

## Capítulo 3

# Síntesis de Circuitos no Lineales

*El presente Capítulo pretende plantear las nociones básicas relativas al nuevo campo denominado por L.O. Chua<sup>1</sup> Síntesis de Circuitos no Lineales (SCNL). Sus aplicaciones más conocidas son la Modelización eléctrica (dispositivos electrónicos y otros) y el Diseño de circuitos físicos en el caso más general.*

*Relegamos a los siguientes Capítulos, más que el planteamiento, la revisión de las propiedades o teoremas y técnicas de Análisis de circuitos lineales y no lineales. Creemos que ello es posible cuando se dan por conocidas las materias citadas en el Prólogo del presente curso. En compensación este camino –la anticipación de los fundamentos de Modelización y Diseño– nos descubrirá los múltiples problemas que pueden llegar a plantearse. Al fin y al cabo el análisis de circuitos es también una herramienta de diseño a la que se acude reiteradamente cuando se pretende validar o modificar una conjetura, un modelo o un diseño tentativo.*

*Utilizaremos frecuentemente el apelativo no lineal para hacer énfasis en tal ámbito de validez de las técnicas utilizadas. Por otra parte se hace un uso extensivo de la clasificación algebraico/dinámico de elementos ya que entre los primeros están las piezas básicas con las que armar cualquier elemento o circuito dinámico, a la vista de los teoremas ya demostrados en el Capítulo precedente.*

### 3.1. Introducción

Dado un *circuito eléctrico* como una interconexión LK-válida de elementos de circuito idealizados (no importa si realiza una operación lógica, de comunicaciones, de potencia, de control, medida, etc) el proceso de *análisis* trata de conocer sus respuestas para las excitaciones dadas.

La *simulación* aparece muy frecuentemente ligada al *análisis*. La razón es clara ya que la simulación es una metodología de representación aproximada del funcionamiento del propio sistema real o de sus componentes, *basada en*

---

<sup>1</sup>L.O. Chua, “Device Modeling Via Basic Nonlinear Elements”, IEEE Trans. CAS-27, no. 11, Nov. 1980.

un circuito eléctrico que incorpora tal aproximación. Usualmente la simulación se lleva a cabo mediante un computador, con objeto de calcular la(s) respuesta(s) de dicho circuito eléctrico dadas cualesquiera excitaciones. Un simulador realmente utiliza programas para resolver numéricamente las ecuaciones del circuito<sup>2</sup>, mientras que el análisis busca en general comportamientos no solo cuantitativos, sino también cualitativos.

En suma, se puede decir que el proceso de *Análisis* es un trabajo de tipo técnico para el que existen métodos algorítmicos y entre ellos computacionales; de este proceso se espera una solución única, de existir. Suponemos un cierto conocimiento de algunas técnicas de análisis matemático y del uso de simuladores (al menos *spice*).

Dicho ésto, a continuación nos vamos a enfrentar con técnicas constructivas como “síntesis”, “diseño”, ..., ahora bien la extrema parcialidad con la que se usan estos términos en diferentes ámbitos<sup>3</sup> de estudio, de investigación y de trabajo industrial nos obliga a detenernos en ellos *ab initio* con cierto detalle.

Partiendo del significado del término “síntesis”, composición de un todo por la reunión de componentes *ad hoc*, entendemos **Síntesis de circuitos no lineales (SCNL)** como *la parte de la Teoría de circuitos que se ocupa de la concepción de un elemento compuesto o de un circuito a partir de unas especificaciones más o menos precisas utilizando componentes más simples*.

En general es preciso realizar actividades de Síntesis de circuitos en los subcampos siguientes:

1. *Síntesis de elementos algebraicos y dinámicos*: Corresponde a la parte de teoría de circuitos en la que los elementos algebraicos idealizados de la teoría de circuitos estudiados en el Capítulo anterior se pueden conectar en diversa formas posibilitando la síntesis eléctrica de cualquier elemento dinámico.
2. *Modelización eléctrica de dispositivos físicos*: Es una metodología sistemática para concebir y además para validar un elemento compuesto (un subcircuito) eficiente, construido por elementos idealizados, en general no lineales, de tal modo que posea capacidad suficiente de *aproximar el comportamiento* de un dispositivo físico, de naturaleza eléctrica pura o mixta (electromecánico, electrohidráulico, etc). Aunque intervienen muchas fases, las esenciales de esta metodología son obtener su *estructura* (y *topología*) y realizar la *validación*<sup>4</sup> de la misma.

---

<sup>2</sup>Adicionalmente la simulación puede introducir errores numéricos respecto de las ecuaciones analíticas que pretende resolver, además los tipos de nolinealidades más usuales la convierten *de facto* en el único procedimiento disponible para hacer el análisis cuantitativo de un circuito.

<sup>3</sup>Una relación de términos recopilados de la Bibliografía cuyo significado se solapa frecuentemente es la que sigue: *síntesis*, *diseño*, *diseño eléctrico*, *diseño físico*, *modelización*, *validación de modelos*, *identificación de parámetros*, *extracción de parámetros*, *teoría de la aproximación*, *diseño estadístico*, *diseño para maximizar el rendimiento de fabricación*, *diseño VLSI*, *automatización de diseño*, *compilador VLSI*, *factoría virtual*, etc.

<sup>4</sup>Consiste en revisar con datos de referencia que el comportamiento no solo cuantitativo

3. *Diseño físico de circuitos*: Es un proceso que culmina con la construcción de un circuito físico con capacidad suficiente de *aproximar las especificaciones* que a priori se hubieran planteado para el mismo. Las fases básicas y conceptuales se enmarcan perfectamente dentro de lo que hemos llamado **SCNL** y eventualmente pueden utilizar elementos idealizados de circuito. No obstante en la mayoría de las fases de diseño se usan modelos realistas de los dispositivos físicos que pretendan utilizarse y sobre todo macromodelos de componentes reales<sup>5</sup>.

En este Capítulo estudiaremos con cierto detalle los dos primeros epígrafes (*Síntesis de elementos y Modelización*), el tercero *Diseño físico* es un terreno muy amplio y dividido en parcelas especializadas que requiere de técnicas adicionales (teoría de la aproximación, optimización, diseño estadístico, etc.), que no podremos desarrollar en detalle.

Los ejemplos que se incorporan en los Ejercicios de fin de capítulo nos sirven para reforzar la idea de que la **SCNL**, utilizando elementos idealizados “libres” –en formato analítico independiente de una tecnología de construcción física– forma parte de los primeros pasos de esta metodología de trabajo, en especial cuando se trata con circuitos no lineales.

### 3.2. Síntesis de elementos resistivos no lineales

El teorema de descomposición (Teorema 2 del Capítulo anterior) nos descubre que para sintetizar cualquier elemento dinámico basta centrar todo el esfuerzo en la síntesis de una multipuerta no lineal !resistiva!. También la síntesis de elementos algebraicos no resistivos se beneficiará de la capacidad de sintetizar elementos resistivos. Por ello, estos últimos centrarán nuestra atención en esta sección.

Con carácter previo, omitiremos el estudio de la síntesis de *resistores multipuerta lineales* ya que en general tal problema es más simple, concretamente son un caso particular de los resistores que tratamos a continuación. En su lugar haremos un breve repaso de la síntesis de **resistores afines**. Un *resistor afín de una puerta* ( $v_j, i_j$ ) si es  $i$ -controlado,  $v_j = f(i_j)$ , estará definido por

$$v_j = R_j i_j + E_j \quad (3.1)$$

con  $R_j$  y  $E_j$  reales (lo que quiere decir también finitos). Sólo si  $E_j = 0$  el resistor será lineal. Además, si  $R_j \neq 0$  también existe para el mismo la forma  $v$ -controlada  $i_j = G_j v_j + I_j$ , con  $I_j = E_j G_j$  y  $G_j = R_j^{-1}$ .

sino también el cualitativo sea el adecuado. Más adelante se exponen con más base para ello las cualidades que de un modo u otro deben ser *validadas*.

<sup>5</sup>En el diseño de un CI (circuito integrado) en una tecnología dada basada en MOSFET, BJT, etc. se parte de las *primitivas* de la misma (p. ej., agregación, escalado, transformación, etc.), así como de elementos compuestos que emulan *operadores lineales y no lineales*. Además, para determinadas técnicas de síntesis, se debe saber cómo construir las *funciones elementales* específicas necesarias para *aproximar* la función pedida.

Se puede hablar de *m-puertas resistivas afines* *i*-controladas dadas por  $v = g(i)$  si esta función adopta la forma afín

$$v = Ri + E \quad (3.2)$$

donde  $v$ ,  $i$  y  $E$  son vectores  $m$ -dimensionales y  $R$  una matriz de reales con  $\dim R = m \times m$ . Como sabemos también ahora la versión  $v$ -controlada sólo existe si  $\det(R) \neq 0$ .

Finalmente cabe la consideración de *multipuertas resistivas afines híbridas*. La expresión genérica de una de ellas adoptará la forma

$$\xi = \widehat{\xi}(\eta) = H\eta + E \quad (3.3)$$

con  $\xi = (\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m)^T$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2 \dots \eta_m)^T$ , y cada  $(\xi_j, \eta_j)$  es o bien  $(v_j, i_j)$ , o bien  $(i_j, v_j)$ , y  $H$  y  $E$  matrices de reales con  $\dim H = m \times m$  y  $\dim E = m \times 1$ . Un ejemplo de una tripuerta afín  $(i_1, i_2, v_3)$ -controlada es

$$\begin{aligned} v_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}i_2 + h_{13}v_3 + E_1 \\ v_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}i_2 + h_{23}v_3 + E_2 \\ i_3 &= h_{31}i_1 + h_{32}i_2 + h_{33}v_3 + I_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

con parámetros reales.

### Observaciones

1. Toda *m-puerta resistiva afín* se puede sintetizar con resistores afines de dos terminales y fuentes dependientes. También con resistencias lineales, fuentes dependientes y fuentes independientes.
2. Obsérvese que en el espacio de entrada cada componente de la salida es un hiperplano. Se permiten todos los grados de libertad si los parámetros pueden ser positivos y negativos, con independencia de su realizabilidad.
3. La síntesis de familias de hiperpalanos correspondientes a una función PWA admiten reducciones en el número de parámetros dadas las ligaduras que comporta la continuidad. Así dada la ecuación de una cara de la PWA, la ecuación de la cara contigua comparte de alguna manera los parámetros de la recta que representa la “arista visible” entre ambas.
4. Si algún parámetro de  $H$  o de  $E$  dependiera del tiempo estaríamos ante resistores afines  $t$ -dependientes.
5. Una *m-puerta resistiva lineal* verifica  $\xi = \widehat{\xi}(\eta) = H\eta$  y es por tanto un caso particular de las multipuertas resistivas afines. Incluso en este caso cabe plantear problemas de síntesis muy interesantes, de los que se hará alguna referencia en los Ejercicios.
6. Se puede enunciar una propiedad de cierre para el acoplamiento de resistores afines, válida siempre que existan las matrices  $H$  y  $E$  del elemento compuesto.

Dicho lo que precede, abordar la síntesis de un resistor, en general no lineal de  $m$  puertas, dado por un sistema de  $m$  ecuaciones (o por un conjunto de puntos suficientemente amplio correspondiente a medidas realizadas en un dispositivo real), en un determinado dominio, puede hacerse de dos modos, como vamos a ver.

### 3.2.1. Síntesis de la propia función

Este apartado no trata de aproximación, sino del problema de otras formas de representación de la propia función –siempre que éste sea el enunciado– que puedan tener algún interés.

Sea la  $m$ -puerta resistiva dada por

$$\xi = f(\eta) \quad (3.5)$$

con  $\xi$  y  $\eta$  vectores de corrientes o voltajes de  $m$  componentes. Se supone que se desea su síntesis utilizando un número finito de elementos de una sola puerta<sup>6</sup>

$$h_j(v_j, i_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, r$$

y eventualmente otros, suficientemente simples, por determinar.

El método de síntesis que se expone a continuación se basa en el Teorema de Kolmogorov. Al respecto, en su famoso problema número 13, Hilbert conjecturaba que hay funciones analíticas de tres variables que no pueden ser representadas como una superposición finita de funciones continuas de solamente dos argumentos, el Teorema que sigue resuelve ampliamente tal cuestión.

**Teorema 1** (Kolmogorov<sup>7</sup> 1956): *Cualquier función continua de varias variables  $f(x_1, \dots, x_n)$  definida sobre  $I_n$  con  $n \geq 2$  puede ser representada en la forma*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} \chi_j \left( \sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i) \right)$$

donde  $\chi_j$ ,  $\psi_{ij}$  son funciones continuas de una variable y  $\psi_{ij}$  son funciones monótonas que no dependen de  $f$ .

Este teorema tiene más interés teórico –como demostración *existencial* posee un gran valor– que práctico, aunque a veces se ha utilizado para síntesis real de funciones no lineales en campos relacionados con éste (p. ej. Síntesis de redes neuronales).

Dicho esto, la pretensión de sintetizar un elemento resistivo no lineal  $m$ -dimensional con resistores no lineales de sólo dos terminales, por supuesto, con

<sup>6</sup>La síntesis de un elemento no lineal  $h_j(v_j, i_j) = 0$  mediante otros más simples, de ser necesaria (sólo lo sería en diseño físico), se considera un problema de Teoría de la Aproximación, que trataremos en la subsección siguiente.

<sup>7</sup>Kolmogorov, A. N., On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 108 (1956), 179-182 (Russian).

la ayuda de otros elementos, aunque especialmente simples queda resuelta por el teorema que sigue.

**Teorema 2** (conjunto mínimo de elementos básicos): *El siguiente conjunto de elementos de circuito,  $M_R = \{\text{resistores } NL 2 - \text{term, CCVS, VCCS}\}$ , contiene el mínimo de bloques constructivos en el sentido de que cualquier elemento resistivo descrito por una relación constitutiva continua sobre cualquier conjunto cerrado y acotado puede ser sintetizado utilizando solamente un número finito de elementos de  $M_R$ .*

La demostración no tiene especial dificultad. Como ejercicio, desarrollar  $i_1 = f(v_1, v_2)$  según el Teorema de Kolmogorov y realizar su posterior síntesis circuital.

También, como sabemos, bajo ciertas circunstancias un desarrollo polinómico de Taylor, incluso para varias dimensiones, es capaz de representar la propia función en un cierto rango.

### 3.2.2. Síntesis de una aproximación

En este caso las soluciones son mucho más variadas. Aquí enlazamos con la **Teoría de la Aproximación**, campo de gran interés actual aplicado a sistemas no lineales. El uso de polinomios diversos tipos junto con determinado conjuntos de funciones no lineales (gausianas, sigmoides, sinusoides y su generalización multidimensional) aporta soluciones al respecto.

- *Desarrollo en términos de una base funcional*

Existen múltiples bases funcionales del tipo  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ , en general con  $x \in \mathbb{R}^m$  y  $\phi_j$  con  $j = 1, 2, \dots$  pueden ser reales o complejas, con capacidad de aproximar a cualquier<sup>8</sup> función

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j(x)$$

Cuando además se dispone de un producto escalar,  $f \cdot g$ , según el cual los “vectores” de la base son ortonormales, tal producto permite obtener los coeficientes,  $\alpha_j$ , sin más que “proyectar” el “vector”  $f(x)$  sobre  $\phi_j$ . Pues bien, en tal caso la aproximación dada por la serie anterior truncada hasta una  $j = q$  es precisamente la que *minimiza el cuadrado del error* (aproximación de mínimos cuadrados), entre todas las posibles con ese mismo número de términos.

- *Uso de interpoladores no lineales*

Una importante familia de esquemas de aproximación de funciones no lineales, más utilizadas en diseño de circuitos que en modelización, se basa en determinados tipos de primitivas tales como la *función sigmoidal*,

---

<sup>8</sup>En general cada caso suele acompañarse de criterios estrictos de existencia, p. ej. que el posible número de discontinuidades sea finito, etc.

la *función base radial* y la *función pertenencia fuzzy*. Todas ellas permiten construir esquemas de aproximación con capacidad suficiente de aproximación de una  $f(x)$  cualesquiera sobre  $x = (x_1, x_2 \dots x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ .

1. La *función sigmoidal* es una función no lineal que varía suavemente en  $[0, 1]$  desde 0 hasta 1 en la forma que sigue.

$$s(x) = \frac{2}{1 + \exp(\lambda x)} - 1$$

Permite construir esquemas con combinaciones afines,  $\sum \alpha_j x_j + \beta_j$  terminados en una sigmoide y a su vez con sus salidas estructuradas similarmente en una nueva capa. Las denominadas *redes neuronales de base sigmoidal* adoptan esta forma<sup>9</sup>.

2. La *función de base radial* definida por

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{\|x - \delta\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

donde  $\|x - \delta\|$  es normalmente la norma euclídea. Esta función es una pseudogaussiana de centro  $x = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)^T$  y altura unidad. Las *redes neuronales de base radial* (RBNN) se caracterizan por  $\sum \alpha_j \phi_j(x)$ , expresión en la que cada  $\phi_j$  está dotado de un  $\sigma_j$  y de un vector particular

$$\delta(j) = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{mj})^T$$

En ocasiones, como en el caso anterior<sup>10</sup> y en el siguiente, un algoritmo de aprendizaje (optimización) se utiliza para extraer los parámetros de la ecuación con los que mejor aproxime a un enunciado dado (una nube de puntos, una función de referencia, etc.).

3. La *función de pertenencia fuzzy*  $\mu_{ij}(x_j)$  es una función unidimensional convexa con la peculiaridad de que el conjunto de funciones

$$\{\mu_{1j}(x_j), \mu_{2j}(x_j), \dots, \mu_{pj}(x_j)\}$$

al menos solapadas de dos en dos, pueda representar “etiquetas lingüísticas” o *cualificadores* asociados al valor de la particular variable de entrada<sup>11</sup>  $x_j$  (temperatura, presión, corriente, ..., etc.), con valores como “pequeño”, “medio”, “muy alto”, etc. La función  $\mu_{ij}(x_j)$  puede ser una función pseudogaussiana unidimensional, pero se admiten funciones a tramos rectos (trapezoidales, triangulares, ...).

<sup>9</sup>Cybenko, G., *Approximation by superpositions of a sigmoidal function*, Mathematics of Control, Signals and Systems, vol. 2, pp. 303-314, 1989.

<sup>10</sup>T. Poggio and F. Girosi, *Networks for approximation and learning*, Proc. IEEE 78(9), 1484-1487 (1990).

<sup>11</sup>L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Information and Control, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

Dos operadores con capacidad lógica suficiente permiten obtener de una estructura de *reglas de razonamiento*<sup>12</sup> una función no lineal  $f(x)$ . La estructura operativa de estos sistemas debe ser tal que todos los razonamientos sean posibles, o lo que es lo mismo, que se puedan representar todas las funciones  $f(x)$ , dentro del grado de discretización impuesto. Para determinados tipos de razonamientos existen teoremas que demuestran que tal estructura posee capacidad suficiente de representación de cualquier  $f(x)$ . Más aun, alguna de estas estructuras se puede demostrar que es equivalente a una red neuronal de base radial<sup>13</sup>.

- *Uso de funciones a trozos* (PWA, PWP, ...)

Otro camino de aproximación se basa en la utilización de funciones no lineales construidas mediante funciones tramos, conocidas como funciones PWA si tales componentes son *lineales* –realmente *afines*– y PWP si son polinómicas.

Si nos referimos a una función PWA continua arbitraria, caben básicamente dos representaciones analíticas distintas.

1. *Representación reticular*: Se basa en la utilización del operador reunión,  $\vee$  o máx y el operador intersección,  $\wedge$  o mín y en un teorema que dice que toda PWA continua en un cierto dominio del espacio de entrada se puede expresar como la reunión de un conjunto de términos intersección de funciones afines que definen las caras de aquella PWA

$$\Phi(x) = \vee_{k \in M} \phi_k(y) \quad \phi_k(y) = \wedge_{j \in N(k)} y_j(x) \quad y_j(x) = \sum_{i=1}^m a_{ij}x + b_j$$

La síntesis eléctrica (la que aquí nos interesa, aunque es de aplicación general) de tales operadores –*selectores reticulares*– junto con la síntesis de los resistores afines ya vista, proporciona una solución completa a la *síntesis de m-puertas resistivas híbridas de tipo PWA*. Existen variantes de este enunciado que van desde la expresión dual (en sentido de la teoría de retículos) hasta expresiones particulares basadas en la misma. En principio esta técnica es universal<sup>14</sup>, no

---

<sup>12</sup>Se puede construir un conjunto de reglas del tipo “*If  $x_1$  es  $M_{1i}$  and ... and  $x_{mi}$  es  $M_{mi}$  then  $y = F_i(\mu_{i1}(x_1), \dots, \mu_{im}(x_m))$* ”, donde  $M_{1i}, \dots, M_{im}$  son dichas etiquetas lingüísticas, asociadas respectivamente a las funciones de pertenencia  $\mu_{i1}(x_1), \dots, \mu_{im}(x_m)$  (incluso a ciertas operaciones sobre ellas). Todo ello dota al sistema de capacidad “lógica” suficiente, dentro de un álgebra llamada álgebra fuzzy.

<sup>13</sup>J. S. Roger Jang, C. T. Sun, *Functional Equivalence Between Radial Basis Function Networks and Fuzzy Inference Systems*, IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 4, no. 1, 1993.

<sup>14</sup>J.M. Tarela, J.M. Pérez and V. Aleixandre, *Minimization of Lattice polynomials on Piecewise Linear Functions (Part I)*, Ref. Revista/Libro: Mathematics and Computers in Simulation, vol 17, Issue 2, April 1975, pages 79-85; doi: 10.1016/S0378-4554(75)80017-6, Copyright 1975, Published by Elsevier Ltd. (Previa- mente en: Assoc. Intern. pour le Calcul Analogique

presenta notables complejidades en el caso multidimensional general y es de muy escaso tiempo de cálculo.

2. *Representación canónica*: Para la misma PWA utiliza las ecuaciones de las fronteras del dominio entre las que se definen las “caras” de la PWA y una expresión basada en una combinación lineal de expresiones valor absoluto anidadas. La más conocida es la expresión canónica<sup>15</sup> de Chua para funciones PWA unidimensionales.

$$y = a + bx + \sum_{i=1}^p c_i |x - \beta_i|$$

esta expresión es heredera de la estructura circuital del los antiguos generadores de funciones de diodos tan utilizados en las calculadoras analógicas. Esta técnica presenta notables complejidades en el caso multidimensional general.

Todas estas formulaciones admiten su uso tanto en Modelización como en Diseño y es en cada uno de esos ámbitos donde se deben analizar las ventajas e inconvenientes de cada método para la aplicación que se tenga que desarrollar.

En cualquier caso el desarrollo detallado de estas cuestiones van más allá del interés de este texto.

## Observaciones

1. La clasificación anterior no es disjunta, p. ej. existen formulaciones “vectoriales” para funciones PWA, además los elementos de la base se pueden representar en formulaciones PWA tanto reticulares como canónicas.
2. Como hemos dicho la aproximación truncada de una serie ortogonal para una función dada genera una aproximación que minimiza el cuadrado

---

- AICA, vol. XVII, págs. 79-85, Bruselas - Bélgica, 1975).

J.M. Tarela, L.A. Bailón, E. Sanz Título: *Minimization of Lattice polynomials on Piecewise Linear Functions (Part II)*, Idem, Ref. Mathematics and Computers in Simulation, pages 121-127; doi: 10.1016/S0378-4554(75)80024-3, (Previamente en: AICA, págs. 121-127).

J.M. Tarela, E. Alonso, M.V. Martínez Título: *A Representation Metod for PWL Functions Oriented to Parallel Processing*, Ref. Revista/Libro: Mathematical Computig Modelling, vol. 13, n. 10, págs. 75-83, Ed. Pergamon Press Publ., 1990.

J.M. Tarela, M.V. Martínez Título: *Region Configurations for Realizability of Lattice Piecewise Linear Models*, Ref. Revista/Libro: Mathematical and Computer Modelling, vol. 30, no. 11 - 12, págs. 17 - 27, 10 (1999).

J.M. Tarela, E. Alonso, *Representación de elementos resistivos multiterminales lineales a tramos (PWL) mediante polinomios reticulares*, XXI Reunión Bienal de la RSEFQ, Comunicaciones de la RSEFQ (S. I-1, n. 5, págs. 45-46), Salamanca, 4-10 Oct., 1987.

J.M. Tarela, A. Ibarra, *Selectores reticulares: Elementos de modelización de dispositivos electrónicos no lineales*, Tipo de participación: XXI Reunión Bienal de la RSEFQ (S. I-1, n. 6, págs. 47-48), Salamanca, 4-10 Oct., 1987.

<sup>15</sup>L.O. Chua, A.-Ch. Deng, *Canonical Piecewise-Linear Modeling*, IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-33, NO. 5, pp. 511-525, May 1986.

del error (aproximación de mínimos cuadrados), pues bien ésta es la base de sistemas *neuro/fuzzy adaptable*s (con capacidad de aprendizaje a partir de muestras), tal como el ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System)<sup>16</sup>, pero las mismas ideas pueden aplicarse a modelos.

3. Omitimos los problemas de optimización generales que llevan a calcular los parámetros de una determinada forma aproximada, sea el dato la función de referencia o una nube de puntos experimentales que la representan.
4. En aquellos casos en los que la aplicación requiere la aproximación obtenida sea derivable con continuidad (se dice  $f(x) \in C^1$ ), p. ej. porque se necesita obtener el gradiente de esa función en cada punto, las funciones a tramos presentan un problema de discontinuidad. A veces se sorteja esta dificultad sintetizando también una aproximación PWA de la derivada de  $f(x)$  o de las derivadas direccionales necesarias cuando el argumento es vectorial.

### 3.3. Síntesis de elementos algebraicos

La realización de elementos resistivos de todo tipo abre la puerta a procedimientos de síntesis de elementos algebraicos, a través del uso de mutadores ya definidos en el Capítulo 1. Desarrollemos y recordemos su definición.

Mutador	Tipo (k)	$(\xi_1, \eta_1)$	$(\xi_2, \eta_2)$	Rel. const.
$\mu_{LR}$	1	$(\phi_1, i_1)$	$(i_2, v_2)$	$\phi_1 = v_2, i_1 = -i_2$
$\mu_{LR}$	2	$(\phi_1, i_1)$	$(v_2, i_2)$	$\phi_1 = -i_2, i_1 = v_2$
$\mu_{CR}$	1	$(v_1, q_1)$	$(i_2, v_2)$	$v_1 = v_2, q_1 = -i_2$
$\mu_{CR}$	2	$(v_1, q_1)$	$(v_2, i_2)$	$v_1 = -i_2, q_1 = v_2$
$\mu_{LC}$	1	$(\phi_1, i_1)$	$(v_2, q_2)$	$\phi_1 = -q_2, i_1 = v_2$
$\mu_{LC}$	2	$(\phi_1, i_1)$	$(q_2, v_2)$	$\phi_1 = v_2, i_1 = -q_2$
$\mu_{MR}$	1	$(\phi_1, q_1)$	$(i_2, v_2)$	$\phi_1 = v_2, q_1 = -i_2$
$\mu_{MR}$	2	$(\phi_1, q_1)$	$(v_2, i_2)$	$\phi_1 = -i_2, q_1 = v_2$
$\mu_{ML}$	1	$(\phi_1, q_1)$	$(i_2, \phi_2)$	$\phi_1 = \phi_2, q_1 = -i_2$
$\mu_{ML}$	2	$(\phi_1, q_1)$	$(\phi_2, i_2)$	$\phi_1 = -i_2, q_1 = \phi_2$
$\mu_{MC}$	1	$(\phi_1, q_1)$	$(q_2, v_2)$	$\phi_1 = v_2, q_1 = -q_2$
$\mu_{MC}$	2	$(\phi_1, q_1)$	$(v_2, q_2)$	$\phi_1 = -q_2, q_1 = v_2$

El *mutador* es el nombre de una familia de *bipuertas algebraicas lineales*, caracterizadas por que en su relación constitutiva –ahora lineal– interviene para cada una de sus dos puertas una combinación de variables

$$\left\{ v_j^{(\alpha_j)}, v_j^{(\alpha_j)} \right\} \quad \alpha_j, \beta_j \in \{-1, 0\} \quad j = 1, 2$$

con “color” diferente en ambas puertas y excluyendo también los casos puramente resistivos.

Los elementos de esta familia presentarán, como veremos, interesantes propiedades de transformación. Así un elemento algebraico conectado a una de sus

<sup>16</sup>Ver p. ej. <http://equipe.nce.ufrj.br/adriano/fuzzy/transparencias/anfis/anfis.pdf>

puertas, cuando se observa el efecto desde la otra, pertenecerá a otra clase de elemento.

Antes de seguir, este es el mejor momento para resumir algunas de las interesantes propiedades de esta familia como elementos de síntesis.

## Observaciones

1. El elemento  $\mu_{LC}$  Tipo  $k = 1$  no es más que un girador, como es fácil de verificar. Así, conectando un  $C$  lineal (resp., no lineal p. ej.  $C(v)$ ) a la puerta 2 se comportará como un inductor lineal (resp., no lineal  $L(i)$  en tal caso) visto desde la puerta 1.
2. Usando mutadores y uno solo de los elementos básicos de dos terminales (resistor, condensador, inductor y memristor) se pueden sintetizar los otros tres.
3. Dado que un mutador es un elemento lineal se puede sintetizar<sup>17</sup> utilizando solamente condensadores (y/o inductores) lineales y fuentes controladas (también lineales).
4. Se podrían definir mutadores de más alto orden, sintetizables de acuerdo con el punto anterior, pero el acoplamiento en cascada de los de primer orden podría suplir su necesidad.

La revisión que acabamos de hacer de los mutadores permite enunciar el teorema siguiente para asegurar la realización de cualquier elemento  $m$ -puerta algebraico, sea cual sea el orden  $(\alpha_j, \beta_j)$  de cada una de sus puertas.

**Teorema 3** (Realizabilidad de  $m$ -puertas algebraicas): *Cada elemento  $m$ -puerta algebraico puede ser sintetizado utilizando solamente Mutadores y un resistor  $m$ -puerta no lineal.*

La demostración es sencilla si se parte de un caso particular, p. ej. una tripuerta algebraica (3.5) con tres puertas y con  $(\alpha_j, \beta_j) = (1, 0)$ , para las tres,  $j = 1, 2, 3$ . Si tomamos una *tripuerta resistiva* con la misma  $f(f_1, f_2, f_3)$  que aquella, lógicamente con  $(\alpha_j, \beta_j) = (0, 0)$ , para las tres,  $j = 1, 2, 3$  y le aplicamos a cada puerta un mutador cuya relación constitutiva verifique  $v_2 = v_1^{(1)} = \phi_1$  e  $i_2 = -i_1$ , es decir un mutador  $\mu_{LR}$  tipo 1, el elemento resultante es el pedido.

La misma conclusión se obtendría con otros valores de  $(\alpha_j, \beta_j)$  en cada puerta, aunque no fuesen los mismos para cada una. Órdenes mayores se obtendrían utilizando mutadores de órdenes más altos (siempre podrían sintetizarse por acoplamiento en cascada los estudiados).

---

<sup>17</sup>Véase en L.O. Chua, “Synthesis of New Nonlinear Network Elements”, Procc. of the IEEE, vol. 56, no 8, Aug. 1968.

### 3.4. Síntesis de elementos dinámicos

Llegados a este punto podríamos afirmar que los cuatro teoremas básicos para la SCNL son los ya enunciados y demostrados anteriormente, a los que nos referiremos a modo de resumen a continuación:

1. El *Teorema de cierre para la interconexión de elementos algebraicos* (**Teorema 1**) planteaba condiciones necesarias para que el elemento resultante de un acoplamiento sea algebraico. Como corolario aportaba que su violación conducía a un elemento dinámico, pero no decía nada de la descomposición algebraica de uno dinámico.
2. El *Teorema de descomposición para elementos dinámicos* (**Teorema 2**) es el núcleo esencial de la SCNL ya que establece un procedimiento constructivo de síntesis, a la par de restringir la variedad de elementos algebraicos necesarios.
3. El *Teorema del conjunto mínimo* de elementos para la síntesis de un *resistor m-dimensional no lineal* (**Teorema 3**) garantiza la existencia de una solución analítica, pero no nos dice cómo acceder a ella, razón por la cual se ha dado un cierto énfasis a procedimientos alternativos.
4. El *Teorema de realizabilidad de m-puertas algebraicas* (**Teorema 4**) que se acaba de ver cierra el conjunto estudiado hasta ahora.

El manejo con soltura de la técnica de síntesis de multipuertas resistivas no lineales es pues el camino natural para la síntesis de elementos dinámicos. No obstante, al igual que sucedía con el conjunto mínimo, el grado de complejidad que podría alcanzar la síntesis puede ser innecesario, al menos frente a los mayores grados de libertad que aporta el usar un repertorio de elementos algebraicos mucho más amplio<sup>18</sup>.

Antes de seguir, dado que los elementos dinámicos también pueden clasificarse en tipos, conviene plantear las ecuaciones de definición. Comenzaremos por introducir el caso más general para posteriormente introducir los casos particulares de mayor interés.

Los elementos dinámicos de  $m$ -puertas usualmente se pueden describir por una *ecuación de estado*

$$dx/dt = f(x, \eta) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \eta \in \mathbb{R}^m \quad f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donde  $\eta$  incluye sólo una variable por puerta, es decir  $\eta_j$  para cada  $j = 1, 2, \dots, m$  es o bien  $v_j^{(\alpha_j)}$  o bien  $i_j^{(\beta_j)}$ .

Establecida la *entrada*,  $\eta$ , para tal sistema dinámico –el elemento excitado<sup>19</sup>– se puede establecer la *ecuación de salida*

$$\xi = g(x, \eta) \quad g : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

---

<sup>18</sup>Probablemente esta es la razón por la que en el desarrollo de la Electrónica se ha introducido una cantidad tan alta de elementos, aparentemente innecesarios.

<sup>19</sup>Sea con excitaciones independientes, sea con elementos de excitación LK-válidos de cualquier tipo, simples o compuestos.

donde ahora  $\xi$  es el vector de covariables de dichas puertas que aparecen en las ecuaciones, es decir  $\xi_j$  para cada  $j = 1, 2, \dots, m$  es o bien  $i_j^{(\alpha_j)}$  o bien  $v_j^{(\beta_j)}$ .

Tal definición caracteriza a los *elementos dinámicos mixtos y de alto orden*, representando el caso más general. La definición que sigue es una particularización de ésta, válida para un número notable de casos.

**Definición 1** ( $m$ -puerta dinámica básica tipo R, L, C o M): *Una  $m$ -puerta dinámica se dice que es básica tipo R, L, C o M si y solo si se puede escribir en una de las cuatro formas que resultan de hacer que  $\{\xi_j, \eta_j\}$  para  $j = 1, 2, \dots, m$  tenga la forma  $\{v_j, i_j\}$ ,  $\{\phi_j, i_j\}$ ,  $\{v_j, q_j\}$  o  $\{\phi_j, q_j\}$ , respectivamente.*

Nótese que como casos particulares de esta definición se encuentran aquellos en los que la variable dependiente es del mismo tipo para todo  $j$ , p. ej. la ecuación de estado  $dx/dt = f(x, i)$  y la de salida  $v = g(x, i)$  corresponde a una  *$m$ -puerta básica R-dinámica  $i$ -controlada*. Análogamente se puede hablar de una *L-dinámica  $i$ -controlada*, *C-dinámica  $v$ -controlada* y de una *M-dinámica  $q$ -controlada*, elementos que pertenecen a categorías diferentes<sup>20</sup>.

Hechas las precisiones respecto de la clase de elementos dinámicos vamos a enunciar un teorema acerca de la realizabilidad de los tipos contemplados en el teorema anterior.

**Teorema 4** (realizabilidad de  $m$ -puertas dinámicas básicas tipos R, L, C o M): *Toda  $m$ -puerta dinámica tipo R, L, C o M puede ser sintetizada utilizando solamente mutadores, condensadores lineales de dos terminales y un resistor no lineal de  $m$  puertas.*

La demostración es sencilla si se parte de la  *$m$ -puerta básica R-dinámica  $v$ -controlada* ya que solo necesita un *resistor  $v$ -controlado de  $m + n$  puertas* en  $n$  de las cuales se insertan condensadores lineales (p. ej. de  $1F$ ). Este camino nos asegura un procedimiento constructivo para demostrar el teorema. La aplicación al caso  $i$ -controlado o híbrido es inmediata.

Para extender las conclusiones a los restantes casos enunciados, basta utilizar mutadores, o lo que es lo mismo partir de un elemento algebraico no resistivo, de  $m + n$  puertas, lo que no plantea especiales dificultades.

### 3.5. Metodología de modelización

La mayoría de los modelos circuitales realistas de los dispositivos físicos están hechos de interconexiones incompatibles de elementos algebraicos. Consecuentemente, la mayoría de los modelos circuitales realistas son elementos dinámicos y por ende descritos por una ecuación integro-diferencial. Veamos el proceso de modelización de dispositivos electrónicos, en el cual juega un papel muy importante la Síntesis de Circuitos No Lineales (SCNL).

---

<sup>20</sup>Si tomamos la *L-dinámica  $i$ -controlada* cuya ecuación de salida es  $\phi = g(x, i)$  y la diferenciamos respecto de  $t$ , en un intento de comprobar si el resultado coincide con la categoría *R-dinámica  $i$ -controlada*, vemos que  $v = g_x(x, i)f(x, i) + g_i(x, i)i^{(1)} \equiv h(x, i, i^{(1)})$  esencialmente diferente de aquella.

### 3.5.1. Concepto de modelo

Consideremos un **dispositivo real**  $D$  de *dos terminales*<sup>21</sup>; dichos terminales constituyen la interfaz de  $D$  con el exterior. Pues bien, como sabemos las variables de circuito básicas *dinámicamente independientes*<sup>22</sup> asociadas a dichos terminales son dos  $v(t)$ ,  $i(t)$ . Para la caracterización genérica de  $D$ , lejos de poseer un comportamiento algebraico en general, realicemos el siguiente *experimento imaginario*: a) supongamos conectada a su entrada un circuito de excitación  $N_{exc}$  formado por la interconexión arbitraria de elementos reales, b) un commutador  $S$  que se cierra en  $t_o$  conectando  $N_{exc}$  con  $D$ , c) suponer la medida con *precisión infinita* de todos los posibles pares admisibles  $(v(t), i(t))$  medidos sobre el intervalo temporal  $[t_o, \infty)$ .

**Definición 2** (relación constitutiva de un dispositivo real): *El conjunto de todos los posibles pares admisibles de  $D$ ,  $F(D) = (x(t), h(t))$  medidos respecto a todo instante inicial  $t_o$ , se dice que es una relación constitutiva de  $D$ . En otras palabras,  $D$  queda completamente caracterizado por dicho conjunto  $F(D)$ , o*

$$D \Leftrightarrow F(D) = \{(v(t), i(t)), \forall t_o, \forall N_{exc}\}$$

Con lo dicho hasta aquí  $F(D)$  caracterizaría a cualquier dispositivo real. Dado que los modelos son idealizaciones que implican *restricciones* definamos **elemento ideal**  $D_i$ , como sigue.

**Definición 3** (dispositivo ideal): *Un dispositivo ideal es un elemento de circuito ideal,  $D_i$ , si el conjunto de todos los pares admisibles de señal  $F(D_i)$  puede ser generado de forma algorítmica (por ejemplo, por medio de una función).*

Debe notarse que un dispositivo ideal, por conveniencia, no requiere de una descripción exhaustiva como es  $F(D)$ , por lo que es imposible que lo represente idénticamente<sup>23</sup>. Nótese también que por ser  $D$  un dispositivo físico el operador asociado a todo  $D_i$  que se considere, será siempre *causal* y generalmente *no lineal*.

El proceso de modelado entraña la búsqueda de un elemento generalmente compuesto que llamamos dispositivo ideal  $D_i$ , con una  $F(D_i) \neq F(D)$  pero que suponga una cierta aproximación de  $D$ . Además de esta *restricción en la aproximación* (error) se suelen introducir *restricciones sobre las señales* (conjunto de excitaciones posibles).

La clave del proceso de modelado es encontrar, en principio, un modelo matemático,  $M_m(D)$ , suficientemente simple para unas necesidades concretas, capaz de aproximar a los pares admisibles de excitaciones-respuestas, dentro del

<sup>21</sup>Lo que sigue puede extenderse a elementos multiterminales y/o multipuerta.

<sup>22</sup>Para distinguirlas de las dinámicamente dependientes de ellas, p. ej.  $v^{(-1)}(t)$  para  $v$  e  $i^{(2)}(t)$  para  $i$ .

<sup>23</sup>Nunca debería hablarse de “circuito equivalente” de un dispositivo físico. Lo correcto sería hablar de que dos modelos  $D_{i1}$  y  $D_{i2}$  son equivalentes si  $F(D_{i1}) = F(D_{i2})$ .

rango restringido de señales especificado por tales necesidades. Dicho modelo matemático estará formado por ecuaciones (algebraicas, diferenciales, ordinarias, integrales, en derivadas parciales, en diferencias finitas, etc.).

En una segunda fase, en Teoría de Circuitos el proceso de modelado va más lejos y en este sentido trata de encontrar un dispositivo ideal,  $D_i$ , *equivalente* al modelo  $M_m(D)$  y capaz de aproximar, con las mismas restricciones mencionadas para  $M_m(D)$  el funcionamiento de  $D$ . Esta fase es la que se denomina Síntesis de Circuitos No Lineales.

### 3.5.2. Tipos de modelos

A continuación se hacen tres clasificaciones de los modelos siguiendo tres criterios generales.

- *Según la naturaleza del modelo matemático*

Se pueden hacer nuevas subdivisiones, p. ej. parámetros concentrados *versus* parámetros distribuidos, dos variables (independientes dinámicamente) *versus* multivariables, lineal *versus* no lineal, ... , etc.

- *Según la amplitud de las señales*

Podrían definirse tres tipos de modelos, normalmente con márgenes de amplitud limitados

a) *Modelo global*: es una representación aproximada de un dispositivo físico que es válida para cualquier rango de valores de sus variables terminales.

b) *Modelo local*: es una representación aproximada que es válida para una región prescrita del rango de operación del dispositivo.

c) *Modelo incremental*: es un modelo local en el que la región de validez es un entorno pequeño de cierto punto dentro del rango de operación del dispositivo.

Así como el primero es claramente no lineal, usualmente el tercero es lineal representando además con mucha mayor precisión el comportamiento del dispositivo en una región mucho más restringida.

- *Según la velocidad de cambio de la señal*

Se suele utilizar la clasificación siguiente:

a) *Modelo de continua*: hace referencia a lo que se denomina modelo estrictamente resistivo.

b) *Modelo de alterna*: es un modelo que no es estrictamente resistivo.

El segundo a diferencia del primero contiene resistores e inductores y/o condensadores, tanto lineales (modelo de alterna para pequeñas señales), como no lineales (modelo de alterna para grandes señales). En todos los casos existe un rango de valores temporales o de frecuencia para los que el modelo es válido.

En cualquier caso, sin entrar en mayores detalles el reto esencial del proceso de modelización consiste en lograr que el modelo posea las **cualidades** siguientes:

1. *Consistencia* (well-posedness):  $M_m(D)$  debe de estar bien propuesto (well-posed) en el sentido de que cuando se conecte con otros modelos bien propuestos no se presenten *situaciones no físicas*.
2. *Capacidad de simulación*: Dado un conjunto finito de pares de señales voltaje-corriente admisibles, previamente medidas {que también llamaremos datos de validación}, los correspondientes resultados obtenidos por simulación (análogica o digital) deben representar una buena aproximación.
3. *Similitud cualitativa*: El modelo debe dar lugar al mismo comportamiento cualitativo que se conoce que exhibe  $D$  cuando está conectado a una excitación apropiada {p. ej., tipo de estabilidad, presencia de subarmónicos,...}.
4. *Capacidad predictiva*: El modelo debe de ser capaz de predecir modos de operación desconocidos a priori, a través de simulación por computadora. Tales simulaciones ofrecen entonces sugerencias acerca de nuevos experimentos<sup>24</sup> y posiblemente nuevas aplicaciones.
5. *Estabilidad estructural* (robustez): Las propiedades cualitativas del modelo no deben cambiar bajo pequeñas perturbaciones de los parámetros del modelo.

Debe decirse que las cinco cualidades anteriores son deseables solamente en un modelo general de  $D$ . En circuitos específicos o en situaciones concretas se puede privar al modelo de alguna de dichas cualidades obteniéndose todavía resultados adecuados.

### 3.5.3. Metodologías de modelización de dispositivos electrónicos

Hay dos metodologías de modelización totalmente diferenciadas, aunque en muchas ocasiones se utilizan aspectos de ambas para realizar un modelo mixto, sobre todo cuando una de ellas no es capaz de aportar por si sola soluciones suficientemente aceptables.

#### 3.5.3.1. Modelización física de dispositivos electrónicos

Pretende obtener la información acerca del comportamiento del dispositivo a partir del estudio de los mecanismos físicos que intervienen en el funcionamiento del dispositivo. La validez del modelo que llegue a obtenerse dependerá

---

<sup>24</sup>Un modelo cuya validez sólo haya sido probada para un elemento externo de excitación prescrito no poseerá capacidad predictiva cuando se use conectado a otros elementos externos.

por tanto de la validez de las aproximaciones que se hagan en dicho estudio, para las restricciones establecidas *a priori* para las señales.

1. FASE I. *{Análisis y partición de la Física del Dispositivo}*: Consiste en identificar las variables físicas internas de interés, así como los mecanismos de operación, a través de un cuidadoso análisis de la física del dispositivo. Dicha información se usa entonces para separar la estructura (ó el comportamiento) interna del dispositivo en tantas regiones (o efectos) geométricas (ó físicos) distintas como sea posible<sup>25</sup>, tal que cada unidad pueda ser modelada separadamente.
2. FASE II. *{Formulación de las ecuaciones físicas}*: Consiste en formular las ecuaciones físicas que relacionan las variables físicas internas, introducidas por cada una de las partes (geométricas ó físicas) en que se ha dividido el dispositivo, con las corrientes y tensiones externas. Para la mayor parte de los dispositivos semiconductores las leyes físicas de las que se pueden obtener dichas ecuaciones son las siguientes<sup>26</sup>:

a) *Ecuación de Poisson*

$$\operatorname{div}\mathbf{D}(x, y, z) = \rho(x, y, z)$$

siendo  $\mathbf{D}$  el vector desplazamiento eléctrico y  $\rho$  la densidad volúmica de carga.

b) *Ecuaciones de densidad de corriente*

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_p &= qp\mathbf{v}_p(\xi) - qp\operatorname{div}(qD_p(\xi)) \\ \mathbf{J}_n &= qn\mathbf{v}_n(\xi) + qn\operatorname{div}(qD_n(\xi)) \\ \mathbf{J}_{\text{cond}} &= \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_n \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{\text{cond}} + \partial\mathbf{D}/\partial t\end{aligned}$$

en este contexto  $\xi$  es el campo eléctrico,  $\mathbf{v}_p(\xi)$  y  $\mathbf{v}_n(\xi)$  las velocidades de electrones o huecos,  $D_p(\xi)$  y  $D_n(\xi)$  las difusividades respectivas y  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente total, incluida la componente de desplazamiento.

c) *Ecuaciones de continuidad*

$$\begin{aligned}\partial p/\partial t &= G_p - R_p - (1/q)\operatorname{div}\mathbf{J}_p \\ \partial n/\partial t &= G_n - R_n + (1/q)\operatorname{div}\mathbf{J}_n\end{aligned}$$

donde las  $G$  son velocidades de generación y las  $R$  velocidades de recombinación de huecos y de electrones (dimensionalmente  $L^{-3}T^{-1}$ ).

---

<sup>25</sup>Compatibles tales separaciones con la necesidad de reconstruir fácilmente los efectos conjuntos de todas ellas.

<sup>26</sup>Se omite la presencia de campos magnéticos cuestión esta que se podría solventar mediante las ecuaciones completas de Maxwell.

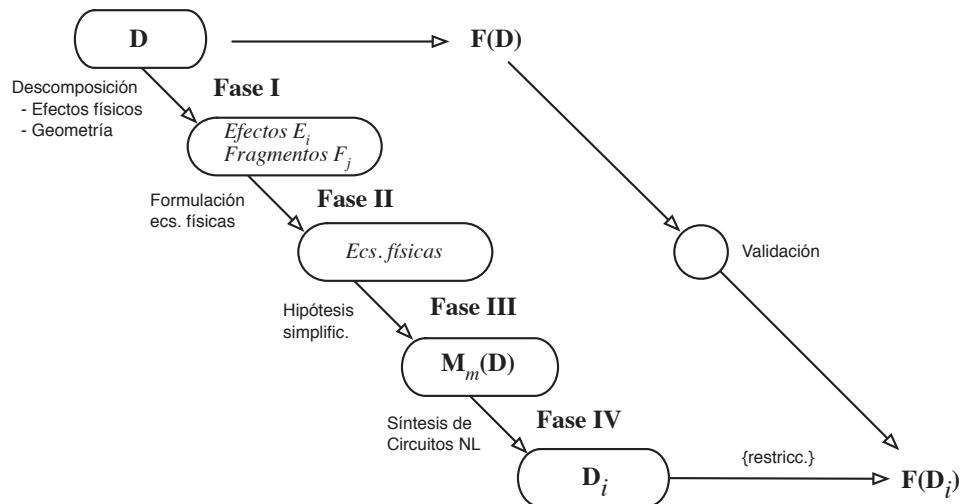


Figura 3.1: Modelización física

d) *Ecuaciones de corriente y voltaje en los terminales*

$$i = \int \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

$$v = \int_C \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{l}$$

siendo  $i$  la integral de superficie de  $J$  sobre una superficie  $S$  determinada y  $v$  la integral de línea a lo largo de un camino  $C$  entre dos terminales externos.

Las ecuaciones obtenidas de la FASE II consisten en general en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales y diferenciales en derivadas parciales.

3. FASE III. *{Obtención y simplificación de las ecuaciones}*: Dado el carácter de las mismas es preciso hacer hipótesis simplificadoras. En particular siempre que sea posible se trata de obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en las  $(v, i)$  de las puertas, definiendo así un elemento dinámico de parámetros concentrados, al cual le será aplicable la teoría desarrollada hasta aquí.

Esta fase nos conducirá a un modelo matemático  $Mm(D)$  que constituye una aproximación ideal al dispositivo real. Debe decirse que en esta fase interviene en gran medida la intuición y la experiencia y en cierto modo una acertada realización de esta fase puede ser considerada como un arte.

4. FASE IV. *{Síntesis de Circuitos No Lineales, SCNL}* : Utilizando los bloques constitutivos más simples, estudiados hasta aquí, en esta fase se trata de obtener un modelo circuital de parámetros concentrados,  $D_i$  equivalente a  $Mm(D)$ .

El modelo matemático  $Mm(D)$  admite usualmente una formulación en variables de estado, y en la terminología de la Teoría de Sistemas, pertenecerá

a alguno de los tipos de elementos dinámicos mixtos de alto orden vista anteriormente.

Muchas clases de casos particulares de elementos dinámicos básicos poseen un notable interés, por pertenecer a ellas muchos modelos globales de dispositivos en Electrónica. La ventaja de la formulación en variables de estado está relacionada con la facilidad de realizar la FASE IV, como se puede demostrar en algunos modelos puramente físicos (diodo Gunn, SCR, ... ).

En este sentido debe decirse que la Síntesis de Circuitos No Lineales aplicada al diseño de modelos, está íntimamente ligada al buen dominio del uso de los elementos básicos estudiados en el Teoría de Circuitos lineales y no lineales.

Por último, debemos indicar que en aquellos casos en que no sea aceptable ningún  $Mm(D)$  de parámetros concentrados (p. ej. diodo IMPATT) debería intentarse, además del uso de los elementos concentrados ya estudiados, el uso de elementos distribuidos (p. ej. líneas de transmisión) o algunas de sus aproximaciones discretizadas.

### 3.5.3.2. Modelización caja negra

La modelización *caja-negra* –en contraposición con la anterior llamada a veces *caja-blanca*– se utiliza cuando los mecanismos físicos no son bien entendidos o cuando se modelan sistemas muy complejos (LSI, VLSI,...). Pretende extraer un modelo matemático aproximado del dispositivo en cuestión, inferido a través de la forma y valor de un conjunto de respuestas tan amplio como sea posible, para que el modelo obtenido se pueda considerar como aceptable en el ámbito en que va a ser utilizado.

En lugar de entrar en las interesantes cuestiones que plantean (p. ej. ¿es posible identificar una única topología del modelo, o estructura, solamente a través de medidas entrada/salida?), es suficiente introducir las fase metodológicas de que consta.

1. FASE I {*Observaciones experimentales*} : Consiste en excitar el dispositivo con diferentes señales de test. Señales típicas incluyen: señales sinusoidales débiles de diferentes frecuencias, señales salto y de cc de diferentes amplitudes y frecuencias, etc. La respuesta a cada una de dichas señales,  $Fp(D)$ , debe ser almacenada para "validación cuantitativa" que se considerará en la Fase III. De las medidas citadas debemos extraer tantas propiedades cualitativas generales como sea posible (p. ej. ciclos de histeresis, subarmónicos, ...). Estas propiedades,  $Cp(D)$ , serán necesarias en la "validación cualitativa" de la Fase III.
2. FASE II {*Modelado matemático*} : Un cuidadoso análisis de los fenómenos anteriores debe conducir a la síntesis de un modelo matemático que sea capaz de simular la mayoría de las propiedades observadas en la Fase I. Si fuera posible se debe intentar encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y algebraicas no lineales poseyendo las propieda-

des citadas. No existen métodos sistemáticos<sup>27</sup> para la Fase II, pero en esencia esta fase está muy ligada a las fases siguientes en el sentido de que todo modelo que se proponga va a verse sometido a una validación cualitativa.

3. FASE III {*Validación del modelo*}: Consta de dos pasos claramente diferenciados:

- a) *Validación cuantitativa*: Las mismas señales de entrada de la Fase I deben ser aplicadas al modelo y las respuestas de la correspondiente simulación,  $Fp(Di)$ , deben compararse con las respuestas medidas. El propio proceso general de modelado es un proceso iterativo. En sus etapas finales una validación cuantitativa exige lo que se denomina *identificación de parámetros*. Esto es, comparando la respuesta de un modelo tentativo con el conocido (Fase I) del dispositivo real se trata de ajustar los parámetros del modelo para que la concordancia de la respuesta sea máxima (o el error sea mínimo en algún sentido). El problema de la identificación conceptualmente es muy simple sin embargo un sistema de *identificación de parámetros* que sea eficiente es una importante área de investigación.
- b) *Validación cualitativa*: Es la fase posiblemente más importante, y mas olvidada, del proceso de modelado. En concreto, debe darse una *prueba matemática que demuestre que el modelo planteado,  $Cp(Di)$ , exhibe todas las propiedades cualitativas que se hayan extraído de la Fase I,  $Cp(D)$* . En particular dado que nuestro modelo (black-box) no está basado en la física interna o en los mecanismos internos de operación, este paso es esencial para que el modelo posea habilidad predictiva.

4. FASE IV {*Síntesis de Circuitos No Lineales*}: Este paso es idéntico al último de la modelización física y nos remitimos a lo que allí se ha dicho.

Para terminar, a continuación citamos algunas normas seguidas cuando se pretende obtener un modelo global de un dispositivo electrónico. Para ello, a veces se parte de un modelo global cc del mismo. El hecho de que muchos

---

<sup>27</sup>Como una guía a seguir deben conocerse las técnicas que se citan a continuación, utilizadas en la síntesis de sistemas no lineales con propiedades específicas:

- Representación de sistemas no lineales resistivos (por ejemplo aproximaciones a funciones continuas o aproximaciones a un conjunto de puntos dato medidos).
- Síntesis de sistemas autónomos (por ejemplo osciladores) de ecuaciones diferenciales, de varios tipos (por ejemplo poseyendo una respuesta periódica prefijada).
- Síntesis de sistemas no autónomos de ecuaciones diferenciales con una respuesta prefijada de estado estacionario a una familia de señales de entrada de amplitudes y frecuencias variables.
- Idem. con respuesta prefijada a una familia de señales de entrada de tipo salto de amplitud variable.

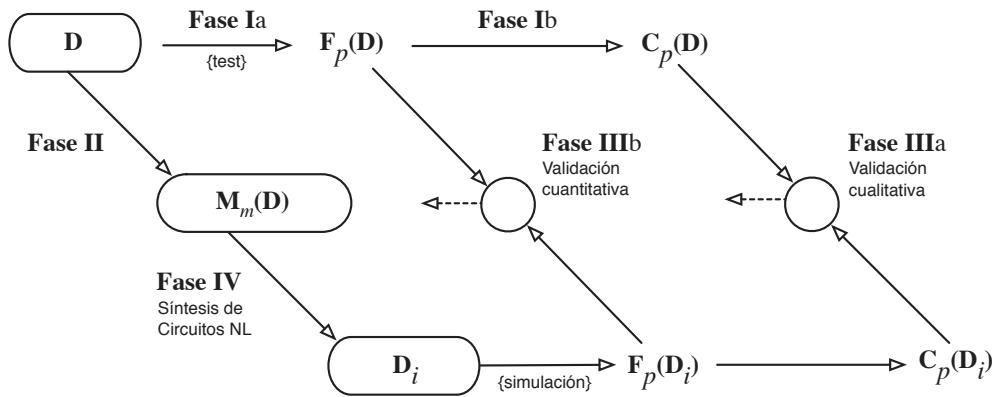


Figura 3.2: Modelización caja-negra

dispositivos sean *cuasirresistivos* es lo que hace que la conversión del modelo cc en ac se pueda hacer añadiendo elementos parásitos<sup>28</sup> más o menos concretos.

Aunque existen muchos modelos basados en la metodología de modelización caja negra (inductor con histéresis, modelos de circuitos biológicos, modelos de circuitos VLSI, etc.), debe decirse que muchos modelos de computadora son en realidad **modelos mixtos** fruto de una modelización en la que intervienen ambas metodologías, sacando en primera instancia el máximo partido posible del comportamiento físico interno y completando el modelo a continuación bajo alguna de las técnicas de la metodología caja negra.

### 3.5.4. Objetivos actuales de los procesos de modelado y diseño

En lo que respecta al modelado de un componente físico, considerando sus aplicaciones, debe decirse que su objetivo es triple: a) Caracterizar la tecnología, el componente y las causas principales de su comportamiento, b) Incorporar modelos tecnológicos junto con modelos eléctricos de los dispositivos más avanzados a los simuladores, y c) Aumentar el rango y prestaciones de tales simuladores.

Como consecuencia, los procesos de diseño, en su visión más general, se suele hablar de cuatro ámbitos o niveles diferentes:

<sup>28</sup>Tales como: 1) *Inductores parásitos* en serie con los terminales para simular la autoinducción de los mismos. 2) *Condensadores parásitos* en paralelo con los terminales para simular la capacidad del encapsulado. 3) Un *inductor* en serie con cualquier *resistor no lineal controlado por corriente* caracterizado por una curva v-i no monotónica, también se aplica a cada puerta de una red multipuerta. 4) Un *condensador* en paralelo con cualquier *resistor no lineal controlado por voltaje* caracterizado por una curva, no monotónica; también se aplica a cada puerta de una red multipuerta.

En particular los dos últimos están asociados a la *consistencia* del modelo, sin la cual podría exhibir un comportamiento no físico (p. ej. puntos de bloqueo). Tal cuestión debería ser estudiada en el contexto de los Ejercicios propuestos.

1. Nivel físico: Representación de los efectos físicos esenciales que afectan a las variables eléctricas de los terminales, en relación con los materiales, la geometría y las excitaciones. Incorpora la modelización física y de caja negra vistas anteriormente, con la profundización que resulte ser más eficaz. Al respecto existen incluso modelos de tipo estadístico que simulan el comportamiento cuántico de electrones y huecos.
2. Nivel tecnológico: Está ligado al anterior, un ejemplo es TCAD (CAD de Tecnología) que conecta las tecnologías de fabricación (simulando la oxidación, la implantación iónica, la fotolitografía, etc.) con las características estáticas o dinámicas del dispositivo resultante, o incluso con un modelo dado previamente, para el que es capaz de extraer los parámetros que mejor ajustan aquellas características.
3. Nivel de circuito: El ejemplo más conocido es *spice*, pero no el único. Permite simular y ayuda a diseñar circuitos y subsistemas eléctricos. También representa una herramienta de ayuda en la modelización al permitir contrastar modelos tentativos con datos experimentales.
4. Modelo de sistema: El concepto más amplio es del de *factoría virtual* (p. ej. Cadence) según el cual un encadenamiento de simuladores conecta los pasos que van desde los materiales hasta el sistema completo. En principio esto permitiría múltiples niveles de realimentación para probar el efecto de pequeñas variaciones al nivel más bajo posible sobre cualidades globales del diseño final. El interés de estos planteamientos, en formatos menos ambiciosos pero más pragmáticos, es la Automatización del Diseño (DA) a través de múltiples mecanismos de optimización. En el ámbito digital VLSI existen numerosas herramientas que llegan hasta el nivel lógico y arquitectural.

Lo que precede establece de hecho un camino para el desarrollo tecnológico que va mucho más allá del mero diseño de circuitos electrónicos<sup>29</sup>.

## Ejercicios complementarios de clase

1. a) Sintetizar un *resistor afín bipuerta* con elemento ideales. b) Idem *resistor afín multipuerta*. c) Idem *resistor afín mixto*.

SOL: a) Basta construir un elemento de dos puertas cuyas relaciones constitutivas sean:  $v_1 = R_i i_1 + R_{ri} i_2 + E_1$  y  $v_2 = R_f i_1 + R_{oi} i_2 + E_2$ . Es el mismo circuito de parámetros R, cuyos generadores CCVS,  $R_{ri} i_2$  y  $R_f i_1$  tuvieran en serie las fuentes  $E_1$  y  $E_2$ .

- b) La extensión es inmediata (represéntese sólo el caso de una de sus puertas).  
 c) El caso multipuerta y mixto es una extensión del caso híbrido. Por ejemplo, para la puerta 11' de una tripuerta *resistiva afín híbrida* podría ser  $v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 + h_{13} i_3$ .

---

<sup>29</sup> No importa el tipo (analógicos, digitales, mixtos), el rango de los elementos (tamaño, potencia, frecuencia), la función (desde sensores a actuadores), el campo (Microelectrónica, Nanoelectrónica, Optoelectrónica, Mecatrónica, etc.), etc.

Su realización circuital sigue las mismas pautas. Nótese que las covariables de  $\eta = (i_1, v_2, i_3)^T$  son  $\xi = (v_1, i_2, v_3)$  con  $\xi = \hat{\xi}(\eta)$ .

2. Un AO ideal en la z.a., realimentado con un condensador lineal,  $C$ , desde su salida hasta la entrada “-” y con una  $R$  desde este nodo a tierra, puede presentar comportamientos muy diferentes (entre el borne “+” y tierra), según sea la naturaleza del elemento  $h_1(v_1, i_1) = 0$  con el que se establezca otra realimentación desde su salida al borne “+”. Demostrar concretamente:

Si	entonces
$h_1(v_1, i_1) = 0$ es	$h(v, i) = 0$
a) Resistor no lineal (NL)	Inductor no lineal (NL)
b) Condensador no lineal (NL)	Memristor no lineal (NL)

SOL.: En la z.a., siendo  $i_2$  la corriente realimentada a través de  $C$  hacia “-”, se verificaría:  $v_1 = v_2$ ,  $v = e_+ = Ri_2$  e  $i = -i_1$ , con lo cual

- Las variables de  $h_1(v_1, i_1) = 0$  (resistor) en términos de  $v$  e  $i$  serían  $i_1 = -i$ ; además  $v_1 = v_2 = C^{-1}q_2 = C^{-1} \int i_2 d\tau = C^{-1} \int (v/R) d\tau = R^{-1}C^{-1}\varphi$  de donde resulta el *inductor no lineal*

$$h(v, i) = h_1(R^{-1}C^{-1}\varphi, i) = 0$$

- Para  $h_1(v_1, q_1) = 0$  (condensador):  $q_1 = \int i_1 d\tau = -\int i d\tau = -q$ ; además (al igual que antes)  $v_1 = \dots = R^{-1}C^{-1}\varphi$ , de donde resulta el *memristor no lineal*

$$h(v, i) = h_1(R^{-1}C^{-1}\varphi, i) = 0$$

3. Sea un circuito que además de los elementos citados hasta el momento contiene pares *nullators-norators* (ver Ej. propuesto en cap. 2.). a) ¿Se puede asimilar cada uno de dichos pares a algún elemento conocido operando en alguna región de operación o modo de funcionamiento particular?. b) Expresar las condiciones particulares para un AO y un BJT.
4. Sintetizar y diseñar, con la ayuda de *nullators* y *norators*, un elemento compuesto de dos terminales que posea *resistencia negativa*. Se sugiere: a) Partir de una  $R$ , resistencia lineal positiva, p. ej. situada entre los nodos 3 y 4, y añadir aquellos elementos de modo que pueda verse desde los terminales 1 y 2, como una resistencia negativa. b) Explicar diferentes alternativas de diseño. c) ¿Cómo abordar el problema de un diseño físico final?

SOL: a) Para que la  $v$  externa se aplique a  $R$  directamente, podemos usar dos *nullator* que conecten 1 con 3 el uno, y 2 con 4 el otro. Para permitir circular a la corriente de  $R$  hacia la entrada, con el signo solicitado, basta conectar dos *norator* cruzados, el uno desde 3 a 2 y el otro desde 4 a 1. Es fácil verificar que se cumplen los requisitos del enunciado.

b) Se sabe que un AO en su z.a., con  $A \rightarrow \infty$ , se comporta como un *nullator* (entre los bornes “+” y “-”) y un norator (entre la salida y la referencia de tensiones). Pues

bien, el acoplamiento de dos AO cumpliría los requisitos del enunciado, ¡siempre que el circuito externo garantizara su trabajo en la z.a.! Más aun, caben dos topologías basadas en asociar a cada AO pares distintos *nullator-norator*. También cabría la consideración de otros elementos activos (Girador, Conveyer, etc.).

Otro enfoque más impreciso es el siguiente: ¡En un BJT en la z.a. su BE “asemeja” un *nullator* y su CB un *norator*!. Con estas ideas deberían sintetizarse diferentes esquemas circuitales como los precedentes. Incluso podría pensarse que con otros elementos tales como JFET, MOSFET, podrían conseguirse nuestros propósitos. Siempre habría que analizar cuidadosamente cada caso.

c) Aquí son de mucha mayor importancia las consultas bibliográficas (existe una extensísima bibliografía bajo el epígrafe “resistencia negativa”). En general para un diseño físico final habría que seleccionar el que mejor se adapte a la tecnología disponible<sup>30</sup>.

5. Revisar desde el punto de vista de las fases de la modelización física, un modelo ac global del rectificador controlado de silicio, SCR.

SOL.: Ver op. cit. “Device Modelling Via Basic Nonlinear Elements”, pág. 1036.

6. Sea el circuito dinámico que sigue, con un modelo resistivo puro  $r1$  para un elemento del que sólo sabemos sus características estáticas

<i>circuit GN-testTran3 · 6.cir</i>		<i>{dinámico tran}</i>
<i>r1</i>	1 2	$i_1 = v_1^3 - 3v_1$
<i>l1</i>	1 2	$\phi_2 = L i_2$
<i>end</i>		

Su comportamiento transitorio desea ser conocido a través de la ecuación de estado. Se pide: a) ¿Qué elementos y ligaduras posee tal circuito?. b) Para cualquier condición inicial  $i_L(0)$ , representar todas las *rutas dinámicas* (trayectorias posibles) sobre las características del elemento NL. c) ¿Cuál es la ecuación de estado y sus puntos de equilibrio?. d) ¿Es consistente (*well-posed*) el resultado obtenido?. e) Si experimentalmente se observa una oscilación alrededor del origen de amplitud saturada por las ramas pasivas (incrementalmente) del resistor, ¿Qué elemento físico se echa de menos en el modelo?.

SOL.: a) Posee un resistor de dos terminales NL de característica no monotónica  $i_1 = \hat{i}_1(v_1)$   $v$ -controlada y no  $i$ -controlada, denominada tipo N (recuerda a las características estáticas de un diodo túnel); un inductor lineal,  $v_2 = L di_2/dt$ ,  $\forall i_2(0)$ ; y las ligaduras entre ambos son  $v_2(t) = v_1(t)$  e  $i_2(t) = -i_1(t)$ .

b) Expresando la ecuación de  $L$ ,  $v_2 = L di_2/dt$ , en términos de  $v_1, i_1$ , para todo punto de las características del resistor es

$$di_1/dt = -(1/L)v_1 \Rightarrow \begin{cases} v_1 > 0 & \Rightarrow di_1/dt < 0 \Rightarrow v_1 \text{ decrece} \\ v_1 < 0 & \Rightarrow di_1/dt > 0 \Rightarrow v_1 \text{ crece} \end{cases}$$

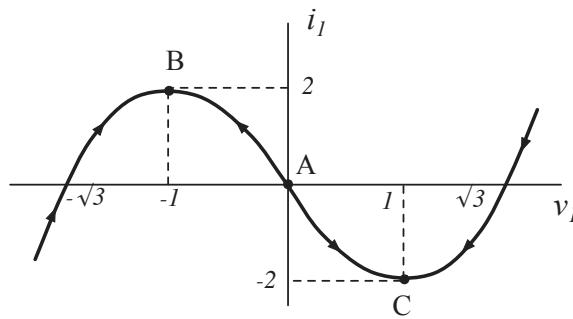
Ello implica que las *rutas dinámicas* sobre la característica estática del resistor tienden y se detienen en los puntos estables  $B(v_1, i_1) = (-1, +2)$  y  $C(v_1, i_1) = (+1, -2)$ , mientras que el  $A(0, 0)$  es inestable, Figura 3.3.

c) La *ecuación de estado* para  $i_2(t)$  (llamando  $x$  a la variable interna  $v_1 = v_2$ ), con cualquier  $i_L(0) = i_2(0)$  dada, es

$$di_2/dt = (1/L)x \quad i_2 + x^3 - 3x = 0$$

---

<sup>30</sup>A modo de ejemplo ver: <http://www.ti.com/lit/an/sboa093a/sboa093a.pdf>

Figura 3.3: Concepto de punto de bloqueo (*impasse*)

El o los *puntos de equilibrio*<sup>31</sup> corresponden a  $di_2/dt = 0 \Rightarrow x = v_1 = 0$  (1<sup>a</sup> ec.)  $\Rightarrow i_2 = -i_1 = 0$  (2<sup>a</sup> ec.), es decir es el  $A(0, 0)$ , *inestable*.

d) El resultado implica que para cualquier condición inicial es  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = \pm 2$ . Pero, ¡en tales puntos, en los que  $i_L$  es no nula, ...  $v_L = v_2 = \int i_L d\tau$  no varía!: Conclusión, el modelo es *no físico, es inconsistente* (no *well-posed*). Por esta razón  $A$  y  $C$  se llaman *puntos de bloqueo* (*puntos de impasse*) y no pueden ser puntos finales de la dinámica de una L en un sistema físico como el estudiado<sup>32</sup>.

e) La modelización del resistor es incompleta, se echa de menos un condensador en paralelo con el  $r_1$ , bastaría uno lineal<sup>33</sup>, incluso con  $C \rightarrow 0$ . Las dos preguntas ¿Todo resistor cc tipo N debe llevar *per se* un C no nulo en paralelo en su modelo dinámico NL?, ¿Y si fuera cc tipo S? deben ser respondidas (ver Ejercicios propuestos al final de este capítulo).

<sup>31</sup>El concepto de “*punto de operación (P.O.)*” es diferente, *es el que resulta en un elemento NL de circuito cuando se abren todos los condensadores, se cortocircuitan todos los inductores y se anulan todas las fuentes de pequeña señal independientes*. En nuestro ejemplo, el P.O. sería el que resulta de hacer  $i_2 = -i_1 = 0$ , es decir son los  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(0, 0)$  y  $(+\sqrt{3}, 0)$ .

<sup>32</sup>Relacionado con ello, se sabe que si un circuito (con uno o más  $C$  no lineales en general, y eventualmente con uno o más  $L$  no lineales en general) puede ser descrito por una ecuación de estado global  $dx/dt = f(x)$  con  $f \in C^1$ , donde las variables de estado sean las cargas de los condensadores (y estos  $q$ -controlados) y los flujos de los inductores (y estos  $\phi$ -controlados), entonces posee solución única y no poseerá *puntos de impasse*.

<sup>33</sup>Al respecto, recordamos la consideración experimental (ley física) que sigue: *Dos almacenes de energía diferentes con una ligadura que permita la transferencia de energía entre ambos puede constituir un oscilador natural* (un péndulo con almacenes de energía potencial y cinética, idem un oscilador LC ideal, etc.).