Ae^{iKt}$ $K \in \mathbb{Z}$

Sustituimos en la ec. para hallar K

$$z = Ae^{iKt} \qquad \dot{z} = AiKe^{iKt} \qquad \ddot{z} = -AK^2e^{iKt}$$

$$-AK^2e^{iKt} - 2\Omega AKe^{iKt} + \omega_0^2 Ae^{iKt} = 0$$

$$-K^2 - 2\Omega + \omega_0^2 = 0 \quad \text{¿Cuál es la K que lo satisface?}$$

$$K = \frac{2\Omega \pm \sqrt{4\Omega^2 + 4\omega_0^2}}{-2} = -\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2}$$

Es decir, tenemos que la solución es: $z = Ae^{iKt}$ $\quad K = \begin{cases} -\Omega + \sqrt{\Omega^2+\omega_0^2} \\ -\Omega - \sqrt{\Omega^2+\omega_0^2} \end{cases}$

Tomamos $\omega_1 = \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2}$, las soluciones son:

$$z_1 = Ae^{i(-\Omega+\omega_1)t}$$
$$z_2 = Be^{i(-\Omega-\omega_1)t}$$

Al ser lineal, la solución es suma de soluciones

$$z = z_1 + z_2 = x + iy = Ae^{i(-\Omega+\omega_1)t} + Be^{i(-\Omega-\omega_1)t}$$

Tomando la C.C:

i) $r_{inicio} = a \Rightarrow \vec{r} = 0$ ($\nexists$ V inicial)

ii) $x(0) = a \Rightarrow \dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0 \Rightarrow \dot{y}(0) = 0$

Obtenemos:

$$z(0) = x(0) + iy(0) = a = A + B$$

$$\dot{z}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = Ai(-\Omega+\omega_1)e^{i(-\Omega+\omega_1)t} + Bi(-\Omega-\omega_1)e^{i(-\Omega-\omega_1)t}$$

En $t=0$:

$$0 = Ai(-\Omega+\omega_1) + Bi(-\Omega-\omega_1) = -(A+B)i\Omega + i(A\omega_1 - B\omega_1)$$

Si imponemos que $\omega_1 \simeq \omega_0$, pues $\omega_1 = \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2}$ y $\Omega \lll 1$, puede ser despreciable frente ω_0.

Tenemos entonces:

$$0 = i(A\omega_1 - B\omega_1) = i(A\omega_0 - B\omega_0) \Rightarrow B = A$$

Y con $A + B = a \Rightarrow A = B = \frac{a}{2}$

Por tanto la solución general es:

$$z = x + iy = a e^{-i\Omega t}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right) = a^{-i\Omega t}\cos(\omega_0 t) = a\left[\cos \Omega t - i \sin \Omega t\right]\cos \omega_0 t = x + iy$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos \Omega t \cos \omega_0 t \\ y = -a \sin \Omega t \cos \omega_0 t \end{array}\right\} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

$$\Omega = \omega \cos\theta$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/L}$$

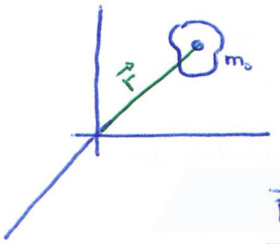
Conclusiones

i) El movimiento cambia del plano OX al OY, pero se va anulando con $\Omega = \pi/2$

ii) El efecto es máximo en el polo norte, cuando $\theta = 0 \Rightarrow \omega = \Omega$ y es nulo en el ecuador para $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega = 0$

Introducción al problema del sólido rígido

El sólido rígido se define como un objeto en el cual las distancias relativas entre puntos se mantienen constantes. Un sólido rígido tiene 6 grados de libertad, 3 ecuaciones espaciales y los 3 ángulos de Euler.

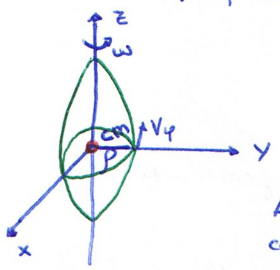


Consideramos el sólido rígido como un conjunto de masas. No tomaremos subíndices en los sumatorios, pero se entiende que se suma para cada masa m_i.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} = \sum m\dot{\vec{r}} \\ \vec{L} = \sum m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{\vec{P}} = \mu\ddot{\vec{R}} = \sum \vec{F}_{ext} \\ \dot{\vec{L}} = \vec{N} = \sum \vec{r}\times\vec{F}_{ext} \end{array}$$

Estas sumas discretas se suelen extender a integrales de volumen o superficie.

Ahora analicemos qué pasa si el sólido rota alrededor del eje z con velocidad ω



Supongamos que el c.m tiene coordenadas

$$\vec{R} = (x, y, 0)$$

Analicemos cómo se mueve la masa m. Para ello, tomamos coordenadas cilíndricas:

$$V_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \rho\omega$$

$$L_z = \sum \rho m v_\varphi = \sum m\rho\omega^2 = I\omega \Rightarrow \boxed{L_z = I\omega \text{ con } I = \sum \rho^2 m}$$

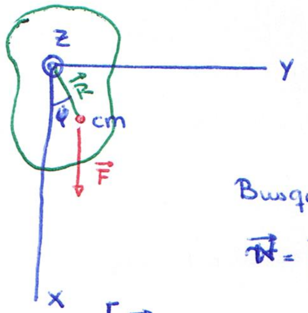
Por tanto:

$$N_z = \dot{L}_z = I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi}$$

Y su energía cinética:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

Estudio particular del péndulo físico



El péndulo físico es un sólido rígido particular que se mueve oscilando alrededor de un eje, a una distancia $\vec{R}$ del centro de masas.

Centremos el sistema de referencia en el punto de oscilación

Busquemos ~~una~~ su ecuación de movimiento:

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} = \sum \vec{r} \times \vec{F}_{ext} \qquad \vec{F}_{ext} = m\vec{g}$$

$$\left[\vec{N} = \sum \vec{r} \times m\vec{g} = \left(\sum m\vec{r}\right) \times \vec{g} = M\vec{R} \times \vec{g} = \vec{R} \times M\vec{g}\right]$$

$$N_z = I \cdot \dot{\omega} = I\ddot{\varphi} = -MgR\sin\varphi$$ (Pues la gravedad sólo tiene componente z)

La ecuación del péndulo físico:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{RMg}{I}\sin\varphi = 0}$$

Es ~~ella~~ equivalente a un péndulo simple de $l = \dfrac{I}{MR}$

Su periodo, por similitud al del péndulo simple es:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR}}$$

Ahora, queremos ver cuál es el momento que soporta el eje de giro:

$$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{Q} + \sum \vec{F}_{ext}$$ Donde Q son las fuerzas que soporta el eje de giro.

Es preferible describirlo en coordenadas cilíndricas:

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R} \implies \ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

Donde $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \times \vec{R})$ es la aceleración centrípeta a lo largo del eje cilíndrico $\vec{u}_\rho$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = -\omega^2 R\, \vec{u}_\rho$$

Y $\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{R}$ a la aceleración tangencial (a lo largo del eje $\hat{u}_\varphi$)

Es decir, en coordenadas cilíndricas:

$$\ddot{\vec{R}} = R\ddot{\varphi}\,\hat{u}_\varphi - \omega^2 R\,\hat{u}_\rho$$

En componentes, como $M\ddot{\vec{R}} = \vec{Q} + \sum \vec{F}$.

$$P_z = [Q_z = 0]$$

$$P_\rho = -M\omega^2 R = Q_\rho + Mg\cos\varphi \implies \left[Q_\rho = -Mg\cos\varphi - M\omega^2 R = -Mg\cos\varphi - MR\dot{\varphi}^2\right]$$

$$P_\varphi = MR\ddot{\varphi} = Q_\varphi - Mg\sin\varphi \implies \left[Q_\varphi = Mg\sin\varphi + MR\ddot{\varphi}\right]$$

Por último, vamos a escribir estas ecuaciones en función de la posición φ y no de $\ddot{\varphi}$

1) Como $\ddot{\varphi} = -\dfrac{MgR}{I}\sin\varphi$; de lo cual $Q_\varphi = MR\ddot{\varphi} + Mg\sin\varphi = MR\left(-\dfrac{MgR}{I}\right)\sin\varphi + Mg\sin\varphi \implies$

$$\implies \boxed{Q_\varphi = Mg\sin\varphi\left(1 - \frac{MR^2}{I}\right)}$$

2) Como $E = T + V = \dfrac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - MgR\cos\varphi \implies \dot{\varphi}^2 = \dfrac{2(E + MgR\cos\varphi)}{I}$

De donde

$$\boxed{Q_\rho = -Mg\cos\varphi - \frac{2MR}{I}(E + MgR\cos\varphi)}$$

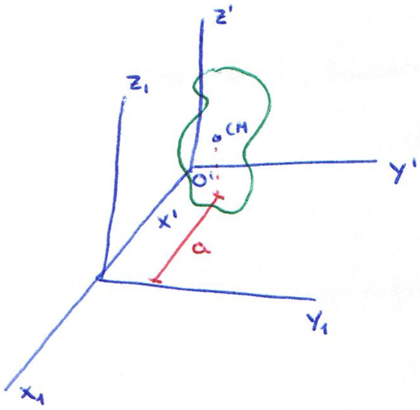
Problemas en el estudio del S.R

El problema principal que surge cuando el cuerpo no posee simetría, es que, en general, $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$. Entonces, no se puede decir que $L_z = I\omega$.
Aparece que el momento I deja de ser un escalar, y se convierte en un tensor de inercia (De orden 2), de manera que pueda relacionar $\vec{L} = I\vec{\omega}$.
Además, en ocasiones pueden aparecer fuerzas externas diferentes al peso del sólido que alteren las ecuaciones.

Teorema de Steiner.

El teorema de Steiner permite calcular cual es el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje paralelo al que pasa por el centro de masas. (Separados una distancia a)

Supongamos que tenemos la siguiente distribución y queremos calcular I respecto de O.



Tenemos que:

$$I = \int_V \rho^2 dm \qquad \text{pero} \qquad \rho^2 = (x'+a)^2 + y'^2$$

$$I = \int_V \left[(x'+a)^2 + y'^2 \right] dm = \int_V \left[(x'^2 + y'^2 + 2x'a + a^2) \right] dm =$$

$$= \int_V x'^2 + y'^2 \, dm + \int 2x'a \, dm + \int a^2 dm = I_{CM} + Ma^2$$

$$I_O = I_{CM} + a^2 M$$