Capítulo 2

Elementos de circuito

A lo largo de la historia de la Teoría de circuitos eléctricos y en especial del desarrollo de la Electrónica, se han planteado y utilizado una enorme cantidad de elementos de circuito*, sea para modelizar fenómenos físicos, para servir de ayuda en el proceso de diseño de circuitos reales, etc.*

El presente Capítulo pretende hacer una clasificación general de todos los elementos de circuito de parámetros concentrados (p.c.), de acuerdo con sus propiedades analíticas más relevantes (ineales/no lineales, t-variantes/t-invariantes, y finalmente, la no menos importante, algebraicos/dinámicos). Antes se compararán las descripciones de circuito y sistema, relacionando esta asignatura con la más general Teoría de Sistemas.

Al final del Capítulo se demuestra que todo elemento de parámetros concentrados se puede descomponer en una conexión de elementos algebraicos. Esta cuestión es de indudable interés en modelización y diseño, ya que con ellos se puede modelar cualquier dispositivo físico o diseñar de cualquier circuito real.

2.1. Conceptos generales

Como se mencionó en la Introducción, estamos interesados en circuitos constituidos por la interconexión de *elementos de parámetros concentrados* (p.c.). Desde un punto de vista eminentemente físico, esto significa que su longitud L verifica $L \ll \lambda = c/f_{máx}$, siendo $f_{máx}$ la máxima frecuencia de operación[1] y λ la longitud de onda asociada a la propagación electromagnética, o también $L \ll c \cdot \Delta t$, siendo Δt el más pequeño intervalo temporal de interés.

Ahora bien, dado el carácter abstracto de la Teoría de Circuitos, la afirmación anterior es imprescindible establecerla en términos matemáticos, lo que haremos en el presente capítulo. Esto es así porque también se dan otros casos de parámetros distribuidos en ciertos casos (modelización de la base del BJT, canal de un FET, etc.).

[1] Es ilustrativo representar en unos ejes sean (L, f_{max}) a diferentes dispositivos físicos reales, para comprobar que la casi totalidad de los dispositivos eléctricos –incluye los electrónicos– están en la zona de validez de la aproximación de parámetros concentrados.

Con carácter general, la descripción de modelos matemáticos de elementos de circuito en el dominio del tiempo puede contener otras variables independientes continuas, ora espaciales (en una más dimensiones), ora temporales (en integrales de convolución con retardos continuos), e incluso de otros tipos (temperatura, etc.). En ocasiones basta una aproximación de tal modelo, discretizando las variables independientes en un número finito[2].

Definición 1 (elemento de parámetros concentrados): *Se dice que un elemento E de una puerta es de parámetros concentrados sii su relación constitutiva es de la forma*

$$h(v, i, v^{(-\gamma)}, ..., v^{(\alpha)}, i^{(-\delta)}, ...i^{(\beta)}, t) = 0 \tag{2.1}$$

siendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$. En el caso de una m-puerta (o de un elemento de m+1 terminales), m es finito y tanto h como v e i son m-dimensionales. Un elemento que no verifica esta definición se dice que es de parámetros distribuidos.

La definición solo permite que v e i solo pueden aparecer directamente o en forma de derivadas o integrales *respecto del tiempo*, en cualquier orden *finito*.

Desde comienzo del Capítulo 1 se ha supuesto que todos los casos a considerar serán de parámetros concentrados, en este sentido la definición (2.1) se introduce con el único objeto de resolver algunos ejercicios que aclaren algunos casos fronterizos a esta categoría. A este respecto debe recordarse que en general la función $h(\cdot)$ puede tener $m + M$ componentes, con M también *finito*, siempre que se hayan utilizado M *variables internas* (que también pueden aparecer integradas o derivadas con cualesquiera órdenes) y que no siempre pueden eliminarse analíticamente.

En lo que a los circuitos se refiere, recordando que las ecuaciones LK son lineales (y homogéneas) de coeficientes constantes –las más simple posibles– se puede decir que el tipo de circuito en general debe recibir el nombre del elemento más complejo que contenga, con las matizaciones que veremos. Extendiendo la definición, un **circuito es de parámetros concentrados** *sii* sólo está constituido por elementos de p.c., *sinó* es de *parámetros distribuidos.*

Respecto a los modos de representación gráfica de los bloques constitutivos del sistema completo es preciso hacer una clasificación previa relativa a ciertos aspectos gráficos y analíticos de la misma.

- *Representación gráfica circuital:* Es la más utilizada para los sistemas y subsistemas de tipo eléctrico, aunque puede utilizarse para cualquier otra clase de sistema. En esta representación se utilizan elementos de circuito LK-conectados por sus nodos, es decir, caracterizados por sus variables de puerta (v, i), formando *circuitos.* La Teoría de Circuitos en general se basa en esta representación.

[2] En general debería exigirse que la discretización sea *convergente* y *numéricamente estable* (que el cálculo no amplifique los errores). En casos particulares pueden existir soluciones analíticas. En este contexto un problema (modelo matemático) se dice **bien propuesto** (*well-posed*) si su solución es única y depende de forma continua de las condiciones de contorno e iniciales.

- *Representación gráfica como sistema:* Es una representación más general que sólo pretende caracterizar cada bloque, a veces el sistema completo, como un operador $\Gamma[\cdot]$, que transforma una señal $u(t)$ denominada *entrada*, eventualmente vectorial, en otra denominada *salida* $y(t)$, también eventualmente vectorial. Las representaciones gráficas más comunes son el *diagrama de bloques* y el *diagrama de flujo de señal*, estas representaciones aplicadas a circuitos no se preocupan en general de las variables internas de cada uno de los bloques constitutivos del sistema completo.

Un circuito, un diagrama de bloques y un diagrama de flujo de señal pueden considerarse *equivalentes*, siempre que representen el mismo sistema matemático, es decir *el mismo operador* $\Gamma[\cdot]$.

A continuación se hacen algunas precisiones acerca de los conceptos de elemento, circuito y sistema.

2.1.1. Definiciones de elemento y circuito

Con la notación introducida en el Capítulo anterior, revisemos en primer lugar con más precisión los conceptos de elemento y de circuito, a los únicos efectos de establecer una clara distinción entre los mismos.

Definición 2 (elemento): *Un elemento de circuito es una entidad determinada por m puertas (o $m+1$ terminales[3]) con $m \geq 1$, sobre las que están definidas las $2m$ variables de rama asociadas $v = (v_1, v_2, ..., v_m)^T$ e $i = (i_1, i_2, ..., i_m)^T$ junto con la relación constitutiva m-dimensional[4]*

$$h(v, i, t) = 0 \quad con \quad h = (h_1, h_2, ...h_m)^T \tag{2.2}$$

donde en general cada h_j puede ser no algebraica[5] en sus variables.

En cada $h_j(v, i, t) = 0$ pueden figurar no solo las variables de la puerta j, es decir (v_j, i_j), sinó también las variables de otras puertas del mismo elemento[6], con las que se dice que la puerta j está *acoplada.*

Con objeto de economizar el número de casos a tratar, se pueden considerar una sola vez aquellos elementos que estén definidos por la misma función, pero que los papeles de i y v estén intercambiados. Para formalizar esta idea se introduce la definición siguiente.

Definición 3 (elemento dual): *Se dice que un elemento de parámetros concentrados E_2 es el dual de uno dado E_1, notado a veces por $E_2 = D(E_1)$, sii*

[3]Dado que todo elemento de $m+1$ terminales se puede reducir a uno de m puertas (con un nodo común), omitimos en lo que sigue la referencia a los mismos, salvo cuando sea realmente necesario.

[4]Aceptamos que (2.2) pueda realmente estar definida por $m+p$ ecuaciones, con p variables adicionales "paramétricas" que no puedan ser eliminadas analíticamente.

[5]Por el momento basta con que aceptemos que una expresión es *no algebraica* cuando además de las operaciones algebraicas usuales contiene operaciones de tipo derivada o integral de orden finito; la llamaremos *algebraica* cuando carece de estas dos últimas.

[6]La relación constitutiva de un elemento es invariante frente a cualesquiera conexiones (LK-compatibles) a otros elementos que con él se realicen.

la relación constitutiva de E_2 *se puede obtener de la de* E_1 *por intercambio de las variables* v_j *por* i_j *e* i_j *por* v_j *para todo* $j = 1, 2, \cdots, m$.

De la propia definición se deduce que $D(D(E_1)) = D(E_2) = E_1$. Debe advertirse que en muchas ocasiones se utiliza el concepto de dualidad en sentido *genérico*, p. ej. dado el elemento $i = Cdv/dt$, de tipo $h_1(v^{(+1)}, i) = 0$, se dice que un dual del mismo es el elemento $v = Ldi/dt$, elemento de tipo $h_2(i^{(+1)}, v) = 0$, aunque h_1 y h_2 se distingan en que numéricamente sea $L \neq C$.

Es interesante hacer las matizaciones siguientes a la definición de *elemento*:

- Con carácter general, de las $2m$ variables, m cualesquiera de ellas tomadas *una por puerta* se denominan a veces *excitaciones* (o entradas) y las restantes *respuestas* (o salidas). Con carácter más particular se suele reservar la primera denominación solamente para las variables de puerta que puedan tener la consideración analítica de variables independientes.

- Existen elementos de circuito orientados a definir excitaciones independientes, de tipo y forma específica, tales elementos se denominan *fuentes de excitación independientes* y son de dos tipos:

  - *Fuente (o generador) de voltaje independiente,* definido como

  $$v_j = u_{sj}(t) \ \ \forall i_j \tag{2.3}$$

  - *Fuente (o generador) de corriente independiente,* definido por

  $$i_j = u_{sj}(t) \ \ \forall v_j \tag{2.4}$$

  Nótese que para una fuente de voltaje independiente, considerada como un elemento, su excitación sólo podría ser i_j, además $\forall i_j$ con la que se le excitase respondería con $v_j(t) = u_{sj}(t)$. Una fuente de voltaje independiente no puede excitarse con otra fuente de voltaje independiente ya que tal conexión no sería LK-válida, por la misma razón no deben estar conectadas en forma de *bucle*[7]. Consideraciones duales pueden hacerse respecto de las fuentes de corriente independientes[8].

- Las interconexiones posibles LK-válidas de elementos serán estudiadas al final del capítulo y tendrán efecto sobre toda la Teoría de CLNL. La entidad resultante se denomina *elemento compuesto* y su estudio establece los fundamentos de la SCNL (Síntesis de Circuitos No Lineales).

- Desde el punto de vista de la *notación textual*, un *elemento compuesto* queda definido con una lista textual de los elementos interconectados,

[7]Realmente hay que excluir por la misma razón toda conexión de elementos a los que se le quisiera asignar en un t_0 dado una $v(t_0) \neq v_j(t)$, por ejemplo un condensador (o un *bucle* de condensadores).

[8]Ello impide la presencia de *conjuntos de corte* de fuentes de corriente y de inductores.

como se dijo en el capítulo anterior para *spice*. De aquí hemos tomado para *prespice*, ver Glosario, la denominación de *subckt* en la forma[9]:

$$\begin{array}{l} \textit{subckt nombre nodos\_externos} \\ \vdots \\ \langle \textit{cod\_elemento} \rangle \ \langle \textit{nodos\_internos\_o\_ext.} \rangle \ \langle \textit{ecuaciones} \rangle \\ \vdots \\ \textit{ends} \end{array} \tag{2.5}$$

Nótese que si tenemos muchos subcircuitos (elementos compuestos) ya definidos, incluidos en nuestro Catálogo de elementos, será más fácil describir uno nuevo[10].

Definición 4 (circuito): *Un circuito es toda interconexión LK-válida de elementos de modo que estén definidas todas las fuentes de excitación que pueda contener –aunque sus valores sean nulos– y que pueda representarse por las* $2b + (n - 1)$ *ecuaciones*

$$\begin{array}{l} Ai = 0 \\ -A^T e + v = 0 \\ f(v, i, t) = u_s(t) \end{array} \tag{2.6}$$

en las $2b + (n - 1)$ *variables fundamentales* $(e, v, i)^T$*, o por un esquema gráfico o textual equivalente.*

Veamos algunas observaciones aclaratorias tanto de la formulación del enunciado anterior como de su significado:

- La tercera de las expresiones anteriores, con $f = (f_1, f_2, ..., f_b)^T$ y $u_s = (0, 0, \ldots, 0, u_{sk+1}, ...u_{sb})$, no es más que el conjunto de todas las expresiones (2.2) de todos los elementos del circuito (b ramas), con la particularidad de que $b - k$ provienen de generadores independientes, cuyos valores se suelen escribir en el segundo miembro a modo de *funciones forzantes externas* (constantes o t-dependientes).

- Un *circuito* puede verse como un *elemento compuesto* excitado por generadores *independientes*[11] .

[9]Las sentencias internas pueden referirse a elementos simples o a otros elementos compuestos (pero no al mismo elemento compuesto, ya que tales llamadas recursivas no tendrían sentido).

[10]La representación *prespice* no contempla pase de parámetros, pretende ser una representación genérica textual vinculada con la analítica (tableau) y la gráfica usual.

[11]Como se ha dicho se refiere al *tipo de excitación*, no al valor. En este sentido, a título de ejemplo, un elemento de una puerta excitado por una fuente de tensión independiente constituye un circuito diferente -el sistema de ecuaciones (2.6) es distinto- que si está excitado por una fuente de corriente independiente, aunque ambas fueran de valor cero.

- Debemos evitar confundir ambos conceptos (elemento y circuito); así un elemento de m puertas sólo podemos considerarlo un circuito si aceptamos expresamente que cada una de sus puertas está en cortocircuito o en circuito abierto.
- A expensas de completar más adelante la notación textual de los diferentes elementos que pueden formar parte de un circuito, utilizaremos para el mismo la siguiente *notación textual*

$$\begin{array}{l} circuit\; nombre.cir \\ \vdots \\ \langle cod\_elemento\, o\, sbckto\rangle\, \langle nodos\_circuito\rangle\, \langle ecuaciones\rangle \\ \vdots \\ end \end{array} \tag{2.7}$$

  siempre que se den por conocidas las ecuaciones de los elementos y subcircuitos codificados (p. ej. dado un Catálogo de referencia para los mismos).

Definición 5 (circuito dual): *Se dice que dos circuitos son duales entre si las ecuaciones que describen cualquiera de ellos pueden obtenerse de las ecuaciones que describen el otro, después de sustituir entre si todas las corrientes y tensiones en tales ecuaciones.*

Este concepto es consecuencia de la dualidad de la existente en la TC entre axiomas (LCK/LVK), magnitudes (v/i), topologías, (paralelo/serie), elementos (cortocircuito/circuito abierto, resistencia/conductancia) y otros[12].

2.1.2. Concepto de sistema

El concepto de circuito o el de elemento son una particularización de un concepto de uso más amplio denominado *sistema* que se definirá formalmente en lo que sigue.

En primer lugar introducimos la denominada *representación externa* de un sistema denominada así porque lo caracteriza como una caja negra.

Definición 6 (sistema)**:** *Un sistema se define como una transformación, mediante un operador* $\Gamma[\cdot]$*, que actúa sobre una señal de entrada* $u(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ *para producir una señal de salida* $y(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$*, pudiendo ser desde ambas escalares (sistema SISO), hasta ambas vectoriales (sistema MIMO), en la forma*

$$y(t) = \Gamma[u(t)] \tag{2.8}$$

Nos interesan solamente de *sistemas continuos* definidos como aquellos en los que tanto las señales de entrada como las de salida son funciones continuas

[12] No definidos todavía en este contexto, pero de hecho ya conocidos por el lector para los circuitos lineales y planares como impedancia/admitancia, Thevenin/Norton, etc.

del tiempo. Incluso los sistemas digitales son eléctricamente continuos, a menos que se utilicen modelos excesivamente simplistas para representarlos, casos que serían los extremos matemáticos (que también contemplaremos) de los de interés real.

Adelantándonos a algunas consideraciones que veremos con más detalle, nos interesa por el momento notar que $u(t)$ e $y(t)$ están en el caso más general ligados por alguna forma de *ecuación diferencial*, de modo que dado $u(t)$ desde[13] $t = -\infty$, las ecuaciones (2.8) nos proporcionan $y(t)$ $\forall t$.

En ocasiones, todas las excitaciones que tengan lugar desde $t = -\infty$ hasta $t = 0$, se pueden englobar en una respuesta inicial y_0 que recoge los efectos de $u(t)$ en $-\infty < t < 0$, y cuyo conocimiento permite normalmente[14] obtener $y(t)$ $\forall t \geq 0$ con el único conocimiento adicional de $u(t)$ para $t \geq 0$.

El concepto de *estado* en un sistema dinámico está vinculado precisamente con la pretensión de reunir en un número limitado[15] de variables internas, *vector de estado* $x(t)$, los efectos de la historia pasada de $u(t)$ sobre el sistema, de modo tal que la salida pueda representarse en cualquier t como una función de la entrada en ese mismo instante $u(t)$ y del estado actual $x(t)$, y eventualmente de t.

Esta idea conduce a la *representación interna* de un sistema que se formaliza en la definición siguiente.

Definición 7 (representación de un sistema en variables de estado): Un *sistema dinámico de dimensión finita* que evoluciona continuamente en el tiempo es el sistema de ecuaciones en las *variables de estado* $x(t)$

$$\begin{aligned} x^{(+1)}(t) &= f_1(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= f_2(x(t), u(t), t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es el *tiempo,* $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el *estado en el tiempo* t, con $x(0)$ sus n *condiciones iniciales,* $u(t) \in \mathbb{R}^r$ es la *entrada en el tiempo* t, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es la *salida en el tiempo* t, *y* f_1*:* $\mathbb{R}^{n+r+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ *es* continua y continuamente diferenciable respecto de x, f_2*:* $\mathbb{R}^{n+r+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua y $u(t)$ es asimismo continua.

En Teoría de sistemas la representación de (2.8) mediante bloques interconectados es una práctica común que como sabemos permite incorporar en una misma representación sistemas de naturaleza muy diferente (eléctricos, neumáticos, fluídicos, mecánicos, etc). Un problema de síntesis clásico es el de la

[13]Supondremos que el sistema está en reposo en $t = -\infty$, por analogía con los sistemas reales o físicos en los que su conexionado inicial se hace con los elementos almacenadores de energía desenergizados (p. ej., los condensadores reales se fabrican descargados, ...).

[14]La *causalidad* permite generalizar esta idea ya que todos los sistemas físicos representables en la TC son *causales* (la respuesta nunca precede a la excitación).

[15]Los circuitos formados por un número finito de elementos de parámetros concentrados, representados cada uno de ellos por un número finito de variables asociadas, se llaman a veces sistemas dinámicos de *dimensión finita* para distinguirlos de los de *parámetros distribuidos.*

descomposición de Γ mediante bloques Γ_1, Γ_2, ... interconectados[16], En general para este problema existen infinitas soluciones. Por su parte la representación (2.9) es muy útil para la resolución numérica del problema.

Pues bien, en relación con los conceptos de elemento y circuito se puede decir lo que sigue:

- Un *elemento* en general es un sistema MIMO (multiple inputs multiple outputs), con m entradas y m salidas, en el que no se ha definido todavía el tipo de elementos de excitación. A este respecto obsérvese que (2.2) representa un sistema siempre que indiquemos cuales de sus variables son las entradas $u(t) = u_s(t)$, lo que equivale a definir el *tipo* de excitaciones.
- Todo *elemento* puede obtenerse como LK-interconexión de otros elementos, y esta síntesis no es única.
- Un *circuito* es un sistema con sus excitaciones completamente definidas. Obsérvese que un circuito es (2.6), de las cuales es deducible (2.8).
- Todo *circuito* admite en general una representación en la forma (2.8) e incluso en la forma (2.9), como se verá al final de este Capítulo. A su vez toda expresión (2.8) o (2.9) admiten una síntesis circuital, formada por elementos LK-interconectados, como se demostrará en el siguiente Capítulo.

En lo que sigue haremos especial énfasis en el concepto de *elemento* y sus propiedades, por ser precisamente el elemento la pieza básica de la Teoría de Circuitos. Como acabamos de ver utilizaremos a veces excitaciones para caracterizarlo y en tal caso no debe perderse de vista que estaremos hablando de circuito o de sistema indistintamente.

2.2. Clasificación fundamental de elementos y circuitos de p.c.

La máxima *divide y vencerás* aplicada a los elementos de parámetros concentrados, y por extensión a los circuitos de parámetros concentrados, permite separar con claridad eficientes métodos de trabajo, como veremos.

2.2.1. Elementos y circuitos lineales y no lineales

La más clásica (y útil desde el punto de vista del cálculo analítico) de las propiedades de los elementos es la linealidad o no linealidad.

[16]Un ejemplo muy conocido es el de la topología estándar de sitema realimentado, que puede definirse como $y(t) = \Gamma_1\left[x(t) - \Gamma_2\left[y(t)\right]\right]$, que puede representarse por $\Gamma = (\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2)^{-1}$, siempre que los operadores inversos existan.

Definición 8 (elementos lineales y no lineales): *Un elemento E es lineal si $h(v, i, t)$ es una función lineal respecto de las variables v e i. En otro caso se dice que E es no lineal.*

La *linealidad* es equivalente a la validez del **principio de superposición**. Es decir, si utilizando (2.8) es $y_1(t) = \Gamma[u_1(t)]$ e $y_2(t) = \Gamma[u_2(t)]$, entonces se debe cumplir[17] $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\Gamma[c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] = c_1 \Gamma[u_1(t)] + c_2 \Gamma[u_2(t)] \tag{2.10}$$

supuestas *nulas todas las condiciones iniciales* de todas las variables de puerta que las exijan.

La forma general de la ED (ecuación diferencial) de un elemento lineal de una puerta en la que $v(t)$, $i(t)$ sean las variables de puerta es[18]

$$h(\cdot) \equiv \sum_{j=0}^{m_1} a_j(t) v^{(j)} + \sum_{k=0}^{m_2} b_k(t) i^{(k)} = 0 \tag{2.11}$$

de modo que se puede escribir $\Gamma_1[v(t)] = \Gamma_2[i(t)]$, o $v = \Gamma_1^{-1}\{\Gamma_2[i]\}$, si Γ^{-1} existe, es decir $v = \Gamma[i]$. Si el elemento es de m puertas, para cada una de sus variables de salida tendríamos un sumatorio adicional para cada una de las entradas posibles, u_k, p. ej en la forma $\sum_l \Gamma_l[i_l(t)]$ si las salidas fueran las corrientes.

En lo que sigue supondremos que $a_i(t)$ y $b_i(t)$ son continuas para todo t de interés del problema en consideración.

Por extensión, un **circuito es lineal** *sii* todos sus elementos (las fuentes de excitación independientes se consideran externas) son lineales, *sinó* es no lineal.

2.2.2. Elementos y circuitos t-invariantes y t-variantes

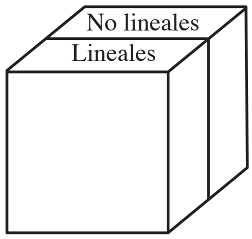
Una tercera clasificación de interés especial en circuitos de alta frecuencia (mezcladores, ...) es la asociada a la definición siguiente.

Definición 9 (elementos t-invariantes): *Se dice que un elemento es t-invariante sii su relación constitutiva no depende explícitamente de t. En otro caso se denomina variante con el tiempo o t-variante.*

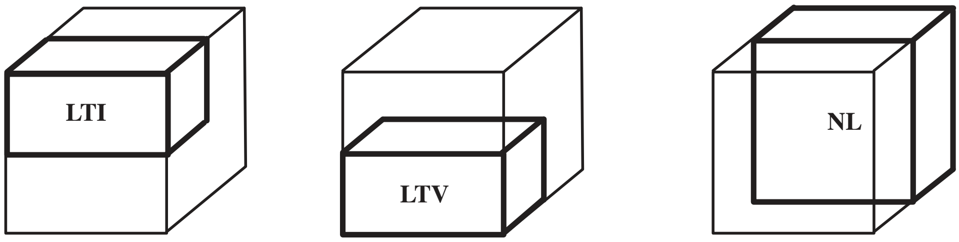
Para un elemento t-invariante (2.2) se escribe $h(v, i) = 0$. Pues bien, definidas m excitaciones (una por puerta) $u(t) = u_s(t)$ y denotadas las m respuestas por $y(t)$ es $y(t) = \Gamma[u(t)]$ y al haber desaparecido la dependencia temporal explícita de h, desaparece la del operador Γ de modo que en un elemento (sistema) t-invariante es

[17] A veces esta propiedad se desglosa en dos propiedades más simples: a) *Homogeneidad*, la que se obtiene con $c_2 = 0$, y b) *Aditividad*, la que se obtiene con $c_1 = c_2 = 1$.

[18] Nótese que no posee término independiente. Así, el elemento algebraico de relación constitutiva $i = k_1(t)v^{(2)} + k_2$ sólo es lineal si $k_2 = 0$.



a) Clasificación fundamental de los elementos de p.c.



b) Categorías fundamentales de ELEMENTOS y CIRCUITOS

Figura 2.1: Categorías de Elementos y Circuitos

$$\Gamma\left[u(t-t_o)\right] = y(t-t_o) \tag{2.12}$$

es decir, un desplazamiento de la excitación a un t_o arbitrario produce un desplazamiento de la misma respuesta a tal t_o. Esta conclusión encierra la idea de que el sistema no cambia con el tiempo, es decir, está caracterizado por las mismas ecuaciones desde t_1 o desde t_2 aun cuando $t_1 \neq t_2$.

También por extensión diremos que **un circuito es t-invariante** *sii* todos sus elementos, excluidas las fuentes de excitación, son t-invariantes, *sinó* diremos que es t-variante.

Tomando el *universo de los posibles circuitos de parámetros concentrados*, se puede hacer la representación de la Figura 2.1b) en la que se agrupan desde un punto de vista muy pragmático, cual es el de la posibilidad de utilizar herramientas adecuadas en su estudio.

1. Elementos **LTI**, es decir *lineales y t-invariantes*
2. Elementos **LTV**, *lineales y t-variantes*
3. Elementos **NL**, *no lineales*

En todos los casos las propiedades de los distintos tipos de circuitos, Teoremas de la Teoría de Circuitos Lineales y No Lineales, pretende aportar ayudas para dicha tarea, como se apunta a continuación.

Observaciones

La Linealidad es la más significativa de las propiedades ya que el principio de superposición facilita el estudio separado de múltiples excitaciones (o de una sola, descomponiéndola en forma aditiva). En particular, en el caso **LTI** la t-invarianza en el caso de circuitos *resistivos* se convierte en un sencillo problema de Algebra.

Cuando el circuito es **LTI** *dinámico* la t-invarianza permite la utilización de herramientas tan eficaces como los fasores (frecuencia única) o la transformada de Fourier en régimen permanente (estable), mientras que la transformada de Laplace[19] permite tratar los circuitos en cualquier régimen e incluso cuando son inestables.

En el caso **LTV** la linealidad facilita las cosas en el sentido que se ha dicho, pero ya no es posible utilizar las herramientas citadas. En este caso existe la posibilidad de utilizar técnicas analíticas en algunas situaciones (variación periódica de los parámetros), pero omitimos esta posibilidad[20], haciendo descansar la búsqueda de la solución en métodos numéricos.

Por último el caso **NL** descansa en métodos numéricos, lo que no excluye una abundante cantidad de posibilidades analíticas lógicamente dependientes del problema, tanto en casos de análisis como de síntesis de circuitos.

2.2.3. Algunas particularidades de elementos y circuitos

En el presente parágrafo sólo se pretende recopilar e introducir conceptualmente, más que formalmente, algunas propiedades y aproximaciones, junto con el interés de las mismas.

De los elementos

De la misma manera que hemos introducido el concepto de *dualidad*, a continuación se citan algunas propiedades y aproximaciones de interés.

- *Causalidad:* Un elemento $y = \Gamma[u(t)]$ es *causal* sii para toda entrada posible los valores de $u(t)$ correspondientes a $t > t_1$ no producen efecto alguno sobre la salida $y(t_1)$. Es decir, su salida en cualquier instante de tiempo no depende de los valores futuros de la entrada. Los sistemas físicos, salvo en ámbitos muy restringidos de la mecánica cuántica, son causales (no anticipativos) por lo que supondremos en lo que sigue que todos los *elementos* cumplirán esta condición. Esta propiedad introduce una restricción en el tipo de ecuaciones "válidas" que pueden utilizarse para representar elementos.

[19]La Transformada de Laplace es la firma de todo ingeniero electrónico. En nuestro caso damos por conocida esta herramienta.

[20]Aunque L. A. Zadeh introduce el concepto de función de transferencia de un sistema para el caso LTV, permitiendo que también dependa del tiempo (como sus parámetros), omitimos esta consideración en todo lo que sigue.

- *Pasividad*: Es un concepto energético, un elemento se dice que es *pasivo* si no genera energía en ninguno de sus posibles puntos de trabajo, es decir si $v(t)i(t) \geq 0$, $\forall t$. Todo elemento no pasivo se dice *activo*[21]. En particular, si $v(t)i(t) > 0$, $\forall t$, excepto en el origen (se permite $v = i = 0$) se dice que es *estrictamente pasivo.* Si $v(t)i(t) = 0$, $\forall t$, se dice que es un elemento *sin pérdidas (lossless)* o no energético.

- *Reciprocidad*: Este concepto aparece en muchos campos de la Ciencia y de la Ingeniería y en términos generales podría ser enunciado así: Sea el *elemento lineal*[22] $y_1 = \Gamma_1(x_1, x_2)$ $y_2 = \Gamma_2(x_1, x_2)$ en el que (x_i, y_i) *representan las variables de la misma puerta*[23], se dice que es *recíproco sii* el efecto que sobre y_2 produce una $x_1 = u_s(t)$ en una puerta con $x_2 = 0$ en la otra, es el mismo que se obtendría en y_1 cuando se aplicara en la segunda la misma $x_2 = u_s(t)$, con $x_1 = 0$, ó $\Gamma_2(u_s, 0) = \Gamma_1(0, u_s)$. Para elementos no lineales, lo que precede se exige a sus versiones linealizadas.

- *Linealización*: Más que una propiedad es una *aproximación* que se realiza sobre elementos no lineales cuando sus variables trabajan en un entorno tan pequeño que sus variaciones pueden relacionarse entre si linealmente. En Electrónica se llama *pequeña señal* a la condición (amplitud) de validez de esta aproximación[24]. Se utilizará en este Capítulo aplicada a elementos.

De los circuitos

Quizás una de las características más importantes de un sistema y por consiguiente de un circuito sea su estabilidad. Los conceptos relativos a esta *propiedad cualitativa* se suponen conocidos, no obstante por el momento se revisa su definición más elemental.

En otro orden de cosas y dado que estamos tratando con circuitos eléctricos que operan en régimen continuo, no debemos descartar que en los mismos aparezcan eventualmente discontinuidades en tensión o en corriente, incluso valores impulsivos.

- *Estabilidad:* Fijado el tipo[25] de excitaciones de un circuito, se dice que

[21] A veces se habla de elemento activo para pequeñas señales, p. ej. un diodo túnel en su región de resistencia negativa. Realmente es un elemento pasivo, aunque relajando el lenguaje podría decirse que en dicha región es *localmente activo* o *activo para las pequeñas señales* (a costa de las grandes señales del punto de operación).

[22] Si fuera dinámico lo que sigue se aplica sólo a las respuestas obtenidas suponiendo cero todas las condiciones iniciales.

[23] El caso en que (x_i, y_i) representaran la entrada de una puerta y la salida en otra posee en el caso de los circuitos eléctricos sutiles connotaciones que podemos omitir en lo que sigue.

[24] Como veremos, esta aproximación depende de la amplitd de tales señales y de la no linealidad local de la función sobre la que se producen.

[25] La *estabilidad* es una propiedad de circuito, no de elemento, (o de sistema, no de bloque ya que en ella interviene el acoplamiento entre bloques, p. ej. el tipo de excitación). Es decir, un elemento que es estable excitado por una fuente de voltaje puede dejar de serlo si se excita por una fuente de corriente; tal es lo que sucede al alimentar con una fuente constante no nula a un elemento compuesto definido por el acoplamiento serie de una R con una C.

con ellas es *estable* si para cada valor posible de las mismas, *acotadas* todas ellas en valor absoluto, $|u_{sk}(t)| < M_k < \infty \ \forall k$, cualquier salida considerada también está *acotada*[26] en valor absoluto, $|y(t)| < M' < \infty$.

- *Memoria:* Se dice que un elemento no posee memoria, es un elemento *sin memoria* (*memoryless*) si $y(t_1)$ sólo depende de $u(t_1)$, tal es el caso de los circuitos llamados resistivos, en los que el valor de cualquier salida en un instante depende solamente del valor de la entrada en ese mismo instante. La presencia de condensadores (resp., inductores) dotan al circuito de *memoria* a través de sus v_C o sus q_C (resp., i_L o ϕ_L) o de sus energías almacenadas; este es el caso de los llamados circutos dinámicos.

- *Continuidad*: Consideremos un C lineal que recibe una corriente $i_C(t)$ que presenta una *discontinuidad de salto en $t = T$,* pero *acotada* en $[T-\epsilon, T+\epsilon]$. En consecuencia es

$$v(T+\epsilon) - v(T-\epsilon) = \frac{1}{C}\int_{T-\epsilon}^{T+\epsilon} i(\tau)d\tau$$

Si ahora se toma el límite de ambos miembros para $\epsilon \to 0$ lo que se obtiene es un *principio de continuidad* según el cual

$$v_C(T+) = v_C(T-)$$

es decir aunque $i_C(t)$ sea una discontinuidad de salto, si es *acotada*, la respuenta en $t = T$ es continua (dualmente para una $v_L(t)$ acotada). Ello otorgará a los circuitos de interés con excitaciones realistas la propiedad de responder en los intervalos de interés con *señales continuas*[27].

A este respecto, debemos ser muy cautelosos con representaciones circuitales excesivamente no físicas[28].

---

[26]A veces se designa como estabilidad "bibo" (*bounded-input bounded-output*).

[27]Incluso ciertos comportamientos aparentemente discontinuos no son más que extremos matemáticos de situaciones realistas. Tomemos un ejemplo, sea un generador de voltage escalón "no ideal", con subida en rampa desde 0 V, de anchura $\triangle t = \epsilon$ y de altura E, conectado a un C lineal inicialmente descargado (obsérvese que para $\epsilon \to 0$ representa un escalón ideal). Pues bien, la $i_C = C dv_C/dt$ resultante es un pulso de área $CE = Q$ constante, independiente de ϵ, cuya altura tiende a infinito en el límite $\epsilon \to 0$. Incluso después de tal *impulso*, la discontinuidad $v_C(0+) = v_C(0-) + Q/C$ es *finita*. En suma, se percibe una tendencia a la continuidad en v_C, frente a variaciones incluso impulsivas, de área finita, de i_C (resp., para i_L y v_L en una L).

[28]Un C con $v_C(0) = V_0 > 0$ y con un interruptor ideal en paralelo que se cierra en $t = 0$ es una construcción no LK-válida: a) Si se modela el interruptor con una $r > 0$, aunque sea $r \to 0$, se ha restablecido la la continuidad de v_C, es decir la consistencia LK; en efecto, es $v_C(0+) = v_C(0-) = V_0$ e $i_C(0+) = V_0/r$, y para $t > 0$, con $\tau = rC$, es $v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ e $i_C(t) = -v_C(t)/r$. b) Con $r \to 0$ el impulso $i_C(t) = -(V_0 C)\delta(t)$, incluso con área finita, podría tener efectos inductivos sobre los conductores del circuito físico de referencia, representémoslos por l (H). Con tal $l \neq 0$ el circuito oscilaría con una frecuencia natural $f \propto 1/\sqrt{lC}$, disipando en r su energía de forma amortiguada, pero tan alta f (al ser $l \to 0$) nos hace considerar el tamaño físico del circuito, L_{cir}. c) Si se viola $L_{cir} \cdot f_{máx} \ll c$ no sería válida la aproximación de p.c. y tal condición implicaría pérdida de energía por radiación EM, en suma se violaría el Teorema de Tellegen (otra vez el problema deja de ser LK-válido).

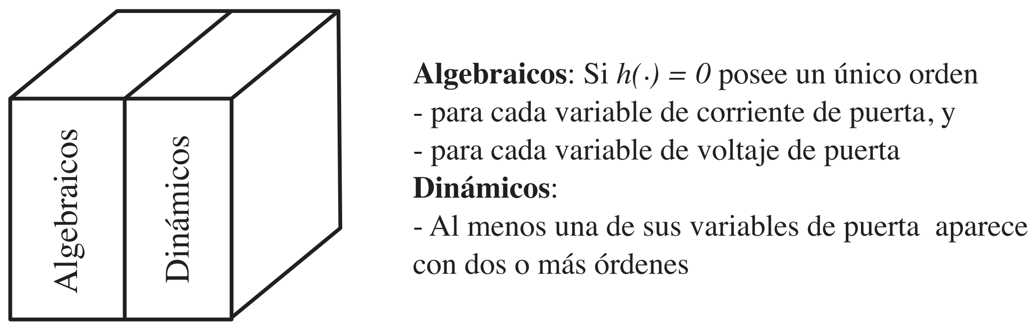


Figura 2.2: Clasificación universal de elementos

2.3. Clasificación universal de los elementos de p.c.

Quizás una de las clasificaciones de mayor interés en el estudio de los elementos de circuito y su utilización en modelización sea la que establece la definición siguiente.

Definición 10 (elemento algebraico y elemento dinámico): *Un elemento de m puertas (m+1 terminales) es algebraico sii su relación constitutiva puede ser expresada por relaciones algebraicas que involucren a lo sumo a las dos variables dinámicamente independientes* $\left\{v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)}\right\}$ *por cada puerta* $j = 1, 2, ...m$, *siendo* α_j *y* β_j *dos enteros cualesquiera. Un elemento es dinámico sii es no algebraico.*

La mayor parte de los *modelos de dispositivos electrónicos* están representados por por modelos matemáticos que contienen por cada puerta más de dos variables, es decir son elementos dinámicos. No obstante, adelantamos que entre los elementos algebraicos está el conjunto básico de elementos precisos para modelar cualquier dispositivo, como se demostrará en su momento.

En lo que sigue se estudian con todo detalle todos los *elementos algebraicos* posibles, Fig. 2.3 y Fig. 2.4 entre los que están sin duda los símbolos particulares que se han utilizado con más profusión a lo largo de más de un siglo de Teoría de Circuitos y en sus diversas aplicaciones (Electrotecnia, Electrónica, etc.), así como otros que puedan proponerse en el futuro.

2.3.1. Elementos algebraicos de una puerta

2.3.1.1. Elementos algebraicos de una puerta básicos

Con carácter general son aquellos definidos por

$$h(v^{(\alpha)}, i^{(\beta)}, t) = 0 \;\; con \;\; \alpha, \beta \in \{0, -1\} \tag{2.13}$$

con h, v e i escalares.

Si son de tipo *autónomo*, es decir invariantes con el tiempo, responden a $h(v^{(\alpha)}, i^{(\beta)}) = 0$.

Resistor

Su *relación constitutiva* esta definida por $\alpha = \beta = 0$, es decir

$$h_R(v, i, t) = 0 \tag{2.14}$$

si t no figura explícitamente, $h(v, i) = 0$, se dice que es independiente del tiempo, o *autónomo*, caso al que le prestaremos mayor atención inicial.

El conjunto de puntos del plano (v, i) que satisface su relación constitutiva se denomina *característica del resistor* o curva de nivel cero de la función $h(\cdot)$. Un valor del voltaje v se llama *admisible* si existe al menos una corriente que la satisfaga, y recíprocamente.

Si para cualquier valor de la corriente i no existe más que un valor admisible de v, entonces existe la función

$$v = f(i) \tag{2.15}$$

y se dice que es un resistor i-*controla*do. Análogamente, la existencia, en su dominio admisible, de la función

$$i = g(v) \tag{2.16}$$

significaría que el resistor es v-*controlado*.

Ejemplos de resistores no lineales son: el *modelo de Shockley* de la unión pn, el modelo de continua del diodo túnel, el diodo de cuatro capas, etc.

Consideremos varios casos particulares. El más conocido es el *resistor lineal*, cuya característica es una línea recta que pase por el origen. Si puede expresarse $v = Ri$, al parámetro R se denomina *resistencia*, ohms (Ω), de ser $R \neq 0$ el resistor también es controlado por voltaje en la forma $i = Gv$, el parámetro $G = R^{-1}$ se denomina *conductancia*, siemens (S). Nótese que $R = 0$ representa el resistor controlado por corriente $v = 0\ \forall i$, usualmente denominado "*cortocircuito*", mientras que su dual, $i = 0\ \forall v$, se denomina usualmente "*circuito abierto*". Otros casos particulares desde un punto de vista formal son los siguientes.

- *Fuentes independientes de tensión*: En el caso más general la relación constitutiva es[29]

  $$v - u_s(t) = 0 \ \ \forall i(t) \in \mathbb{R} \tag{2.17}$$

  y corresponde a lo que se llama usualmente una fuente de tensión constante si $u_s(t) = E$ o fuente independiente de tensión dependiente del tiempo o t-dependiente[30]. También se llega al *cortocircuito* como el caso particular $u_s(t) = 0$.

[29] Una posible forma (innecesaria obviamente) para disponer una expresión cerrada para $h(v, i, t) = 0$ podría ser $(v - u_s(t))^2 + (i - \alpha)^2 = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, siendo α la *excitación* de corriente debida a los elementos externos.

[30] Es inevitable llamarla así (es un elemento t-dependiente). No obstante no depende de ninguna otra variable del circuito (ni siquiera de su propia corriente), al contrario de lo que sucede con las *fuentes dependientes (o controladas)* que revisaremos más adelante.

- *Fuentes independientes de corriente*: Corresponde al dual del caso anterior tanto en su definición como en su significado (resp., circuito abierto).

$$i - u_s(t) = 0 \;\; \forall v(t) \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

Estas dos fuentes o generadores de excitación son generalmente los únicos elementos no autónomos (cuando dependen de t); nótese también que salvo casos degenerados son no lineales.

Condensador

Es un elemento circuital de una puerta, dos terminales, definido por una relación constitutiva algebraica de la de forma

$$h(i^{(-1)}, v) = 0 \tag{2.19}$$

donde a veces se utliliza la carga, que no es otra cosa que $i^{(-1)} \equiv q$. Los conceptos de voltaje admisible y carga admisible se introducen de modo similar. También, si fuera posible expresar la ecuación anterior en una de las formas siguientes

$$v = f(q) \qquad q = g(v) \tag{2.20}$$

se diría que estamos ante un condensador controlado por carga, o por voltaje, respectivamente. En todo caso la característica es $h(v, q) = 0$.

Ejemplos de *condensadores no lineales* son: el modelo de un condensador de placas paralelas con un material ferroeléctrico no lineal (por ej. titanato de bario) entre ambas, el modelo de un diodo varactor, etc.

En particular un condensador lineal es a la vez controlado por voltaje y por carga, ya que verifica que $q = Cv$ siendo la constante C la *capacidad* del condensador, faradios (F). Si $v = Sq$, a S se le denomina *capacidad recíproca* (F^{-1}).

Inductor

Este elemento es el dual del anterior. Reproducimos su relación constitutiva (también para el caso autónomo) en la forma

$$h(v^{(-1)}, i) = 0 \tag{2.21}$$

notada esta vez como $h(\phi, i) = 0$, o en sus variantes i-controlada, $\phi = f(i)$ o ϕ-controlada, $i = g(\phi)$.

En particular para un inductor lineal es $\phi = Li$, siendo L la *autoinducción*, henrios (H). A veces es necesario utilizar la *autoinducción recíproca*, $\Gamma = L^{-1}$, de unidades H^{-1}.

Ejemplos de inductores no lineales son: el modelo de la unión Josephson (dos superconductores separados por una capa aislante), etc.

Memristor

Propuesto por Chua en 1971, este elemento se define[31] como

$$h(v^{(-1)}, i^{(-1)}) = 0 \tag{2.22}$$

Si h es lineal es equivalente a un resistor lineal, pero si no lo es es un dispositivo totalmente diferente, es decir, no se puede obtener del resistor mediante los operadores integración o derivación. Obsérvese también que el dual de un memristor es otro memristor.

Propiedades y linealización

Consideraremos ahora algunas particularidades de estos elementos. Lógicamente se suponen todos ellos de características $h(v^{(\alpha)}, i^{(\beta)}) = 0$ *continuas* (eventualmente lineales a tramos) y por supuesto *causales*. Como se observará, se pueden extender en su caso a propiedades similares cuando se consideren elementos algebraicos más complejos.

- *Memoria*: Un *resistor no posee memoria*. Por el contrario, un *condensador*, supongámoslo v-controlado, verifica $q = f(v)$ y también $i = dq/dt$ por lo que es $i = (df(v)/dv)dv/dt$ de donde se deduce

  $$i = C(v)dv/dt \tag{2.23}$$

  siendo $C(v)$ la *capacidad no lineal* dependiente de la tensión que posea el elemento en cada instante. Por consiguiente

  $$\int_0^{v(t)} C(v)dv = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \tag{2.24}$$

  Y suponiendo $C(v) = C_0$ constante es

  $$v(t) = \frac{1}{C_0}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = v(0) + \frac{1}{C_0}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

  lo cual lleva implícito[32] que es un elemento de *memoria*. (guarda información en $v_C(t)$ o $q(t)$). Se puede hacer un estudio dual para el inductor. A su vez el *memristor* es un elemento que también posee memoria.

[31]Este elemento se basa en la última relación posible entre v e i, en los elementos de dos terminales básicos. Hasta 2008 no apareció un elemento físico con tal propiedad; fue en los laboratorios HP donde se comprobó que una película delgada de dióxido de titanio se comportaba de tal manera. Hoy (2014) existen interesantes perspectivas para su uso como *memoria nanoelectrónica* y como *circuito neuromórfico*, entre otras.

[32]Una transformación de interés derivada de la expresión anterior se puede enunciar, dada su $v(0) = V_0$ conocida. En efecto, tal condensador con una $V_0 \neq 0$ es *indistinguible externamente* en cualquier circuito para $t \geq 0$ de otro condensador con la misma capacidad C descargado en serie con una fuente de tensión de valor $v(0) = V_0$, ya que ambos responden a

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C_0}\int_0^t i(\tau)d\tau = V_0 + \frac{1}{C_0}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

Se puede hacer un enunciado dual para el inductor LTI

- *Continuidad*: Esta propiedad ya ha sido comentada. Recuérdese, *la presencia de un inductor en un circuito tiende a impedir que su corriente cambie bruscamente, aun cuando su tensión lo haga* (resp., su dual para un condensador).

- *Linealización*: En cualquiera de los elementos anteriores si tomamos la expresión algebraica $y = \widehat{y}(x)$, en una región cualquiera en que esta función exista, alrededor de un punto $Q(X_Q, Y_Q)$ que llamaremos por el momento **punto de operación**, si se notan por

$$x = X_Q + \widetilde{x} \qquad y = Y_Q + \widetilde{y} \tag{2.25}$$

e $\widehat{y}(\cdot)$ se comporta bien en tal entorno, entonces se puede escribir[33]para los valores totales de la excitación y respuesta (desarrollo de Taylor) en dicho entorno

$$y(t) = Y_Q + \left| \frac{d\widehat{y}(x)}{dx} \right|_Q [x(t) - X_Q] + \epsilon = m_Q\tilde{x} + \epsilon \tag{2.26}$$

pues bien, ϵ depende de la amplitud de $\widetilde{x}$ y de la no lineanidad local de $\widehat{y}(x)$ alrededor del punto Q. En Electrónica se suele definir ***pequeña señal*** a *toda excitación cuyas variaciones alrededor del punto de operación, $\widetilde{x}(t)$ sean de amplitud suficientemente pequeña como para que $\epsilon \ll m_Q\widetilde{x}$.* Sólo en este caso se verifica la *aproximación lineal*

$$\widetilde{y} = m_Q\widetilde{x} \tag{2.27}$$

donde m_Q recibe el nombre apropiado al caso considerado. Así en un *resistor controlado por voltaje* estaríamos hablando de *conductancia de pequeña señal* en el punto de operación. El proceso seguido también da pautas para una posible medida en laboratorio de tal parámetro.

Antes de seguir indicamos que en su aplicación a elementos de circuito, las funciones f, g, h, ..., etc. mencionadas serán siempre o bien de perfil *suave* (continuas y posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes) o bien *afines a tramos*[34] (piecewise afín, PWA) aunque en este caso se perdería la continuidad de la derivada.

---

[33]Una interesante versión del teorema de Taylor dice que f puede aproximarse por un polinomio de grado $(n-1)$, dándonos además el error cometido: *Sea $f(x)$ tal que $f^{(n)} \equiv d^nf/dx^n$ es finita en (a,b) y $f^{(n-1)}$ es continua en $[a,b]$, tomemos ahora un $x_0 \in [a,b]$, entonces $\forall x \in [a,b]$, con $x \neq x_0$ es*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_0)^n$$

donde x_1 es un punto (a determinar) del intervalo que une x con x_0.

Nótese que si se determina x_1 no se dispondría de una aproximación, sinó de una igualdad, válida al menos en el intervalo considerado.

[34]Las componentes de las funciones PWA son en general no lineales (término independiente no nulo), es decir son *afines*. En el pasado, en lugar de PWA se utilizaba casi exclusivamente la denominación PWL (*piecewise* linear) o *lineales a tramos.*

2.3.1.2. Elementos algebraicos genéricos de una puerta de alto orden

Una primera generalización (manteniendo el carácter de una puerta) de los elementos anteriores puede aportar nuevos datos que *ayuden* a representar a cualquier elemento dinámico del tipo (2.1) con elementos más simples.

Definición 11 (elemento $v^{(\alpha)} - i^{(\beta)}$): *Un elemento de dos terminales definido por una relación constitutiva algebraica que liga solamente a las variables* $v^{(\alpha)}$ *e* $i^{(\beta)}$*, con* α *y* β *enteros, se denomina elemento* $v^{(\alpha)} - i^{(\beta)}$*, además estará definido por una relación constitutiva de la forma*

$$h(v^{(\alpha)}, i^{(\beta)}) = 0 \tag{2.28}$$

Se puede dibujar en el plano la malla de puntos (α, β), representando cada uno a un posible elemento de esta categoría. Sobre dicha figura, *diagrama de Philippow*, se obtienen como casos particulares los estudiados hasta el momento. Se pueden clasificar, o ponerles nombre, a todos los elementos del diagrama de Philippow atendiendo al comportamiento incremental linealizado[35].

Diremos finalmente que hay razones importantes para que estos elementos no deban ser despreciados[36]. Un caso particular de interés práctico lo constituye el elemento denominado FDNR, resistencia negativa dependiente de la frecuencia; su versión lineal, definida por $i = kv^{(2)}$ con $k > 0$, se comporta en alterna (ω) como $i(t)/v(t) = -k\omega^2$, puede ser sintetizada circuitalmente y ha sido utilizada con ventaja en el diseño de filtros.

En la Fig. 2.3 y Tabla 2.1 se dan símbolos y notación textual, en la cual se incluyen las ecuaciones del elemento (siendo (v_{P_N}, i_P) las variables relacionadas del mismo (v_k, i_k) con k dirigido de P a N).

Nombre elemento	**Símbolo**	**Terminales**		**Ecuaciones**
Resistor	rj	P	N	$h(v_{P\_N}, i_P, t) = 0$
Generador de voltaje	vj	P	N	$v_{P\_N} = u_s(t),\ \forall i_P$
Generador de corriente	ij	P	N	$i_P = u_s(t),\ \forall v_{P\_N}$
Condensador	cj	P	N	$h(v_{P\_N}, i_P^{(-1)}, t) = 0$
Inductor	lj	P	N	$h(v_{P\_N}^{(-1)}, i_P, t) = 0$
Memristor	mj	P	N	$h(v_{P\_N}^{(-1)}, i_P^{(-1)}, t) = 0$
Elemento de alto orden	πj	P	N	$h(v_{P\_N}^{(-\alpha)}, i_P^{(-\beta)}, t) = 0$

Tabla 2.1 Notación textual para elementos algebraicos de una puerta

[35] Obteniéndose elementos que se comportan como resistencias, capacidades o autoinducciones *dependientes de la frecuencia*, lo cual tiene interés en la imitación (modelización) de algunos comportamientos reales de dispositivos físicos.

[36] Una de ellas se refiere a la propia no linealidad, en efecto, obsérvese que si la relación constitutiva es lineal, entonces todos los elementos de una misma diagonal (de 45º) del diagrama de Philippow son iguales (con todas las posibles c.i. nulas); pero si no lo es, entonces todos los elementos del diagrama son independientes, en el sentido de que ninguno de ellos puede expresarse conectando entre si cualesquiera otros elementos del diagrama.

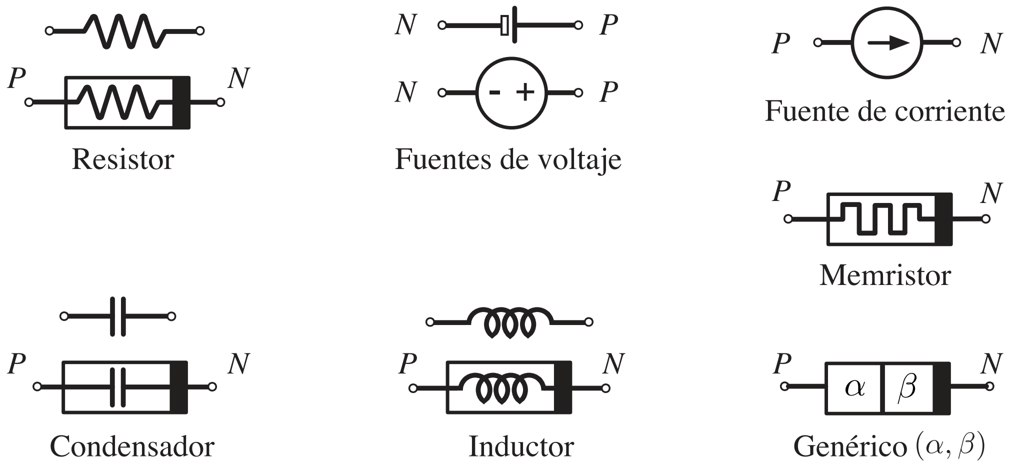


Figura 2.3: Elementos algebraicos de una puerta

Pues bien, *en general es imposible modelar un dispositivo de m puertas utilizando solamente los elementos básicos de una puerta.* Por ello a continuación vamos a continuar ampliando las definiciones anteriores.

2.3.2. Elementos algebraicos multiterminal y multipuerta

En primer lugar se introducen las definiciones que de alguna manera engloban a todos los elementos algebraicos, incluidos los de la Sección precedente como casos particulares. En segundo término se estudian casos particulares y ejemplos, desarrollando con más detalle aquellos de uso común. Como referencia se utilizará la Fig. 2.4 y después de lo expresado en el Capítulo 1, bastaría hacer referencia a los elementos *multipuerta*[37].

2.3.2.1. Multipuertas básicas

Entendemos como multipuertas básicas la extensión de las estudiadas anteriormente, a saber Resistor, Condensador, Inductor y Memristor.

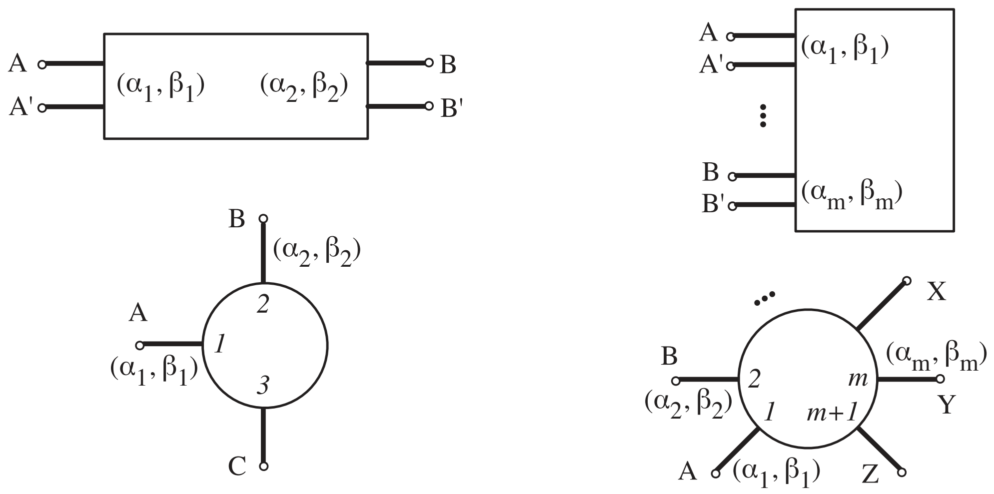
Definición 12 (elementos básicos multipuerta): *Un elemento de m puertas se denomina resistor, condensador o inductor de m puertas (m+1 terminales) si y solo si su relación constitutiva puede expresarse por una relación algebraica denotada en cada caso por*

$$h_R(v,i,t)=0 \quad h_C(v,q,t)=0 \quad h_L(\phi,i,t)=0 \quad h_M(\phi,q,t)=0 \qquad (2.29)$$

las cuales relacionan solamente las variables de m-componentes $\{v,i\}$, $\{v,q\}$, $\{\phi,i\}$ o $\{\phi,q\}$, según el caso al que estemos haciendo referencia.

La primera de las expresiones anteriores corresponde a lo que ya hemos llamado *elementos resistivos multipuerta.*

[37] Engloban a los de tipo *multiterminal* como casos particulares.



a) Elementos 2-puertas y 3-term. b) Elementos m-puertas y (m+1)-term.

Figura 2.4: Elementos algebraicos multiterminal y multipuerta

2.3.2.2. Multipuertas de alto orden y multipuertas mixtas

En esta categoría englobamos la extensión directa de las anteriores (cuando los parámetros *(α_j,β_j)* son de *alto orden* e iguales para todas las puertas) y la generalización máxima que puede obtenerse (cuando los pares permitidos *(α,β)* pueden ser diferentes de unas puertas a otras), es decir cuando $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ y $\beta \equiv (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ sin restricciones corresponde a las *multipuertas mixtas*.

Dado que las segundas engloban a las primeras consideramos aquellas como un caso particular de éstas e introducimos una única definición.

Definición 13 (elemento multipuerta mixto): *Un elemento de m puertas definido por una relación constitutiva que ligue a las* $2m$ *variables* $v^{(\alpha)} = (v_1^{(\alpha_1)}, v_2^{(\alpha_2)}, \cdots, v_m^{(\alpha_m)})^T$ *y* $i^{(\beta)} = (i_1^{(\beta_1)}, i_2^{(\beta_2)}, \cdots, i_m^{(\beta_m)})^T$*, es decir con* $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ y $\beta \equiv (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ *y (α_j,β_j) pares cualesquiera de enteros, en la forma m-dimensional*

$$h(v^{(\alpha)}, i^{(\beta)}, t) = 0 \tag{2.30}$$

se denomina elemento básico m-multipuerta mixto de tipo (α, β)*.*

Nombre	**Símb**	**Term**	**Ecuaciones**
3-term	τj	A B C	$h_1(v_1^{(\alpha_1)}, i_1^{(\beta_1)}, v_2^{(\alpha_2)}, i_2^{(\beta_2)}, t) = 0$; $h_2(\cdot) = 0$
$(m+1)$-ter	τj	A B ... Z	$h_1(v_1^{(\alpha_1)}, ..., i_m^{(\beta_m)}, t) = 0$; ...; $h_m(\cdot) = 0$
2-puertas	πj	A A' B B'	$h_1(v_1^{(\alpha_1)}, i_1^{(\beta_1)}, v_2^{(\alpha_2)}, i_2^{(\beta_2)}, t) = 0$; $h_2(\cdot) = 0$
m-puertas	πj	A A' ... Z Z'	$h_1(v_1^{(\alpha_1)}, ..., i_m^{(\beta_m)}, t) = 0$; ...; $h_m(\cdot) = 0$

Tabla 2.2 Notación textual para elementos algebraicos multiterminal y multipuerta

2.3.2.3. Esquema general

Todos los elementos algebraicos caben en la clasificación siguiente. Nótese que para $m = 1$ se engloban los de una puerta vistos en la Sección anterior.

Elementos algebraicos	**Subclase**	α	β
Básicos			
	Resistor	$(0, 0, \ldots, 0)$	$(0, 0, \ldots, 0)$
	Condensador	$(0, 0, \ldots, 0)$	$(-1, -1, \ldots, -1)$
	Inductor	$(-1, -1, \ldots, -1)$	$(0, 0, \ldots, 0)$
	Memristor	$(-1, -1, \ldots, -1)$	$(-1, -1, \ldots, -1)$
Mixtos y de alto orden		$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$	$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$

Tabla 2.3 Clasificación de los elementos algebraicos

Además los elementos multipuerta algebraicos pueden a su vez ser *no mixtos*, cuando $\alpha_i = \alpha_j$ *y* $\beta_i = \beta_j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, o *mixtos* cuando no sea así.

2.3.3. Casos particulares de mayor interés

Entre los t-independientes se encuentran muchos ejemplos de gran interés en Electrónica, por lo que haremos una descripción más detallada de ellos, simultaneando los lineales con los no lineales, y cuando sea necesario desarrollando los procedimientos de linealización. Comenzamos, en el orden de la tabla anterior por las bipuertas resistivas.

2.3.3.1. Bipuertas y multipuertas resistivas

Empezando por las bipuertas, en este caso las variables implicadas en la definición son

$$v = (v_1, v_2)^T \qquad i = (i_1, i_2)^T \tag{2.31}$$

y la relación constitutiva o característica podría escribirse en la forma compacta

$$C = \{(v_1, v_2, i_1, i_2) \mid \; h_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0, \; h_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0\} \tag{2.32}$$

la cual puede usualmente convertirse (*teorema de la función implícita* mediante) en al menos una de $C_2^4 = 6$ formas no lineales diferentes según el par de variables que se tomen como independientes.

$$y_1 = \hat{y}_1(x_1, x_2) \qquad y_2 = \hat{y}_2(x_1, x_2)$$

La denominación *controlada por corriente*, *controlada por voltaje*, *híbrida (1)*, *híbrida 2*, de *transmisión 1* y de *transmisión 2*, responden a las elecciones como variables independientes de (respectivamente[38]):

$$(i_1, i_2) \quad (v_1, v_2) \quad (i_1, v_2) \quad (v_1, i_2) \quad (v_2, -i_2) \quad (v_1, i_1) \tag{2.33}$$

En cada caso la característica del resistor pasa a ser un par de superficies definidas sobre un determinado dominio del espacio de entrada que ahora es bidimensional.

En el caso de que h_1 y h_2 sean *lineales* o puedan linealizarse[39] alrededor de un Q dado, caben las seis representaciones caracterizadas respectivamente por las seis matrices 2×2 de parámetros constantes o Jacobianos obtenidos en el punto de operación que suelen designarse, también respectivamente por

$$(R) \quad (G) \quad (H) \quad (H') \quad (T) \quad (T') \tag{2.34}$$

Así, por ejemplo la matriz de parámetros (H) es la que define a las ecuaciones

$$\begin{aligned} v_1 &= h_i i_1 + h_r v_2 \\ i_2 &= h_f i_1 + h_o v_2 \end{aligned} \tag{2.35}$$

provengan los parámetros de una bipuerta lineal o de una bipuerta no lineal linealizada en torno a un punto de operación Q dado (*pequeña señal*). En este último caso, las variables del sistema de ecuaciones citado deberían ser $(\widetilde{i}_1, \widetilde{v}_2)$ las independientes y $(\widetilde{v}_1, \widetilde{i}_2)$ las dependientes.

Antes de continuar veamos unas *observaciones importantes sobre las bipuertas lineales* (sean resultado de una linealización o lineales *per se*):

1. El *nombre* de cada parámetro se deriva de su definición[40]. Así por ejemplo, $h_f = \partial \widehat{i_2}(i_1, v_2)/\partial i_1\Big|_Q$ no puede denominarse más que *ganancia directa de corriente con la salida en cortocircuito* (y en su caso, para *pequeñas señales*) en el punto Q. La misma idea se obtendría de la expresión $\widetilde{i}_2 = h_f \widetilde{i}_1 + h_o \widetilde{v}_2$.

[38]En el caso de la forma *transmisión 1* se usa $-i_2$ como variable independiente (en lugar de i_2), y en el caso de *transmisión 2* se usa $-i_2$ como variable dependiente (en lugar de i_2). En ambos casos se hace así por razones prácticas, ya que en el estudio de acoplamientos se prefiere algunas veces utilizar la corriente que la puerta de salida *inyecta* en la carga, convirtiéndose así en la corriente de entrada de la siguiente etapa, sin que haya que hacer cambio de signos al aplicar LCK.

[39]El desarrollo de Taylor para funciones de más de una variable conduce, para el caso en que $f(x)$ esté representando las dos funciones $f_1(x_1, x_2)$ y $f_2(x_1, x_2)$ a

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}_Q + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_Q \begin{pmatrix} x_1 - X_{1,Q} \\ x_2 - X_{2,Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

que se escribe a veces $f(x) = f(X_Q) + J(X_Q)(x - X_Q) + \epsilon$ donde la matriz cuadrada de primeras derivadas parciales se denomina matriz *Jacobioano* de la función $f(x)$ en X_Q, es decir está formada por *constantes reales obtenidas en el punto de operación,* y tanto f como x, X_Q, $\widetilde{x} = x - X_Q$, y ϵ son vectores columna de dos componentes.

[40]En lugar de los subíndices numéricos utilizados en las matrices se suelen utilizar los subíndices i por *entrada* (input), r por *inverso* (reverse), f por *directo* (fordward) y o por *salida* (output).

2. La *medida* de cualquier parámetro no es otra cosa que la aplicación estricta de su definición: polarizar en Q, excitar con pequeña señal y establecer la ligadura correspondiente.

3. La *obtención gráfica* a partir de las caracteristicas usuales de los dispositivos electrónicos, se desprende también de la misma definición. En este caso aplicada a un dispositivo cualquiera de tres terminales se suele utilizar un segundo subíndice que indique el terminal de referencia de la bipuerta con nodo común asociada. Por ejemplo h_{fe} sería la designación para el caso en que tal nodo común estuviera designado por E (emisor) en el BJT.

4. Dada una representación lineal de parámetros bipuerta, por ejemplo la matriz de parámetros (R), se puede pasar a otra representación, por ejemplo a parámetros (G), con suma facilidad. Nótese que la segunda *existe* si y solo si[41] $\det(R) \neq 0$.

5. Si se dispone de una bipuerta cuyo interior está formado por la interconexión de cualesquiera elementos, no importa su número (p. ej. 1000) y se sabe que todos ellos *son lineales*, entonces, si las ecuaciones tableau garantizan la existencia de la solución[42], es eviente que la bipuerta puede representarse por sólo dos ecuaciones (es decir, 4 parámetros). Si algún elemento fuera no lineal la bipuerta sería no lineal y sólo se podría hablar de aproximaciones lineales de pequeña señal en cada punto de operación que planteáramos.

Ejemplos de bipuertas resistivas lineales

- *Fuentes dependientes (o controladas) lineales*: Poseen todos los elementos de las matrices citadas nulos, salvo los que se indican en la Tabla 2.4:

Nombre	CCVS	VCCS	CCCS	VCVS
Def	$R_{21} = r_m$ $R_{ij\neq 21} = 0$	$G_{21} = g_m$ $G_{ij\neq 21} = 0$	$H_{21} = \alpha$ $H_{ij\neq 21} = 0$	$H'_{21} = \mu$ $H'_{ij\neq 21} = 0$

Tabla 2.4. Fuentes dependientes lineales

El nombre de cada una se sigue de su función y viceversa. La definición de todas ellas se da en la Tabla 2.5. Por ejemplo una CCCS es una fuente de corriente controlada por corriente (de *Current Controlled Current Source*) que

[41]Nota: evítense atajos incorrectos, por ejemplo $r_i = R_{11}$ no coincide con $(g_i)^{-1} = (G_{11})^{-1}$ ni en valor ni en significado (obsérvese que r_i se obtiene con la salida en circuito abierto, mientras que g_i en cortocircuito).

[42]Excitando la bipuerta con generadores que definan las variables independientes elegidas, las ecuaciones tableau permiten obtener las variables dependientes de la bipuerta. Sólo existe solución si es no nulo el determinante de los coeficientes de la matriz tableau (o MNA).

se corresponde con (2.35) siendo nulos todos sus parámetros salvo el h_f. Nótese que cada una está definida por dos ecuaciones, aunque la primera de las dos ($v_1 = 0$ en este caso) se suele omitir (en el caso citado se observa que la fuente dependiente cuando se usa en un circuito no "carga" la rama de la que toma la corriente su primario).

Puede demostrarse que *con las dos primeras (acopladas en serie) se pueden sintetizar las otras dos.* Quizás las propiedades más importantes de estos elementos son:

1. Permiten definir realimentaciones y "acoplamientos asimétricos" entre partes alejadas entre si en un circuito o sistema eléctrico.

2. Constituyen los cuatro tipos posibles de *amplificadores ideales*, ¡con ganancia de potencia infinita! y, como consecuencia de ello,

3. Permiten introducir el concepto de *ganancia* de voltaje, de corriente o mixta (de *transresistencia* o de *transconductancia*) en los modelos circuitales de dispositivos electrónicos de manera muy natural.

4. En este último sentido son el camino idóneo para introducir el concepto de *circuito equivalente.* Así el circuito equivalente con parámetros H de una bipuerta lineal contiene en la entrada una VCVS en serie con h_i (Ω, Ohms) y en la salida una CCCS en paralelo con h_o (S, Siemens).

Finalmente, para ser consistentes con *spice*, utilizaremos como *notación textual (prespice)* para las mismas las formas particulares siguientes:

Nombre	**Símb**	**Terminales**	**Ecuaciones**	
CCVS	hj	2 2' 1 1'	$v_2 = r_m i_1$	$v_1 = 0$
VCCS	gj	2 2' 1 1'	$i_2 = g_m v_1$	$i_1 = 0$
CCCS	fj	2 2' 1 1'	$i_2 = \alpha i_1$	$v_1 = 0$
VCVS	ej	2 2' 1 1'	$v_2 = \mu v_1$	$i_1 = 0$

Tabla 2.5 Notación textual de fuentes dependientes lineales

Los dos primeros nodos contienen el generador dependiente y los dos últimos muestrean la variable de control[43]. Nótese que todas ellas se podrían denominar πj haciendo uso de nuestra notación general para multipuertas.

- *Transformador ideal*: Se define con los elementos no nulos de H:

$$H_{12} = n \quad H_{21} = -n \tag{2.36}$$

[43]Realmente en *spice* para los casos $i_1 = 0$ se utiliza un generador de tensión de valor nulo definido aparte. Si hubiéramos utilizado a *spice* como referencia esta fuente se notaría $hj \;\; 2\,2' \;\; vcntrl \;\; v_2 = r_m i_1$ definiendo además aparte como otro elemento $vcntrl \;\; 1\,1' \;\; v = 0$, entendiendo que la puerta de control de la fuente dependiente hace uso de la corriente $i_1 = i(vcntrl)$.

a n se le denomina *razón de espiras*. Obsérvese que es un elemento no energético, $v^T i = 0$, su relación constitutiva no depende de la frecuencia, y, $R_{in} = v_1/i_1 = n^2 R_L$ si la puerta 2 se carga con R_L.

- *Girador ideal*: Idem con

$$G_{12} = G \quad G_{21} = -G \tag{2.37}$$

G se denomina *conductancia de giro.* También no energético, $v^T i = 0$; además cargado con C_L se comporta como un inductor lineal de $L = C_L/G^2$, y con $G = 1$ convierte un resistor no lineal en su dual.

Ejemplos de bipuertas resistivas no lineales

- *Fuentes controladas no lineales*: Corresponden a la generalización no lineal de las fuentes dependientes lineales. Así una CCCS bipuerta no lineal estaría definida por las dos ecuaciones $v_1 = 0$ e $i_2 = \widehat{i}_2(i_1, v_2)$, eventualmente la segunda puede ser unidimensional, $i_2 = \widehat{i}_2(i_1)\, \forall v_2$.

- *Modelos de interruptores:* Un modelo genérico para un interruptor simple que previene su operación discontinua –ésta suele ser indeseable en la simulación numérica– es

$$sj \;\; 2\, 2' \, 1\, 1' \;\; i_2 = f(v_1, v_2) \;\; i_1 = 0$$

donde $f(\cdot)$ es una función suave *ad hoc*[44]y en ocasiones se utiliza una aproximación afín.

- *Modelos de transistores* en cc: Entre los modelos de uso más frecuente pertenecientes a esta clase podemos citar para el BJT todos los modelos de cc (Ebbers Moll en distintas configuraciones, Gummel Poon en cc, etc.), idem del transistor de efecto de campo tanto en sus versiones MOSFET (Shichman Hodges, submicrónico, etc.) como MESFET, o de tipo JFET.

Ejemplos de multipuertas resistivas lineales

- *Fuentes controladas lineales* (multipuerta): Extensión de las fuentes controladas lineales bipuerta. Poseen la particularidad de que el propio generador dependiente (corriente o tensión, y) puede estar controlado por tensiones de unas ramas y corrientes de otras, x_k, diferentes a la suya, en la forma lineal sería $y = \sum a_k x_k$.

[44]La forma utilizada por *spice*, para hacer que se comporte como una baja resistencia cuando $v_1 = v_1(on)$ y alta si $v_1 = 0$, es hacer $f(v_1, v_2) = g(v_1)v_2$ donde $g(v_1)$ vale g_{off} (p. ej. 10^{-7} S) para $v_1 \leq 0$, vale g_{on} (p. ej. 10^3 S) para $v_1 \geq v_1(on)$, y en $(0, v_1(on))$ hacer que sea una determinada función suave, usualmente derivable. A veces basta $g_{off} = 0$ y $r_{on} \to 0$.

- *Transformador ideal de tres puertas*: Este ejemplo es una extensión del de dos puertas. Se define como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n_1}{n_3} \\ 0 & 0 & \frac{n_2}{n_3} \\ -\frac{n_1}{n_3} & -\frac{n_2}{n_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

  También es pasivo, $v^T i = 0$, $\forall t$, como es fácil demostrar.

- *Circulador de tres puertas*: Este ejemplo tiene interés en dispositivos de intercomunicación de audio, en microondas e incluso en aceleradores de partículas (para anular reflexiones indeseadas). Se define como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R & -R \\ -R & 0 & R \\ 0 & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

  Es pasivo (la versión resistiva aquí definida), es no recíproco (como se verá) y posee interesante capacidad de dirigir cualquier señal de entrada hacia la puerta más próxima, en un sentido de giro preestablecido.

Ejemplos de multipuertas resistivas no lineales

- *Fuentes controladas no lineales* (multipuerta): Es una extensión no lineal de las ya vistas.

- *Amplificador operacional (modelo AO)*: Con esta denominación hacemos referencia a uno de los modelos utilizados por los diseñadores como si fuera un elemento ideal más, dada la extraordinaria difusión del AO real, por lo que la traslación de los diseños al laboratorio es prácticamente directa. Pues bien, el AO es un *elemento de cuatro terminales*: Una entrada "+", una entrada "-", una salida y una única referencia común[45] (suponer que las fuentes de alimentación están incorporadas "dentro" del conocido símbolo triangular del elemento). Las ecuaciones de definición son

$$i_- = I_{B1} \quad i_+ = I_{B2} \quad v_o = f(v_d) \tag{2.40}$$

  siendo $v_d = v_+ - v_-$ la entrada diferencial y v_o el voltaje entre el terminal de salida y la tensión de referencia citada.

- *Idem AO ideal*: Es una particularización PWA (afín a tramos) del anterior, en la cual se supone además que $i_+ = i_- = 0$, con lo que se convierte en una *VCVS*, siendo la puerta de entrada (v_d, i_d), la de salida (v_o, i_o) y sus sus ecuaciones

$$i_d = 0 \quad v_o = \begin{cases} -E_{sat} & v_d < -E_{sat}/A \\ Av_d & -E_{sat}/A < v_d < E_{sat}/A \\ +E_{sat} & v_d > E_{sat}/A \end{cases} \tag{2.41}$$

[45] El AO *nunca se debe esquematizar con 3 terminales*, si así se hiciera su corriente de salida ¡sería nula! (envuélvase el AO con una gaussiana y aplíquese LCK a la misma y despréciense los valores de i_+ e i_-).

Para evitar ambigüedades denominaremos *AO ideal de ganancia infinita* el que se obtiene cuando se hace tender $A \to \infty$ en la expresión precedente[46].

- *Amplificador operacional de transconductancia (OTA)*: Por razones similares al caso anterior a veces los diseñadores también lo utilizan como elemento de circuito –cuando de hecho son modelos simplificados de bloques circuitales reales disponibles en casi todas las tecnologías integradas– de forma directa. Su versión bipuerta como en el caso precedente se puede definir como

$$i_d = 0 \;\; i_o = g_m v_d \; \forall i_o \in (-I_{sat}, +I_{sat}) \tag{2.42}$$

esto es, una CCCS, considerándose a veces la conductancia como no lineal, e incluso a veces dependiente de otra tensión, para emular la programabilidad de la ganancia del par diferencial en el que se basa.

- *Conveyor de corriente (CCII)*: Fue introducido por Smith y Sedra en 1968 como *CCI* y posteriormente replanteado como $CCII\pm$, llamado *conveyor de segunda generación*, al que nos referiremos aquí. Prescindiendo de los terminales de alimentación –reducido a un terminal de referencia como en el AO– posee tres terminales más X, Y, y Z. Este elemento de cuatro terminales se caracteriza –según su usual descripción– por

  1. $i_Y = 0$, nodo de entrada de alta impedancia
  2. $v_X = v_Y$ el voltaje del nodo de baja impedancia (X) sigue (a modo de una *VCVS*) al voltaje de la entrada de alta impedancia (Y).
  3. $i_Z = \pm i_X$, la corriente de entrada, i_X, en el borne de baja impedancia, se "refleja" en la salida (a modo de un *CCCS*) de alta impedancia (Z).

     Visto como un elemento de cuatro terminales su relación constitutiva es, realmente

$$\begin{pmatrix} i_Y \\ v_X \\ i_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_Y \\ i_X \\ v_Z \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

     Este elemento permite, entre otras peculiaridades, la síntesis de muchas funciones de circuito antes preferidas con AO.

- *Idem del multiplicador analógico*: Funcionalmente hablando es un dispositivo de 4 terminales. Designando las corrientes dirigidas hacia el dispositivo por los mismos subíndices que los respectivos nodos, es

$$i_1 = 0 \quad i_2 = 0 \quad v_{3\_4} = M v_{1\_4} v_{2\_4} \tag{2.44}$$

[46]La región de trabajo del AO depende del circuito externo (amplitud de las excitaciones, estabilidad, etc.)

Se puede convertir en una tripuerta tomando el nodo 4 como común (con $v_1 = v_{1\_4}$, $v_2 = v_{2\_4}$, $v_3 = v_{3\_4}$), resultando

$$i_1 = 0 \quad i_2 = 0 \quad v_3 = Mv_1v_2,\ \forall i_3 \tag{2.45}$$

de modo que en al grafo del circuito del que forme parte, en la práctica, sólo aporta una rama $v-$controlada.

2.3.3.2. Pasividad y reciprocidad de bipuertas resistivas

- Una *bipuerta resistiva lineal o no lineal* es *pasiva* (resp., *estrictamente* pasiva) sii $\forall(v,i) \in h(v,i) = 0$ es $v^T i \geq 0$ (resp., $v^T i > 0$, excepto el origen), con el significado ya conocido. La extensión a multipuertas de cualquier tipo está implícita en las expresiones que acabamos de utilizar.

- Por su parte la *bipuerta resistiva lineal* v-controlada o $i-$controlada, aceptando que (x_i, y_i) son variables de la misma puerta en la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_i & k_r \\ k_f & k_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

es *recíproca* si cumple $y_2(u_s, 0) = y_1(0, u_s)$, decir si

$$k_r = k_f \tag{2.47}$$

En suma, si la *matriz* K *es simétrica* ($K = K^T$). Nótese que el girador no es recíproco es *antirrecíproco* por ser $k_r = -k_f$ (produce el efecto opuesto en la corriente y se introduce para ello).

La simetría de K también queda patente en el caso multidimensional v-controlado o i-controlado, extendiendo la definición de la reciprocidad de la forma $y_2(u_s, 0, 0, \ldots, 0) = y_1(0, u_s, 0, \ldots, 0) = \cdots$.

- Para una *bipuerta resistiva no lineal* $y = f(x)$, v-controlada o i-controlada, se dice que es *recíproca* sii $\forall(x_1, x_2) \in y = f(x)$ lo es su representación linealizada $\widetilde{y} = \widetilde{K}\widetilde{x}$, siendo

$$\widetilde{K} = J(\frac{y}{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \ \textit{es decir}\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

supuesto que f_1, f_2 son derivables con continuidad en tales puntos. La extensión al caso multidimensional[47] es similar a la expresada en el párrafo anterior.

[47] Para el caso unidimensional $y = kx$ la reciprocidad no tiene el sentido conceptual dado en la subsección 2.3.2, no obstante, dado que para este caso la matriz $K = [k]$ es simétrica se suele aceptar que todos ellos son recíprocos. También en el caso no lineal, $y = f(x)$, supuesto también lógicamente que $f \in C^1$.

2.3.3.3. Bipuertas inductivas

Un elemento de gran interés en la modelización de inductores físicos acoplados por su flujo e ideales es el del *inductor no lineal bipuerta* definido por

$$\begin{aligned} \phi_1 &= f_1(i_1, i_2) \\ \phi_2 &= f_2(i_1, i_2) \end{aligned} \tag{2.48}$$

En nuestra clasificación es una bipuerta básica de tipo $\alpha = (-1, -1)$, $\beta = (0{,}0)$. Como ejemplos de mayor uso se pueden citar

- *Inductor lineal bipuerta:* Con mucha frecuencia es posible utilizar el inductor lineal bipuerta. A veces se representa como $\phi = Li$, o $v = L\dot{i}$ siendo L la *matriz de inductancia*, e incluso en ocasiones $\dot{i} = \Gamma v$ siendo ahora Γ la *matriz de inductancia recíproca.* Su definición es

  $$\begin{aligned} \phi_1 &= L_i i_1 + M i_2 \\ \phi_2 &= M i_1 + L_o i_2 \end{aligned} \tag{2.49}$$

  A M se le denomina *inductancia mutua*, mientras que a L_i y a L_0 *inductancias del primario y secundario* respectivamente. Realmente se suele definir $k = M/\sqrt{L_i L_o}$, *coeficiente de acoplamiento*, de tal modo que $k = 0$ indica que no hay acoplamiento entre los devanados ($M = 0$). En la definición se hace $L_r = L_f = M$, por razones energéticas[48].

  También por consideraciones físicas, a M (y por tanto a k) se le permite ser positiva o negativa según la geometría del arrollamiento y la definición de las variables de puerta relativas a tal geometría[49].

- *Tripuerta inductiva de flujo controlado por corriente*: Es la extensión del anterior al caso de tres arrollamientos acoplados. La expresión correspondiente al caso lineal, incluyendo los parámetros que caracterizan las inductancias mutuas dos a dos, son

  $$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

  Con significados similares a los del elemento de dos puertas. Se puede extender esta definición a un número mayor de puertas.

[48] Al igual que un inductor lineal, los inductores acoplados almacenan energía, analíticamente es $W(i_1, i_2) = (1/2)i^T Li$. Físicamente se desea modelizar el hecho de que $W(i_1, i_2) \geq 0$, $\forall i_1, i_2$. Pues bien, analíticamente $W(i_1, i_2) > 0$, $\forall i_1, i_2 \neq 0$ *sii* $L_i, L_o > 0$ y $M^2 < L_i L_o$, es decir, la matriz L debe ser definida positiva. Nótese también que la última condición significa $k^2 < 1$, o $|k| < 1$, que indica que es imposible tener un *coeficiente de acoplamiento* mayor que 1.

[49] Cuando es necesario (Electrotecnia, Electrónica de Potencia, etc.) se utiliza la conocida *notación de puntos* que representan los extremos en los que las las tensiones de entrada y salida crecen (o decrecen) al mismo tiempo.

Aunque podrían definirse más elementos de esta categoría, los ejemplos planteados son suficientes para comprender los modelos más utilizados en la bibliografía sobre el tema. En su lugar terminamos de introducir los elementos algebraicos que faltan.

Ejemplos de multipuertas mixtas

En un proceso de generalización serían similares a los anteriores eliminando la restricción de que todas las puertas tengan el mismo par (α_j,β_j). Entre los infinitos casos que pueden plantearse consideremos los de mayor interés:

- *Fuentes controladas no lineales multiterminales de alto orden*: Denominamos fuente de tensión x-controlada *(CxVS)* ó fuente de corriente x-controlada *(CxCS)*, las definidas respectivamente por las relaciones constitutivas siguientes en las que cada componente del vector $(m-1)$-dimemsional x puede ser o bien $x_j = v_j^{(\alpha_j)}$(en cuyo caso $i_j = 0$, es decir no carga los nodos a los que se conecta) o bien $x_j = i_j^{(\beta_j)}$(en cuyo caso $v_j = 0$, no carga a la rama de la que toma la información), para $j = 1, 2, \cdots, m-1$ y

$$CxVS: \; v_m = f(x)\, \forall i_m \qquad CxCS: \; i_m = f(x)\, \forall v_m \tag{2.51}$$

  Obsérvese que en ningún caso la variable de control x contiene variable alguna de la puerta de salida.

- *Mutadores*: Es una familia de bipuertas algebraicas lineales mixtas. En su relación constitutiva interviene para cada puerta, es decir para $j = 1, 2$, una combinación $\{v_j^{(\alpha_j)} i_j^{(\beta_j)}\}$ con $\alpha_j, \beta_j \in \{-1, 0, 1\}$. La propiedad de mayor interés de este elemento es que la conexión de un *elemento básico* de dos terminales, en general no lineal, a una de sus puertas, implica su transformación (mutación) en *otro elemento básico*, del mismo conjunto, cuando se 've' desde la otra puerta[50]. Así el mutador definido por $\phi_1 = -q_2$ y $i_1 = v_2$, es capaz de convetir un condensador no lineal en la puerta 2 en un inductor no lineal cuando se ve desde la 1.

En general, la soltura en la manipulación de los elementos estudiados, aunque no todos son imprescindibles como veremos a continuación, aporta al diseñador de circuitos o de modelos una gran flexibilidad para encontrar las mejores soluciones.

Nótese que en general la solución a los problemas de síntesis, en contraposición con los de análisis, tiene muchas connotaciones con el arte[51] por carecer de métodos sistemáticos y estar basados en la experiencia del propio deseñador.

[50]Existe bibliografía muy interesante, ver cap. 3, relacionada con el "diseño" de circuitos electrónicos que se comporten como *mutadores*, los cuales podrían ser usados para realizar tales mutaciones (recuérdese que en tecnología integrada no se pueden hacer inductores de tamaño realista para aplicaciones de frecuencias por debajo de decenas de MHz). También se pueden definir *mutadores de alto orden.*

[51]El arte de inventar se denomina *heurística*, de "heurisko" (del gr., hallar)

2.4. Acoplamientos de elementos

En primer lugar ampliaremos la *notación textual*, *prespice*, para representar *elementos compuestos* obtenidos a partir del interconexionado de elementos más simples o con otros que a su vez puedan ser compuestos.

La notación permite en principio cualesquiera conexiones, p. ej. serie, antiserie,... entre puertas, conexión de multipuertas de diferente número de puertas, reducción o aumento de puertas o terminales, conexión de elementos de parámetros concentrados de cualquier tipo (algebraicos, dinámicos, lineales, no lineales, etc.), etc.

La cuestión que debe abordarse a continuación es la de la *validación* del elemento compuesto tentativo como elemento de circuito, para lo cual es preciso acudir a las ecuaciones que representan la topología del elemento compuesto y a las relaciones constitutivas de sus componentes.

En esta Sección se va aún más lejos estudiando con detalle dos tipos de acoplamiento de especial importancia.

2.4.1. Descripción textual de elementos compuestos y circuitos

Se puede describir cualquier interconexión de elementos asignándole un *nombre* al posible *elemento compuesto* resultante, en la forma ya vista en (2.5).

Ahora daremos dos pasos más en la representación textual de elementos compuestos:

1. Se permitirá invocar, en la definición de un elemento nuevo, a otro definido con anterioridad mediante una sentencia similar a la de los elementos simples, salvo que debe indicar su nombre. Tal sentencia es

$$xj \ \ nombre \ \ \langle nodos\_externos\rangle$$

   donde xj *nombre*, p. ej. $x7$ $nand3CMOS$ representaría un subcircuito (elemento compuesto) previamente definido, y $\langle nodos\_externos\rangle$ representa la secuencia de nodos de nuestro elemento compuesto actual a los que está conectado[52].

2. Se admite la invocación sucesiva (p. ej. un elemento invoca a otro, éste a un tercero, ... y así sucesivamente), con la salvedad de que no deben producirse recursiones.

3. Las dos observaciones precedentes hacen necesario poder hacer uso de un listado de elementos previamente definidos, p. ej. para un campo determinado. Llamaremos $Biblioteca\_k$ a cada uno de estos listados. Así

[52]Los nodos internos del elemento invocado se denominan *nodos locales* y su numeración es irrelevante exteriormente.

Biblioteca_3 podría contener todos los cuircuitos digitales CMOS de una tecnología dada, la sentencia

$$\textit{include Biblioteca\_k}$$

introducida en el interior de la definición del circuito que queremos describir implica que se dispone de todos los elementos de la misma, es decir cualesquiera de ellos pueden ser invocados en la descripción del mismo.

En suma (intentando respectar la consistencia con *spice*), la *descripción textual prespice* de tal circuito tendría la apariencia siguiente

$$\begin{array}{l} \textit{circuit nombre.cir} \\ \textit{include Biblioteca\_k} \\ \vdots \\ \quad xj \; \textit{nombre} \quad \langle \textit{nodos\_externos} \rangle \\ \vdots \\ \textit{end} \end{array} \tag{2.52}$$

El planteamiento lo supondremos igualmente válido para la descripción de elementos compuestos[53] vista en (2.5).

2.4.2. Validación eléctrica de un elemento compuesto

La descripción *textual* o la gráfica (el esquema correspondiente) de un pretendido elemento compuesto, con las ecuaciones de sus componentes en ambos casos, no bastan para ser un elemento LK-válido de circuito[54].

En principio, para un elemento compuesto de m puertas (o uno de $m+1$ terminales) deben existir m ecuaciones que relacionen las variables de su grafo $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)^T$ e $i = (i_1, i_2, \ldots, i_m)^T$ –en ocasiones son necesarias $m + M$ ecuaciones incluyendo M variables anónimas– lo cual se debe comprobar analíticamente. Aún así, dado que puede haber elementos o puertas no excitables por tensión y otros no excitables por corriente[55], deberíamos investigar si para sus excitaciones externas independientes (o elementos compuestos *ad hoc*) –ahora

[53] Omitimos el paso de parámetros por ser una cuestión propia de la simulación numérica (*spice* la incorpora).

[54] Con ésto sólo evitamos que las ecuaciones estén mal definidas o presentan algún tipo de contradicciones que impidan su uso correcto. Hay otro tipo de validaciones que se considerarán en el capítulo siguiente al hablar de modelos.

[55] Una fuente de tensión o una secuencia de ellas (y/o condensadores con valores arbitrarios de su tensión) entre dos nodos no es excitable entre ellos por un generador ideal de tensión. Similarmente la existencia de un nodo al que solo confluyen fuentes de corriente (y/o inductores con valores arbitrarios de su corriente) no es excitable en el mismo por otra fuente de corriente. Incluso existen elementos no excitables ni por tensión ni por corriente (p. ej. el *nullator*), aunque éstos pueden utilizarse en combinación con otros elementos.

estaríamos hablando de *circuito*– existe un *sistema compatible de ecuaciones* para las respuestas, en su caso, si estas *existen*.

Lógicamente este planteamiento analítico del problema, es decir la obtención de la relación constitutiva del elemento compuesto, será fundamental para desvelar estas cuestiones, y permitirá además descubrir importantes propiedades de los acoplamientos de elementos, como se va a ver en los dos apartados siguientes.

En primer lugar consideraremos el problema particular del acoplamiento de elementos algebraicos cuyo resultado pueda *heredar* el mismo carácter algebraico de los componentes. Posteriormente se extiende esta idea al problema general de la Síntesis de Circuitos No Lineales (SCNL).

2.4.3. Acopamientos compatibles e incompatibles de elementos algebraicos

Para señalar que ciertas interconexiones de elementos algebraicos pueden ser *cerradas* (seguir siendo algebraicas), introducimos la siguiente definición previa.

Definición 14 (interconexiones compatibles): *Las puertas j y k de un elemento de m puertas algebraico E, o de dos elementos algebraicos E1 y E2, se dice que son compatibles si y solo si sus respectivas variables de puerta, $(v_j^{(\alpha_j)} i_j^{(\beta_j)})$ y $(v_k^{(\alpha_k)} i_k^{(\beta_k)})$ son idénticas en el sentido de que $\alpha_j = \alpha_k$ y $\beta_j = \beta_k$*

En ocasiones es más gráfica la expresión "*el mismo color*" que "*compatible*", cuando se habla de cualquier[56] interconexión entre dos puertas.

Teorema 1 (propiedad de *cierre* de la interconexión de elementos de m-puertas algebraicas): *Las interconexiones compatibles entre un grupo de puertas pertenecientes a una m-puerta algebraica, o pertenecientes a dos o más m-puertas algebraicas, siempre dan lugar a otra m-puerta algebraica. Además cada puerta de la m-puerta resultante hereda el mismo par de variables dinámicamente independientes asociadas con las m-puertas originales.*

Demostración: Consideremos el caso del acoplamiento de la puerta $(v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)})$ del elemento *E1* con la puerta $(v_k^{(\alpha_k)}, i_k^{(\beta_k)})$ del elemento *E2* (o del mismo *E1*) en *antiparalelo*, para generar la puerta $(v_l^{(\alpha_l)}, i_l^{(\beta_l)})$ del elemento compuesto E, que puede contener además otros acoplamientos. Supongamos que las relaciones constitutivas correspondientes a ambas puertas en *E1* y *E2* eran respectivamente

$$\begin{aligned} h_j(v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)}, \ldots) = 0 \\ h_k(v_k^{(\alpha_k)}, i_k^{(\beta_k)}, \ldots) = 0 \end{aligned} \tag{2.53}$$

[56]Nótese que dos puertas pueden acoplarse de múltiples formas (serie, antiserie, paralelo, antiparalelo), generen o no una nueva puerta externa para el elemento compuesto. La única limitación es la no violación de LK.

siendo (v_l, i_l) las variables de puerta de la puerta resultante. Supongamos que LK implica para este tipo de acoplamiento

$$v_l = v_j = -v_k \quad i_l = i_j - i_k \tag{2.54}$$

Podemos expresar, suponiendo que en la región de interés es[57] $\partial h/\partial x \neq 0$ siendo $x = i^{(\beta)}$ para los dos casos,

$$\begin{aligned} i_j^{(\beta_j)} &= g_j(v_j^{(\alpha_j)}, \ldots) \\ i_k^{(\beta_k)} &= g_k(v_k^{(\alpha_k)}, \ldots) \end{aligned} \tag{2.55}$$

de tal manera que la componente de la relación constitutiva asociada a la nueva puerta es algebraica (no dinámica), y de la forma

$$i_l^{(\beta_l)} = g_j(v_l^{(\alpha_l)}, \ldots) - g_k(v_l^{(\alpha_l)}, \ldots) \tag{2.56}$$

sii se cumple $\alpha_j = a_k$ *y* $\beta_j = \beta_k$, que hemos designado precisamente por α_l *y* β_l en la expresión obtenida.

El caso paralelo solmente se diferencia en algunos cambios de signo y el caso de no creación de nueva puerta implicaría $i_l = 0$.

El teorema queda demostrado si en todas las puertas acopladas se cumple la misma condición, es decir que sean del mismo *color*, sea cual sea el tipo de acoplamiento, ya que éste no modifica esencialmente las ecuaciones *LK* (2.54).

Observaciones

1. La utilización del concepto de dualidad simplifica la descripción de los problemas que podemos tratar. Así el acoplamiento dual del estudiado en la demostración pasaría a estar definido por las ecuaciones duales de las (2.54) que son $i_l = i_j = i_k$ y $v_l = v_j + v_k$ y definen un acoplamiento serie, es decir, *el acoplamiento serie es el dual del acoplamiento paralelo.*

2. La demostración es fácilmente extensible para acoplamientos *antiserie* y *antiparalelo*, también duales entre si. En todos los casos, como se ha dicho, la única condición para que el acoplamiento sea válido[58] es que sea LK-compatible.

3. La reducción de una multipuerta (resp., de un elemento multiterminal) como consecuencia de acoplamientos como los citados entre sus propias puertas (resp., terminales) es una posibilidad más común de lo que pudiera parecer. Ejemplo simples pueden ser: la conversión de un BJT en un diodo por conexión de B con C, o a la conexión de un BJT de cuatro terminales (considerando el sustrato) como elemento de tres terminales, o la

[57] Este requisito está fundamentado en el Teorema de la función implícita.

[58] Algunos *test* de validez de tales acoplamientos han sido muy citados, tal es el caso del *test de Brune*, aplicado al acoplamiento de bipuertas que se utiliza en configuraciones típicas de amplificadores realimentados (problema clásico cuando se utilizaban para ello transformadores).

de un Mosfet de doble puerta (cinco terminales considerando el sustrato) en un elemento de tres terminales.

4. Las no linealidades pueden tener efectos sorprendentes sobre el resultado, tal es el caso del acoplamiento de *resistores no lineales de dos terminales*, p. ej. el de dos elementos con característica tipo N (como el diodo túnel), o los casos duales tipo S (como el diodo de cuatro capas), o los casos híbridos correspondientes a un elemento de cada tipo, que se acoplan en cualquiera de las formas posibles para obtener un elemento obviamente también resistivo.

5. La extensión a *resistores no lineales multipuerta* con objeto de obtener una característica dada es un problema de Síntesis de especial importancia que se postpone al siguiente Capítulo. Más aun, ¿qué resistores simples o con propiedades específicas se pueden utilizar a tal fin?.

6. La extensión del apartado precedente a la obtención de un *elemento algebraico* no resistivo parece obvia, no obstante caben nuevas posibilidades de interés, por ejemplo ¿Se podría sintetizar tal elemento utilizando un resistor más o menos complejo y otros elementos algebraicos no resistivos?. La respuesta es afirmativa y se basa en la utilización de *mutadores* del orden adecuado ¡siempre que se respete el Teorema del color que acabamos de ver!, pero lo importante es que se abre la posibilidad de obtener un elemento algebraico mediante la *conexión de puertas compatibles* de elementos algebraicos aparentemente incompatibles.

En suma, la interconexión de elementos algebraicos, si se verifican las condiciones adecuadas, permite obtener un elemento algebraico. El mundo de los elementos algebraicos es accesible acoplando elementos algebraicos, aunque quede por ver la mejor forma de hacerlo, y en ningún caso los elementos dinámicos permiten obtener elementos algebraicos[59].

Lo sorprendente como veremos a continuación es que el universo de los elementos dinámicos (y por consiguiente de todos los elementos de parámetros concentrados) es accesible[60] mediante el acoplamiento de ¡sólo elementos algebraicos!.

2.4.4. Descomposición de elementos dinámicos

El Teorema 1 establece un requisito importante para la síntesis de elementos algebraicos (sea cual sea el procedimiento de síntesis). Incluso nos dice que si las conexiones no respetan el color, *acoplamientos incompatibles* (no cerrados), entonces el elemento resultante es *no algebraico* (es decir, es *dinámico*).

[59] Omitimos la consideración de estrategias de compensación o cancelación de las componentes indeseadas en las expresiones de definición de los elementos dinámicos acoplados.

[60] Puede establecerse un **Corolario** del Teorema 1 que diga que *todo acoplamiento no compatible genera un elemento dinámico*, pero ello no precisaría cuáles son los elementos algebraicos requeridos para un elemento dinámico dado, tal y como lo hace el Teorema 2.

Podría quedarnos alguna duda acerca de la eventualidad de que haya elementos dinámicos que no pudieran obtenerse mediante interconexiones LK-válidas de elementos algebraicos, pero el teorema siguiente responde perfectamente a esta cuestión. Además establece, a falta de más información, que ¡unos elementos algebraicos se nos presentan como más importantes que otros!.

Teorema 2 (teorema de descomposición): *Todo elemento o dispositivo de parámetros concentrados de m-puertas puede ser sintetizado utilizando solamente un número finito de condensadores (resp., inductores) lineales de dos terminales y un resistor multipuerta generalmente no lineal.*

Demostración:
A modo de inducción comencemos por la síntesis de $f(v^{(2)}, v^{(1)}, v, i) = 0$. Para ello, con sendos condensadores de 1 F construyamos $i_1 = 1 \cdot v^{(1)}$ e $i_2 = 1 \cdot v^{(2)}$ haciendo uso de una VCVS y una CCVS, Fig. 2.5. Después construyamos una fuente de voltage multipuerta dependiente de (v, i, i_1, i_2), como se indica. Con todo ello, después de añadir la VCVS lineal de valor $1 \cdot v$ de la entrada[61], es

$$v = 1 \cdot v + f(v, i, i_1, i_2)$$

lo cual conduce a la expresión buscada.

La extensión a $f(v^{(\alpha)}, \ldots, v^{(2)}, v^{(1)}, v, i) = 0$ puede hacerse de forma similar; en este caso el resistor multipuerta resultante de seguir los pasos anteriores viene descrito textualmente por el elemento compuesto (o subcircuito) *Resistor multipuerta no lineal* de $\alpha + 1$ puertas siguiente

$$\begin{array}{lll}
subckt\ ResNL & 0\,0'\,1\,1' \ldots \alpha\,\alpha' & \{\alpha + 1\,puertas\} \\
e1 & 1\,1'\,0\,0' & v_1 = -1v \\
h2 & 2\,2'\,1\,1' & v_2 = -1i_1 \\
h3 & 3\,3'\,2\,2' & v_3 = -1i_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
h\alpha & \alpha\,\alpha'\,(\alpha-1)\,(\alpha-1)' & v_\alpha = -1i_{\alpha-1} \\
\pi 1 & 0\,0'\alpha\,\alpha' \ldots\, 1\,1' & v_{\alpha+1} = -1v_1 + f(i_\alpha, \ldots, i_2, i_1, v, i) \\
ends & &
\end{array} \tag{2.57}$$

La última fuente dependiente, $\pi 1$, es una multipuerta no lineal resistiva de dependencia híbrida ($CxVS$)[62]. Desde este simple esquema se pueden hacer con suma facilidad todas las extensiones necesarias para la demostración completa del teorema[63].

[61] Si el elemento fuera a ser excitado por una fuente de tensión, y/o condensadores en serie con valores iniciales arbitrarios, entonces las dos fuentes dependientes de la entrada deberían ser de corriente y deberían estar en paralelo.

[62] Se omiten en su definición las ecuaciones de las puertas de entrada, ya que sabemos con carácter general que las entradas que muestrean corriente se caracterizan por ser $v_j = 0$ y las que muestrean tensión $i_j = 0$.

[63] Si se requieren $i^{(1)}, \ldots, i^{(\beta)}$ usaríamos con los condensadores fuentes de corriente; si existieran valores negativos de cualesquiera de dichos órdenes, las fuentes dependientes que

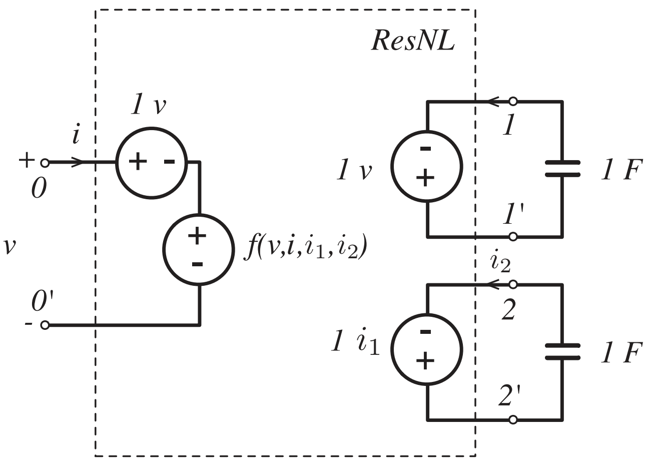


Figura 2.5: Ejemplo de síntesis de $f(v^{(2)}, v^{(1)}, v, i) = 0$

Observaciones

1. Este Teorema enunciado y demostrado por Chua para circuitos no lineales es una adaptación para la Teoría de Circuitos de un conocido teorema de teoría de sistemas debido a N. Wiener.

2. La familia de los elementos dinámicos es accesible desde los algebraicos, lo que justifica la importancia de la clasificación universal de los elementos de circuito en algebraicos y dinámicos.

3. Por consiguiente el manejo con soltura de las técnicas de *Síntesis de multipuertas resistivas no lineales* es el camino natural para la síntesis de elementos dinámicos. Se puede afirmar incluso que quien domine la *Síntesis de resistores multipuerta no lineales* tiene perfecto acceso a toda la familia de elementos de parámetros concentrados (modelos) y circuitos dinámicos que con ellos puedan necesitarse.

4. Ciertos elementos algebraicos poseen una mayor capacidad de síntesis que otros, como se verá en el cap. 3. Tal es el caso de los *condensadores lineales*, *ciertas fuentes dependientes* (VCCS y CCVS) y los *resistores multipuerta no lineales*.

5. La utilización de un repertorio de elementos algebraicos muy amplio es realmente innecesaria. De hecho, la razón por la que en el desarrollo de la Electrónica se ha introducido una cantidad tan alta de elementos ha venido dictada posiblemente por la necesidad de definir un modelo circuital que visualizara el efecto físico que se queria representar.

usaríamos con los condensadores se iniciarían con dependencia de i, en lugar de v. Nótese también que cabe una solución con inductores, p. ej. de 1 H, o soluciones con ambos tipos de *elementos lineales* almacenadores de energía. En todos los casos toda la no linealidad del problema se ha instalado en el resistor multipuerta.

- CIRCUITOS
  - RESISTIVOS GENERALES
    - LTI, LTV
    - NL
  - DINÁMICOS GENERALES
    - LTI, LTV
    - NL

Figura 2.6: Clasificación global de los circuitos de p.c.

Finalmente, debemos reconocer que el propio simulador *spice*, siempre que sepamos utilizarlo para generar funciones no lineales multidimensionales (o complementarlo con una herramienta *ad hoc*), a la vista del Teorema 2, constituye una *herramienta funcionalmente completa* para el estudio[64] de todos los posibles elementos (y por consiguiente de los circuitos) de parámetros concentrados.

2.5. Circuitos: clasificación global y ecuaciones de estado

2.5.1. Clasificación global de los circuitos

Si se tiene en cuenta que las fuentes de excitación independientes son elementos algebraicos de tipo *resistivo*[65] se comprende que para los circuitos se utilice normalmente la particularización que sigue basada en el teorema del color (Teorema 1).

Un **circuito es resistivo** *sii* sólo está constituido por elementos resistivos[66] (ecuaciones algebraicas de orden cero), *sinó* es **dinámico** (ecuaciones diferenciales).

2.5.2. Ecuaciones de estado de un circuito dinámico

Recordando la Definición 7 del cap. 1, es el momento de centrar la atención en la *metodología* de obtención de las *ecuaciones en variables de estado* de cualquier circuito dinámico de p.c. Como allí se dijo, estas ecuaciones son la mejor representación de la memoria, de la energía, de la esencia dimensional del problema de su análisis dinámico, e incluso de su análisis numérico.

Ahora explotaremos los métodos de análisis por simple inspección basados en las ecuaciones MNA, con objeto de adquirir desde el comienzo las mejores

[64] Nos aporta capacidad de simulación (por consiguiente de análisis, aunque sólo sea numérico), paso imprescindible en todo proceso de Síntesis (modelización o diseño)

[65] Un *elemento resistivo* es todo elemento algebraico para el cual $\alpha_j = \beta_j = 0$ para $j = 1, 2, ..., m$.

[66] Ya que las fuentes de excitación independientes que hemos planteado son resistivas (véase su definición), no existen circuitos algebraicos no resistivos.

habilidades posibles para el planteamiento de las ecuaciones de estado[67].

Consideremos para ello un circuito formado por *elementos resistivos de cualquier tipo* –incluidas una o más fuentes de excitación independientes de valor $u_{sj}(t)$– y sólo *un condensador y un inductor, no lineales* para mayor generalidad. Tomando ambos como elementos externos el resto del circuito será una bipuerta, y todo él podrá ser representado textualmente por

$circuit\, Ej1estado$		
$r1$	$1\,1'\;2\,2'$	$f_1(v_1,i_1,v_2,i_2,t)=0\; f_2(v_1,i_1,v_2,i_2,t)=0$
$c1$	$1\,1'$	$h_3(q_3,v_3)=0$
$l1$	$2'\,2$	$h_4(i_4,\phi_4)=0$
end		

Observando que con tal configuración es $v_1 = v_3$ con $i_1 = -i_3$ en la puerta de entrada (donde está el condensador) e $i_2 = i_4$ con $v_2 = -v_4$ en la de salida (donde está el inductor), vamos a considerar dos casos, a saber

1. Sean $c1$ controlado por voltaje, $q_C = \widehat{q}_C(v_C)$, y $l1$ controlado por corriente, $\phi_L = \widehat{\phi}_L(i_L)$. Pues bien, dado que

   $$i_C = C(v_C)dv_C/dt \quad v_L = L(i_L)di_L/dt$$

   donde $C(v_C) = d\widehat{q}_C(v_C)/dv_C$ y $L(i_L) = d\widehat{\phi}_L(i_L)/di_L$, es obvio que el par $x = (v_C, i_L)^T$ es una buena elección como variables de estado.

   Para completar el trabajo, necesitaremos que existan las funciones $i_1 = \widehat{i}_1(v_1, i_2, t)$ y $v_2 = \widehat{v}_2(v_1, i_2, t)\ \forall(v_1, i_2, t)$ de la bipuerta resistiva ya que con ello se puede escribir el sistema de ecuaciones que buscamos, $\dot{x} = f(x, t)$ es decir

   $$dv_C/dt = -\,[1/C(v_C)]\,\widehat{i}_1(v_C, i_L, t) \quad di_L/dt = -[1/L(i_L)]\widehat{v}_2(v_C, i_L, t)$$

   ecuaciones a las que bastaría añadir las condiciones iniciales para poder conocer el estado en un t cualquiera.

   Para obtener las funciones[68] $i_1 = \widehat{i}_1(v_1, i_2, t)$ y $v_2 = \widehat{v}_2(v_1, i_2, t)\ \forall(v_1, i_2, t)$ basta utilizar MNA suponiendo ahora que la bipuerta resistiva se excita precisamente con dos generadores independientes, uno de tensión de valor $v_C(t)$ y otro de corriente de valor $i_L(t)$.

   Este mismo circuito nos puede aportar la ecuación de salida o de las salidas deseables, p. ej. $k = 1, \ldots, a$, en la forma

   $$y_k = f_k\,(v_C, i_L, t)$$

   En suma, las ecuaciones de estado y de salida obtenidas son tal y como se dijo en (2.9).

[67]Si además se necesitan las *ecuaciones de salida* para alguna variable concreta, bastaría añadir, en la formulación MNA, aquellas ecuaciones omitidas que para ello sean de interés.

[68]De hecho no es necesaria la forma explícita ya que MNA nos aportaría las M ecuaciones implícitas adicionales con las M variables adicionales necesarias, cuando aquella no exista.

2. En el caso de que $c1$ fuera controlado por carga, $v_C = \widehat{v}_C(q_C)$, y $l1$ controlado por flujo, $i_L = \widehat{i}_L(\phi_L)$, cabría utilizar la misma bipuerta resistiva con idéntica caracterización híbrida. Ahora bien, para lograr una representación en la que figuren primeras derivadas en forma explícita podríamos partir de las ecuaciones

$$i_C = dq_C/dt \quad v_L = d\phi_L/dt$$

utilizando como antes el hecho de que $i_C = -i_1$ y $v_L = -v_2$ resulta el sistema de ecuaciones que buscamos, $\dot{x} = f(x,t)$ es decir

$$dq_C/dt = -h_1(\widehat{v}_C(q_C), \widehat{i}_L(\phi_L), t) \quad d\phi_L/dt = -h_2(\widehat{v}_C(q_C), \widehat{i}_L(\phi_L), t)$$

Con las "excitaciones" $\widehat{v}_C(q_C)$ e $\widehat{i}_L(\phi_L)$, cualesquiera salidas que se deseen las aporta la bipuerta y como antes dependerán del estado (q_C, ϕ_L) y de las entradas de excitación independiente.

3. Si todos los elementos considerados (salvo las excitaciones externas, u) fueran lineales, para el enunciado anterior existirían las ecuaciones matriciales para el estado $x = (v_C, i_L)^T$ e $y = (y_1, \ldots, y_a)^T$.

$$\begin{aligned} &x^{(1)} = Ax + Bu \\ &y = Cx + Du \end{aligned}$$

con las dos c.i. de $x(0)$.

Lo que precede se extiende con facilidad a cualesquiera casos de número de condensadores o inductores, independientes de su tipo. En el caso de que para algún elemento, incluida la bipuerta resistiva, no existiera la formulación híbrida se podría utilizar la formulación implícita resultante.

Ejercicios complementarios de clase

1. Se pide: a) ¿Las fuentes controladas son activas o pasivas?. Dar algún ejemplo. b) ¿Lo son los BJT, y el AO?. ¿Porqué?. c) De las 4 fuentes controladas VCVS, VCVS, CCVS y CCCS ideales sólo 2 de esta familia son suficientes para obtener cualquiera de ella ¿cuáles?¿cómo?

2. Demostrar que el transformador ideal de tres puertas, el multiplicador analógico ideal, el AO ideal y el circulador ideal de tres puertas, son elementos no energéticos (sin pérdidas o *lossless*). Idem la *bipuerta inductiva lineal* mostrando el efecto de la simetría de su matriz.

3. Suponer que la bipuerta resistiva dada por

$$\pi 7 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad v_1 = \widehat{v}_1(i_1, v_2) \quad i_2 = \widehat{i}_2(i_1, v_2)$$

representa a un BJT en E-común. a) Representar la característica de salida (en forma paramétrica con i_1 como parámetro) extendiéndola a las zonas activas directa e inversa. b) Obtener gráficamente (o indicar el procedimiento para ello) h_{fe} y h_{oe} en un Q_1 situado en la región directa y en un Q_2 en la región inversa. c) Tipo de parámetros de pequeña señal y denominación precisa de los mismos. c) Representar el circuito equivalente de pequeña señal. d) Plantear circuitos de medida para los cuatro parámetros del circuito equivalente.

4. Dibujar la característica resultante del acoplamiento serie, antiserie, paralelo y antiparalelo de dos resistores no lineales de característica dada por $i = (v - a) \vee [v \wedge (a - v)]$ con $a > 0$. Distinguir en los resultados los casos $i-$controlados de los $v-$controlados.

5. Obtener la relación constitutiva e indicar el tipo del elemento compuesto *subckt_π1π2* en los casos: a) Si son una R y una C lineales. b) Si son algebraicos cualesquiera. En este caso ¿bajo qué condiciones el elemento compuesto es algebraico?, y ¿de qué *color* resulta ser?.

subckt_π1π2	1	2	
$\pi 1$	1	2	$i_1^{(\beta_1)} = g_1(v_1^{(\alpha_1)})$
$\pi 2$	2	1	$i_2^{(\beta_2)} = g_2(v_2^{(\alpha_2)})$
ends			

6. Dado el elemento dinámico descrito por la relación textual siguiente

subckt ElemCompC	1	4			
$r1$	1	2			$i_1 = Gv_1$
$f1$	2	3	1	2	$i_2 = 4i_1$
$l1$	1	3			$\phi_3 = 3^{-3}i_3^3$
$c1$	3	4			$q_4 = Cv_4$
ends					

se pide: a) Obtener su relación constitutiva, ¿cuál es el orden del elemento?. b) Utilizando el Teorema 2 sintetizar la misma relación constitutiva utilizando como elementos almacenadores de energía solamente inductores (de $L = 1H$).

7. Para el mismo Ejercicio complementario nº 5 del Cap. 1 (circuito lineal con un AO y dos C) se pide: a) Obtener las ecuaciones de estado y la ecuación de salida para $v_o(t)$, salida del AO. b) Transformar las ecuaciones de estado en términos de (x_1, x_2) en única ecuación escalar, b1) en términos de x_1 solamente, b2) En términos de x_2 solamente. c) Relacionar los parámetros de ambas formulaciones.