

Capítulo 4

Señales, tipos y representaciones

Los elementos más comunes de excitación de un circuito son los generadores independientes, a su vez cualquier salida de un circuito, sea LTI, LTV o NL, podría ser utilizada como tal. Iniciamos este capítulo haciendo una clasificación de las señales disponibles y de algunas de sus medidas y representaciones de mayor interés en la Teoría de Circuitos.

Para los circuitos que operen en régimen estacionario sinusoidal (en lo que sigue, s.s.s. de “sinusoidal steady state”), los que operen en régimen estacionario periódico (en lo que sigue, p.s.s. de “periodic steady state”) e incluso los que operen en lo que denominaremos régimen cuasi-p.s.s. se completará la caracterización de tales señales con los corolarios de conservación de potencia¹ derivados del Teorema de Tellegen.

La caracterización en régimen permanente periódico está ligada a las series de Fourier y en general a la transformada de Fourier que se supone conocida (se puede ver un resumen en el Anexo 9.1).

El capítulo siguiente podrá así abordar lo que llamaremos Estrategias y técnicas de trabajo generales de interés en el estudio de circuitos eléctricos resistivos y dinámicos, ya sean LTI, LTV o NL recordando conocimientos, reforzando habilidades e introduciendo teoremas nuevos de modo muy visual y con una orientación eminentemente práctica.

4.1. Tipos de señales y características generales

En un circuito cada elemento se excita en general mediante todos los restantes; nos interesa en particular la existencia de excitaciones independientes en sus puertos de entrada, excitaciones que darán valor, $u_s(t)$, a algunas de las variables fundamentales del circuito, $(e, v, i)^T$.

¹En Electrónica de Potencia (EP) la potencia eléctrica es la “señal” de interés y los circuitos de EP son verdaderos *procesadores de potencia* capaces de convertir energía eléctrica entre todas sus formas posibles. En ocasiones (p. ej. rectificación controlada) los circuitos deben ser capaces de filtrar altas frecuencias de origen no lineal (conmutadores), especialmente en ciertas operaciones de régimen dinámico (p. ej., control) en modo cuasi-p.s.s.

Utilizando la notación (2.8), el vector $u(t)$ contiene como componentes a las citadas excitaciones. Por su parte $y(t)$ es cualquier otro elemento de $(e, v, i)^T$, incluyendo las *covariantes* de tales generadores o cualquier otra variable eléctrica².

Consideraremos en esta sección diversas formas de excitaciones o respuestas, pero antes de ello es conveniente presentar una *clasificación general* de las señales, $x(t)$, sean tensiones o corrientes, según alguna de sus propiedades matemáticas:

1. *Señales continuas*, definidas $\forall t \in \mathbb{R}$, o simplemente en un intervalo dado.
2. *Señales discretas*, definidas únicamente en un conjunto finito de puntos, normalmente aislados, de \mathbb{R} .

La Teoría de circuitos se interesa solamente por las primeras y por ende por la *subclasificación de señales continuas* siguiente:

- *Señales deterministas*: Están definidas por una función continua³, $u_s(t)$, que puede informar de su valor en cualquier instante, incluso futuro.
- *Señales indeterministas (aleatorias)*: Para ellas no existe una expresión funcional que determine su valor futuro, y en su caso se caracterizan de otra forma (p. ej. a través de sus propiedades estadísticas).

En la TC interesan normalmente las *señales deterministas* y más concretamente dos tipos:

- *Señales periódicas*, definidas por

$$\exists T, \quad x(T + t) = x(t), \quad \forall t \tag{4.1}$$

existiendo muchos ejemplos de las cuales (sinusoidales, triangulares, secuencias de pulsos, y otras formas mucho más complejas).

- *Señales aperiódicas*, $x(t)$ no verifica (4.1). También existen muchos ejemplos de estas (pulso, exponencial, rampa, etc.).

En lo que sigue nos interesan solamente las señales continuas, deterministas⁴, periódicas o no.

A continuación se introducen algunas definiciones de interés general en TC.

²Cualquier otra variable eléctrica distinta de las citadas es una sencilla combinación lineal (LVK o LCK) de algunas de estas $2b + (n - 1)$ variables.

³Salvo algunos extremos matemáticos como las señales escalón, pulso e impulso. Al respecto se utiliza a veces con mayor generalidad “continua salvo en un número finito de puntos”.

⁴En el último capítulo haremos una breve introducción al ruido en circuitos eléctricos con lo que abordaremos de forma resumida la generación de este tipo de señales aleatorias y sus efectos en circuitos eléctricos.

Valor medio, $\langle x(t) \rangle$, y componente alterna, $x_{ca}(t)$

Se define con carácter general, para un intervalo concreto $(t_1, t_1 + T_M)$ que llamaremos *intervalo de medida*, el *valor medio* de $x(t)$ como

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_1+T_M} x(t) dt \quad (4.2)$$

$$x_{ca}(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle \quad (4.3)$$

siendo obviamente $\langle x_{ca}(t) \rangle = 0$. Además es preciso fijar T_M para las señales aperiódicas. Para las *señales periódicas* basta tomar $T_M = T$ con cualquier t_1 .

Valor eficaz, X_{rms}

Es un valor cuadrático medio con un conocido significado⁵ en variables eléctricas de tipo periódico, está dado por

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_1+T_M} x^2(t) dt} \quad (4.4)$$

Para una $x(t)$ sinusoidal de valor máximo X_m resulta $X_{rms} = X_m/\sqrt{2}$. Por otra parte, aplicado a las componentes anteriores de $x(t)$, supuesta *periódica*, conduce a

$$X_{rms}^2 = \langle x(t) \rangle^2 + X_{ca}^2 \quad (4.5)$$

es decir, los valores eficaces del valor medio y de la componente alterna no son simplemente aditivos, son *sólo aditivos cuadráticamente*.

Potencia y energía de una señal

En Teoría de Circuitos, las expresiones (1.3) y (1.4), proporcionan la *potencia eléctrica instantánea* y la *energía* entregadas a un elemento a través de sus puertos. Para cualquiera de ellas es $p_j(t) = v_j(t)i_j(t)$, y esta expresión es igualmente válida si se aplica a un generador. En cualquier caso, la *potencia media* entregada a dicha rama en un intervalo concreto $(t_1, t_1 + T_M)$, designada por P_k o $\langle p_k(t) \rangle$, es

$$\langle p_k(t) \rangle = \frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_1+T_M} p_j(\tau) d\tau \quad (4.6)$$

y la *energía* en ese mismo intervalo $\langle p_j(t) \rangle T_M$. Lógicamente para $p_j(t)$ periódico de periodo T la expresión es válida para $T_M = T$ y $\forall t_1$.

⁵La potencia suministrada a una resistencia $p(t) = v(t)i(t)$ es proporcional al cuadrado de su corriente (o de su voltaje). De aquí se deduce que la *potencia media* entregada a la misma en un intervalo temporal dado, $\langle p(t) \rangle = \langle v(t)i(t) \rangle$, es igual (si $R = 1 \Omega$) al valor medio del cuadrado de la corriente (o de su voltaje). De ello se infiere el conocido concepto de valor eficaz de una corriente o de tensión arbitrarias.

Corolario II (conservación de la potencia media): Para todo circuito de parámetros concentrados (resp., para toda parte), para todo intervalo de medida T , la suma de las potencias medias, $\langle p_k(t) \rangle_{T_M}$, que el resto del circuito (resp., de la parte) entrega a cada uno de sus elementos es cero. Es decir

$$\sum_{k=1}^b \langle p_k(t) \rangle_{T_M} = 0 \quad (4.7)$$

En la aplicación a una *parte*, se entiende *parte no conectada* y b se refiere al número de ramas de la misma.

Se demuestra integrando la expresión de la conservación de la potencia instantánea. En suma, ambas potencias se conservan para todo circuito de parámetros concentrados (sea LTI, LTV o NL).

A veces en Teoría de Sistemas y con carácter general en Teoría de la Comunicación, se representan las señales por $x(t)$ independientemente de su tipo, y se utiliza el concepto de *energía de dicha señal* mediante la función real del tiempo dada por⁶ $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ y el de *potencia instantánea de la señal* por $|x(t)|^2$. Nótese que el valor de la *potencia eléctrica* es $i^2(t)$ o $v^2(t)$ sólo en el caso de que tal puerta alimente o se comporte como una resistencia de 1Ω .

La definición genérica anterior referente a señales da lugar a una terminología particular en ese campo acerca de las mismas⁷ que no necesitaremos.

Simetría y ortogonalidad

Una propiedad de las señales que facilita muchos cálculos es el hecho de que puedan poseer alguna forma de **simetría**. En particular, son frecuentes las dos siguientes, para una $x(t)$ dada, en el intervalo de interés.

Función *par* (o *simétrica* respecto de $t = 0$)

$$x(t) = x(-t) \quad \forall t$$

Función *impar* (o *antisimétrica* respecto de $t = 0$)

$$x(t) = -x(-t) \quad \forall t$$

En particular la función “cos” es par mientras que la función “sin” es impar⁸.

Una segunda cualidad que proviene del estudio de los espacios vectoriales funcionales permite establecer una definición de producto escalar entre dos

⁶El valor absoluto o módulo tiene relación con el hecho de que en ocasiones las señales se representan -como veremos- de forma compleja. En tal caso el integrando es el producto de la señal por su conjugado cuyo valor es igual al cuadrado del valor absoluto, $x(t) \cdot x^*(t) = |x(t)|^2$.

⁷Así toda señal que se anule en el infinito y cuya integral sea finita poseerá una energía (de señal) finita. Así estas señales se denominan *señales de energía* para distinguirlas de aquellas señales cuya energía es infinita, p. ej. debido a que su potencia no se anula en el infinito, señales a las que se les denomina *señales de potencia*.

⁸Además si un integrando es el producto de dos funciones y cada una de ellas presenta alguna de las formas de simetría citadas, resulta que el carácter del integrando (producto) es deducible de las reglas aritméticas básicas (*par* \times *par* = *par*, *par* \times *impar* = *impar*, etc.).

señales en un intervalo dado. Este producto escalar cuando sea nulo aporta el concepto de **ortogonalidad** entre dos señales. En suma, se define el *producto escalar* de dos señales $x_j(t)$ y $x_k(t)$, *funciones reales* de t en el *intervalo dado* (t_1, t_2) de anchura $T = t_2 - t_1$, como el valor real

$$\langle x_j(t), x_k(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x_j(t)x_k(t)dt \quad (4.8)$$

También se designa⁹ por $x_j(t) \cdot x_k(t)$. En cualquier caso se diría que $x_j(t)$ y $x_k(t)$ son ortogonales siempre que $x_1(t) \cdot x_k(t) = 0$. Se dice que $x_j(t)$ está *normalizada* si $x_j(t) \cdot x_j(t) = 1$.

Por extensión de estos conceptos se dice que el conjunto $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots\}$ constituye una *base ortonormal* si $\phi_j(t) \cdot \phi_k(t) = \delta_{jk}$ (Kronecker). Cualquier función unidimensional arbitraria, bajo ciertas condiciones y en un intervalo dado, puede aproximarse como una combinación lineal de aquella base en la forma

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (4.9)$$

En el contexto general del estudio de espacios vectoriales se llama “norma” del “vector” $x_j(t)$ a $\|x_j(t)\| = \sqrt{\langle x_j, x_j \rangle}$, nótese que en el caso de las funciones reales $\|v_j(t)\|$ juega el mismo papel que el módulo de los vectores euclidianos.

En el caso de que $x(t)$ estuviera representado en forma compleja, entonces en el integrando de (4.8) aparecería $x_j(t)x_k^*(t)$, además los coeficientes del desarrollo de $f(t)$ serán en general complejos, ya que ahora el espacio vectorial sería de funciones complejas, $f \in \mathbb{C}$. En todo caso, la existencia de un producto escalar implica un *espacio*¹⁰ *de Hilbert*.

La combinación lineal obtenida es única para una base dada y además presenta importantes propiedades cuando se utiliza un número finito de elementos de la serie, por supuesto siempre que $x(t)$ cumpla ciertos requisitos, usualmente verificados por las señales eléctricas de interés.

4.2. Señales en el dominio del tiempo

En primer lugar estudiaremos dos tipos de señales de especial importancia en el sentido de que a partir de las mismas se pueden caracterizar las demás.

Salto o escalón unitario, $1(t)$

Por definición es¹¹

⁹Obsérvese que notacionalmente es $\langle x(t), y(t) \rangle \equiv x(t) \cdot y(t) \equiv \langle x(t)y(t) \rangle$.

¹⁰Existen espacios métricos funcionales definidos solamente sobre una *norma*, se llaman *espacios de Banach* (del cual el de Hilbert es un caso particular). Estas cuestiones poseen un interés adicional en la aproximación de funciones no lineales.

¹¹En Teoría de Circuitos para evitar la indefinición en $t = 0$ de la función $1(t)$ se supone en algunas ocasiones que en el origen vale $1/2$ sin otro tipo de consideraciones.

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Una aproximación de interés para evitar la discontinuidad se basa en utilizar el límite de una función continua que posee un tiempo de subida Δ desde el valor 0 en el origen hasta el valor 1. Es decir $1(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t)$, siendo

$$u_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{en } t < 0 \\ t/\Delta & \text{" } 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{" } t > \Delta \end{cases} \quad (4.11)$$

El interés de la función escalón podemos resumirlo en las siguientes notas:

- Con ella cobran sentido excitaciones de tipo $V \cdot 1(t)$, $(V_m \sin \omega t) 1(t)$, $t^n \cdot 1(t)$, la función signo $sig(t) = 2 \cdot 1(t) - 1$, ... y otras que aparecen en muchos circuitos (lógicos, de pulsos, de potencia, etc.).
- También se pueden convertir en formas adecuadas para tratamientos analíticos o numéricos de circuitos planteados muy frecuentemente con interruptores ideales, y viceversa.
- Cualquier excitación arbitraria de un circuito se puede aproximar como una combinación lineal de escalones, como veremos enseguida.

Pulso de altura unitaria y anchura Δ , $p(t)$

Se define como¹²

$$p(t) = 1(t) - 1(t - \Delta) \quad (4.12)$$

- Cualquier función $x(t)$ real y continua se puede aproximar en $[t_0, t_f]$ como una suma de $N + 1$ pulsos de altura unitaria en la forma

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^N x(t_k) p(t - t_k) \quad (4.13)$$

siempre que $[t_0, t_f]$ se divida en $N + 1$ intervalos de anchura $\Delta = (t_f - t_0)/N$.

- Obsérvese que los $N + 1$ pulsos implicados $p(t - t_0), p(t - t_1), \dots, p(t - t_f)$ son "ortogonales" y que la aproximación citada es tanto mejor cuanto mayor sea N .
- Si la aproximación anterior es suficientemente buena, la forma (4.13) nos sugiere que para el estudio de un sistema LTI¹³ se cumplirá que

¹²Utilizamos $p(t)$, en su ámbito de uso no se confunde con la potencia instantánea.

¹³Es decir lineal (verifica superposición con c.i. nulas) y t -invariante (la respuesta a $p(t - t_k)$ con c.i. nulas tiene la misma forma independientemente de t_k), en suma, para un sistema LTI, dinámico o no.

la respuesta para *cualquier* $x(t) \forall t \geq 0$, es deducible de $x(t)$ y de la respuesta a $p(t)$ (y por ende de la respuesta a $1(t)$).

Impulso o función $\delta(t)$

Por definición la *distribución* $\delta(t)$ (no es una función propiamente dicha) se define mediante la expresión

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = x(t_0) \quad (4.14)$$

para toda $x(t)$ que esté definida en t_0 . Otra forma equivalente de definición lo constituye el par de expresiones siguientes

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t)dt = 1 \quad \forall \epsilon > 0 \quad \delta(t) = \begin{cases} \text{singular} & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Al igual que en el caso anterior se puede utilizar una aproximación heurística interpretando la $\delta(t)$ que llamaremos *impulso unitario*, como el límite de una función que denominaremos *pulso unitario* por ser *rectangular de área unidad*¹⁴ que notaremos $p_{\Delta}(t)$, utilizando las expresiones siguientes

$$p_{\Delta}(t) = (1/\Delta) [1(t) - 1(t - \Delta)] \quad (4.16)$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t) \quad (4.17)$$

También es $du_{\Delta}/dt = p_{\Delta}$ y tomando límites se acepta (*en sentido distribución*) que $d1(t)/dt = \delta(t)$.

Como antes, el interés de la función impulso podemos resumirlo en las notas siguientes:

- En ocasiones se producen situaciones en las que el valor las variables v o i de un circuito, excitaciones o respuestas, se pueden aproximar por formas impulsivas.
- Además la expresión de $x(t)$ continua en cualquier t se puede aproximar por

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^N x(t_k) \cdot p_{\Delta}(t - t_k) \cdot \Delta \quad (4.18)$$

que nos permite repetir una idea ya expresada: la respuesta de un elemento o sistema LTI¹⁵ desde condiciones iniciales nulas a cualquier excitación $x(t)$, se podrá deducir –en forma aproximada– de la respuesta a $p_{\Delta}(t)$.

¹⁴En Ingeniería es práctica común visualizar circuitos, características de funcionamiento y las propias señales. El concepto de límite permite visualizar el impulso como el *límite* de un pulso especial, $p_{\Delta}(t)$, de área unitaria con anchura Δ y altura $1/\Delta$, suponiendo $\Delta \rightarrow 0$ (nunca $\Delta = 0$). Caben otras, p. ej. el mismo pulso centrado en el origen, idem triangular, gaussiano, etc.

¹⁵No es el caso si fuera LTV ya que cada $p_{\Delta}(t - t_k)$ generaría respuestas diferentes.

- Convirtiendo el sumatorio en una integral y sustituyendo la variable del mismo t_k por τ se puede escribir, extendiendo los límites de la integral para mayor generalidad (siempre que $x(t)$ esté definida $\forall t \in \mathbb{R}$), que es

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)d\tau \quad (4.19)$$

Nótese que esta expresión es la propia definición de la distribución $\delta(t)$.

En resumen, con todo ello podemos comprender que toda $x(t)$ continua se puede aproximar mediante una *combinación lineal* infinita de *impulsos*.

4.3. Señales en el dominio de la frecuencia

En muchas ocasiones (amplificadores, osciladores, circuitos de potencia, circuitos de comunicaciones, etc) se utilizan señales sinusoidales o representaciones de señales temporales arbitrarias en forma sinusoidal.

La representación frecuencial de las señales temporales será de gran utilidad por si misma. Más adelante se utilizará para obtener la *caracterización externa de un determinado tipo de circuitos* LTI, precisamente por su modo de responder a una señal $u_s(t) = 1 \cdot \sin \omega t$, $\forall \omega$, o $u_s(t) = 1 \cdot \cos(\omega t + \theta)$, $\forall \omega$, representada por un *fasor*, respuesta compleja que notaremos $H(j\omega)$.

También más adelante relacionaremos dicha representación con la respuesta del mismo circuito LTI en el dominio del tiempo a la función impulso, $\delta(t)$, respuesta que notaremos por $h(t)$.

En ambos casos a partir de ellas se podrá obtener la respuesta a cualquier señal arbitraria, bajo ciertas condiciones y con determinados procedimientos que deben ser estudiados. Por ello debemos ver antes de nada, repasar realmente, las formas de representación de señales sinusoidales.

4.3.1. Representación fasorial de señales sinusoidales de frecuencia angular ω

Una de las formas más utilizadas y preferidas en Teoría de Circuitos para representar una señal sinusoidal en el dominio del tiempo (o en ωt) es

$$x(t) = x(\omega t) = X_m \cos(\omega t + \theta) \quad (4.20)$$

donde X_m es la amplitud, ω es la pulsación o frecuencia angular ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) con $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, con f frecuencia (Hz), T período (s), y θ la fase (rad). Otros casos se pueden reducir fácilmente a este, p. ej. $X_m \sin \omega t = X_m \cos(\omega t - \pi/2)$.

La denominada *representación fasorial* de (4.20) se basa en la igualdad

$$X_m \cos(\omega t + \theta) = \text{Re} \left[\tilde{X} e^{j\omega t} \right] \quad \forall t \in (-\infty, \infty) \quad (4.21)$$

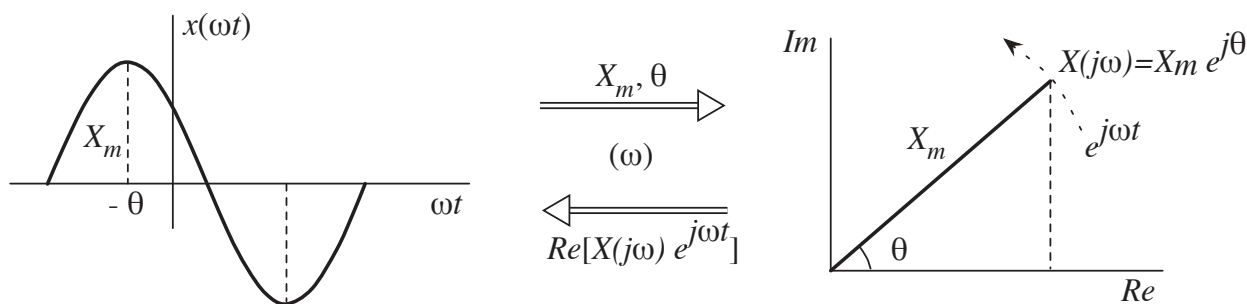


Figura 4.1: Representación fasorial de señales sinusoidales

con las notaciones posibles¹⁶ para el *fasor* $\tilde{X} \in \mathbb{C}$

$$\tilde{X} \equiv X(j\omega) = X_m e^{j\theta} = \left| \tilde{X} \right|_{\arg \tilde{X}} = X_m \angle \theta \tag{4.22}$$

Es decir, todo *fasor*, animado de la velocidad angular constante ω (prefijada) alrededor del origen, en sentido contrario a las agujas del reloj, desde $t = -\infty$, verifica que su proyección sobre el eje real¹⁷ $\forall t$ es precisamente $x(t)$.

A continuación se hacen constar algunas observaciones de interés de la representación $x(t) \iff \tilde{X}$ y su aplicación a la TC:

- La representación fasorial (4.22) verifica además de la *unicidad*, dos propiedades de gran interés y fácil demostración: *linealidad* y *regla de diferenciación*, Tabla 4.1.

<i>Linealidad</i>	$x(t) = \sum_k \alpha_k x_k(t)$	\iff	$\tilde{X} = \sum_k \alpha_k \tilde{X}_k$
<i>Diferenciación</i>	$\frac{dx(t)}{dt}$	\iff	$j\omega \tilde{X}$

Tabla 4.1: Propiedades básicas para TC de la transformación fasorial

- Los conceptos conocidos de *impedancia* y *admitancia* provienen de la representación fasorial, en particular de las relaciones fasoriales entre sus corrientes y tensiones. Así, para un condensador LTI con $v = V_m \cos(\omega t + \phi)$ es $i = Cdv/dt$ resultando en el dominio frecuencial la conocida *impedancia compleja* $Z_C(j\omega) \equiv \tilde{V}/\tilde{I} = 1/(j\omega C) = 1/(\omega C) \angle -(\pi/2)$; nótese que

¹⁶Además de la notación $\tilde{X} \equiv X(j\omega)$, y a veces \hat{X} , se usan también \underline{X} , \vec{X} , o simplemente X cuando no existe confusión con valores eficaces o de otro tipo. En Electrotecnia es práctica común utilizar como módulo el valor eficaz (r.m.s.), diciendo que el fasor de una tensión monofásica doméstica en España es $\underline{U} = 230 \angle \theta$ (desde 2004, con una tolerancia legal del 7%). Para nosotros se representaría $230\sqrt{2} \angle \theta$, es decir un valor máximo $V_m = 230\sqrt{2} = 325$ V.

¹⁷Obsérvese que $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t = 1 \angle \omega t$ recorre en tal sentido un círculo de radio unidad y en $t = 0$ es $1 \angle 0$ por lo que $\tilde{X} = X_m \angle \theta$.

expresa que la $v(t)$ se retrasa $\pi/2$ respecto de la corriente. El concepto de *admitancia compleja* conduce a $Y_C(j\omega) = Z_C^{-1}(j\omega)$.

- El *espectro* de $x(t)$ se puede representar sobre dos pares de ejes: En el primer par representaremos las amplitudes o módulos, $|\tilde{X}|$ en función de ω . Así, para la señal $x(t) = X_m \cos(\omega_o t + \theta_o)$ se puede representar su módulo por un trazo vertical de altura X_m en $\omega = \omega_o$. El otro par se reserva para representar el *argumento* o fase, $\arg \tilde{X}$ o θ_o , en ω_o . A tal modo de representación podemos llamarla *representación espectral* de $x(t)$.

4.3.2. Representación exponencial de señales sinusoidales de frecuencia angular ω

Si no se quiere utilizar la función $Re[\cdot]$, se puede acudir a la suma de dos complejos conjugados para representar (4.20). Utilizando la fórmula de Euler, $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, se deduce¹⁸ para nuestra expresión $x(t)$ las expresiones y observaciones que siguen.

$$x(t) = x(\omega t) = \tilde{X}_1 e^{j\omega t} + \tilde{X}_{-1} e^{-j\omega t} \quad (4.23)$$

con

$$\tilde{X}_1 = \frac{X_m}{2} e^{j\theta} \quad \tilde{X}_{-1} = \frac{X_m}{2} e^{-j\theta} \quad (4.24)$$

Observaciones de interés para este caso:

- La función temporal $x(t)$ es la suma sin necesidad de considerar las proyecciones, es decir, es la superposición de dos fasores \tilde{X}_1 y \tilde{X}_{-1} (son complejos conjugados) que giran respectivamente en sentidos contrarios, con ω y $-\omega$ rad/seg respectivamente.
- Cabe entonces una representación de $x(t)$ en el dominio de la frecuencia mediante un espectro discreto o de líneas como antes, pero ahora utilizando las amplitudes $|\tilde{X}_1| = X_m/2$ y $|\tilde{X}_{-1}| = X_m/2$ en ω_o y $-\omega_o$ rad/seg respectivamente (la representación del módulo es *par*) y en las mismas frecuencias representando también las fases $\arg \tilde{X}_1 = \theta_o$ y $\arg \tilde{X}_{-1} = -\theta_o$ (la representación del argumento es *impar*).
- Las frecuencias negativas, $-\omega$ en el caso anterior, solo tienen el sentido matemático requerido por el procedimiento constructivo seguido¹⁹, pero la señal temporal *física* está definida con una frecuencia positiva.

¹⁸Es $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$ y $\sin \alpha = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$.

¹⁹Lo cual quiere decir que una señal real es la suma de dos señales complejas y no hay nada que nos impida tratar a cada una de ellas como una señal propiamente dicha. Por cierto, una práctica muy común es la de utilizar la formulación compleja $\tilde{X}e^{j\omega t}$ que debería notarse $\tilde{x}(t) = \tilde{X}e^{j\omega t}$ para evitar ambigüedades. Ello equivale a sobreentender la operación $Re[\cdot]$, o $Im[\cdot]$ si se quisiera utilizar, o utilizando las dos componentes $\tilde{x}_1(t)$ y \tilde{x}_{-1} , pero sin olvidar que ninguna de ellas es una “señal de osciloscopio”.

4.4. Variables eléctricas y potencia eléctrica

4.4.1. Fasores y circuitos que operan en s.s.s.

Para que la respuesta de un *circuito dinámico* a una excitación sinusoidal de frecuencia ω , p. ej. $v_s(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ sea también sinusoidal y de la misma ω es condición necesaria (pero no suficiente) que el circuito sea LTI. Realmente la *condición necesaria y suficiente* para ello es: el circuito *debe ser LTI*, debe ser *exponencialmente estable*, y además *cualquier transitorio debe haberse anulado*.

Este hecho que es perfectamente conocido y puede revisarse en los Ejercicios complementarios. Sólo significará que cualquier respuesta en régimen permanente, p. ej. la de $i_k(t)$, adopta la forma $i_{k,ss}(t) = \text{Re}[I_k(j\omega)e^{j\omega t}]$, donde el complejo $I_k(j\omega) = I_{m,k} \angle \varphi_k$ se denomina fasor. Las propiedades de los fasores (*linealidad* y *regla de diferenciación*) se encargan del resto. Incluso estas propiedades admiten la misma forma de respuesta si el circuito posee varios generadores siempre que todos ellos sean de la misma ω .

Con un cierto abuso de lenguaje (para diferenciación radical con p.s.s.) llamaremos ocasionalmente a estos circuitos, operando en *estado estacionario sinusoidal*, *circuitos s.s.s.*

El análisis de circuitos s.s.s. lo veremos en primer lugar, comprobando que la transformación fasorial convierte a cualquier formato de ecuaciones temporales (tableau, MNA, escalares, etc.) en *ecuaciones lineales algebraicas con coeficientes complejos*, \mathbb{C} , de muy fácil resolución.

Después veremos conceptos básicos de generadores polifásicos en circuitos s.s.s., es decir operando a una única frecuencia (ω), ubicuos en Electrotecnia y Electrónica de Potencia, antes de hacer una revisión de los *Corolarios de conservación de potencia* derivados del Teorema de Tellegen para estos circuitos.

4.4.1.1. Análisis de circuitos s.s.s.

Para ello basta considerar que las expresiones fasoriales de todos los *elementos* LTI (p. ej. R, L, C, transformadores ideales, giradores, circuladores, fuentes dependientes lineales, etc.) son triviales²⁰. En suma, partiendo de las ecuaciones tableau LTI en el dominio t , con $D \equiv d/dt$,

$$Ai(t) = 0 \quad -A^T e(t) + v(t) = 0 \quad (M_1 + M_2 D)v(t) + (N_1 + N_2 D)i(t) = u_s(t)$$

La respuesta s.s.s. se puede obtener en la forma fasorial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & 1 & 0 \\ 0 & M(j\omega) & N(j\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(j\omega) \\ V(j\omega) \\ I(j\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_s(j\omega) \end{pmatrix}$$

es decir, del sistema lineal $T(j\omega)W(j\omega) = U(j\omega)$, o de cualquiera de sus formas más compactas (p. ej. MNA, $P(j\omega)W_{MNA}(j\omega) = U_{MNA}(j\omega)$, o escalar).

²⁰Se pueden expresar todas ellas en la forma $M(j\omega)V + N(j\omega)I = U_s(j\omega)$, donde $M(j\omega)$ y $N(j\omega)$ son matrices de polinomios en $j\omega$ (evitando términos en $1/j\omega$).

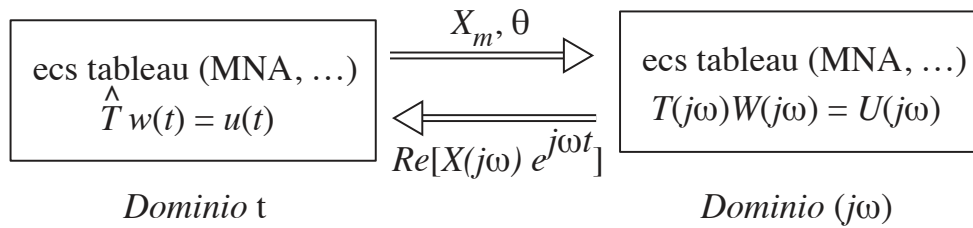


Figura 4.2: Resolución con fasores de circuitos LTI en s.s.s.

Observaciones

- Lógicamente la solución de un problema s.s.s. debe darse en el dominio del tiempo utilizando la transformación fasorial inversa, tal y como se esquematiza en la Fig.4.2.
- Los cocientes de sus variables son complejos dependientes de ω y se denominan *impedancias*, *admitancias* o *ganancias*, con los apellidos que correspondan.
- El efecto de una sola excitación sobre su propia puerta produce una *respuesta* en la misma llamada *de punto*. En el caso $V(j\omega) = Z(j\omega)I_s(j\omega)$ la función de punto se llama *impedancia* y se puede escribir $Z(j\omega) = R + jX(\omega)$ siendo $X(\omega)$ la *reactancia*. En el caso $I(j\omega) = Y(j\omega)V_s(j\omega)$ llama *admitancia* y se puede escribir $Y(j\omega) = G + jB(\omega)$ siendo $B(\omega)$ la *susceptancia*.
- El efecto de una de ellas sobre otra puerta distinta o sobre cualquier variable del circuito que no sea de su misma puerta produce una *respuesta* que se denomina *de transferencia*, con notación similar a la precedente.
- Incluso si existieran generadores de distintas frecuencias que por separado (anulando las restantes) produjeran respuestas s.s.s., el teorema de superposición es igualmente aplicable²¹, aunque ahora el resultado puede no ser periódico (como sucederá con dos señales de frecuencias angulares $\omega_1 = \lambda\omega_2$ con λ irracional, p. ej. e , $\sqrt{2}$, π , etc.).

En circuitos LVT o NL los elementos de este carácter alteran ω , de modo que cualquier respuesta deja de ser de la forma (4.20) por lo que carece de sentido la representación fasorial.

²¹Ello es cierto aunque sólo existiera un generador con la forma $v_g(t) = \sum v_k(\omega_k t)$ y cada $v_k(\omega_k t)$ fuera sinusoidal con frecuencia diferente, p. ej. una sinfonía musical. Ahora bien, la respuesta dependería de la acción del circuito completo sobre cada componente por separado.

4.4.1.2. Caso particular: Fuentes polifásicas en circuitos s.s.s.

El amplísimo campo de la Electrotecnia (véanse las aportaciones de Nikola Tesla) se fundamenta en la posibilidad de generar, transformar y utilizar la energía eléctrica en forma alterna (ca o ac) en todos los ámbitos imaginables; ello fue el origen de la llamada Segunda Revolución Industrial la cual activó una revolución científica sin precedentes.

La base de todos los circuitos polifásicos son los *generadores trifásicos*. Para tal esquema basta partir de tres generadores sinusoidales cuyas tensiones estén desfasadas $2\pi/3$ rad = 120° , tales como:

$$\begin{aligned} v_a &= V_m \sin \omega t = V_m \cos(\omega t - \pi/2) & \tilde{V}_a &= V_m \angle -\pi/2 \\ v_b &= V_m \sin(\omega t - 4\pi/6) = V_m \cos(\omega t + 5\pi/6) & \tilde{V}_b &= V_m \angle 5\pi/6 \\ v_c &= V_m \sin(\omega t + 4\pi/6) = V_m \cos(\omega t + \pi/6) & \tilde{V}_c &= V_m \angle \pi/6 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Conectados en Y (se dice *en estrella*) a través del borne “-” de cada fuente, esta configuración es un *generador trifásico de alterna*. En efecto, el producto $1 \cdot e^{j\omega t}$ hace girar los tres fasores en el sentido contrario de las agujas del reloj y la aplicación de $Re[\cdot]$ tenemos visualizada la forma temporal de sus tres tensiones fasoriales, desfasadas $4 \cdot (\pi/6)$ rad = 120° .

Una *representación textual prespice* en el contexto frecuencial (fasorial) con ω dada debería ser²²

$$vj_3fasesY \quad 1 \ 4 \quad 2 \ 4 \quad 3 \ 4 \quad \tilde{V}_a \quad \tilde{V}_b \quad \tilde{V}_c \quad (4.26)$$

Pues bien, si a esta estructura²³ se conecta una similar de tres impedancias iguales $Z(j\omega) = |Z| \angle \theta$ (carga equilibrada) y se unen los puntos centrales de ambas, usualmente llamados *neutros*, se obtienen resultados de gran interés tecnológico, como vamos a ver.

Observaciones

- Como $\tilde{V}_a + \tilde{V}_b + \tilde{V}_c = 0$ resulta que $\tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c = 0$, es decir $i_N(t) = 0$, la corriente de la conexión entre ambos puntos centrales es cero, ¡no se precisa conectar tales nodos!. Es decir, con un solo cable más que en el caso monofásico (50 % más de coste) se puede hacer llegar una potencia y una energía 3 veces mayor (un 200 % mayor) lo que implica un importante ahorro de cables (Al, Cu, etc.).

²²Desde 2004 en España el sistema B3 que establece los 220 V rms, establece 400 V rms entre dos de estas fases. Nótese que $V_m = 230\sqrt{2} = 325$ V de cada fase producen, como veremos, $V_{m,ab} = \sqrt{3}V_m = 565$ V entre cada dos de ellas (400 V rms).

²³Es fácil comprobar que una estructura en triángulo de los mismos generadores tendría la representación *prespice*

$$vj_3fases\Delta \quad 1 \ 2 \quad 2 \ 3 \quad 3 \ 1 \quad \tilde{V}_{ab} \quad \tilde{V}_{bc} \quad \tilde{V}_{ca}$$

aunque ahora la tensión entre cada dos nodos de esta configuración es $\sqrt{3}$ veces menor que la anterior.

- Mediante el uso de transformadores, se pueden lograr reducciones adecuadas a las necesidades del proceso, sea de producción, sea de transporte, sea de distribución, sea de consumo final de la energía eléctrica. Como ejemplo, para el *transporte* a grandes distancias se desean bajas pérdidas (se opera con alto voltaje y baja corriente), entre otros²⁴.
- Las tres tensiones fase a fase, \tilde{V}_{ab} , \tilde{V}_{bc} , \tilde{V}_{ca} , poseen incluso mayor amplitud²⁵, p. ej.

$$\tilde{V}_{ab} = \sqrt{3}V_m \angle -2\pi/6 \quad (4.27)$$

estando esta nueva estructura fasorial en Y desfasada de la anterior en $\pi/6$ rad = 30° , cuestión esta de gran interés en Electrónica de Potencia (rectificación polifásica de onda completa para conversión *ac/dc*).

- Con la carga equilibrada, la potencia instantánea entregada por $vj-3fasesY$ a la misma es

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = \frac{3}{2} \frac{V_m^2}{Z} \cos \theta \quad (4.28)$$

es decir, constante e independiente del tiempo. Ello implica que ¡el par mecánico sobre el rotor del *alternador trifásico* que la genera es constante!

Pues bien, estas observaciones y otras muchas derivadas de ellas sugieren la necesidad de una revisión de todos los conceptos de potencia en s.s.s. Empezaremos por la potencia activa y la necesidad de compensación de potencia reactiva.

4.4.1.3. Conservación de potencia activa en operación s.s.s.

Consideremos un elemento cualquiera, simple o compuesto LTI operando en s.s.s. Las ecuaciones de sus variables de la puerta de interés (sea única o no) en el dominio t y $j\omega$ son:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t + \phi) & V(j\omega) &= V_m e^{j\phi} \\ i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi) & I(j\omega) &= I_m e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (4.29)$$

La *impedancia* (concepto de punto en el dominio $j\omega$) se representa por: $Z(j\omega) = |Z(j\omega)| \angle \theta$ y es

$$\begin{aligned} |Z(j\omega)| &= |V(j\omega)| / |I(j\omega)| \\ \angle Z(j\omega) &= \angle V(j\omega) - \angle I(j\omega) \end{aligned} \quad (4.30)$$

con $|Z(j\omega)| = V_m/I_m$ y $\theta = \phi - \varphi$ el argumento, con el significado ya visto.

²⁴Las aportaciones de Nikola Tesla (1856-1943) y George Westinghouse (1846-1914) formaron las bases de los sistemas modernos de potencia eléctrica por corriente alterna, incluyendo el sistema polifásico de distribución eléctrica y las máquinas de corriente alterna, frente a los iniciales usos de la corriente continua defendidos por Tomás Alba Edison (1847-1931).

²⁵Basta imaginar tres transformadores simples (con primarios conectados en Y, secundarios en Δ y con relación de espiras $n = 1$).

Definición 2 (Potencia activa): *La potencia activa es la denominación específica para circuitos s.s.s. de la potencia media medida en cualquier intervalo de duración $[t_1, t_1 + T]$, $\forall t_1$, siendo $T = 2\pi/\omega$. Como tal potencia media representa la que es capaz de transformar energía eléctrica en otros tipos de energía.*

Combinando las expresiones anteriores y dado que existe un periodo T , la potencia activa que recibe tal $Z(j\omega)$ en T es $\langle p(t) \rangle$ independiente de t , constante, designándose por P , con

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} V_m \cos(\omega\tau + \phi) I_m \cos(\omega\tau + \varphi) d\tau = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\theta$$

Para otros intervalos de medida, aunque no sean múltiplos enteros de T , siempre que $T_M \gg T$, la potencia media es $\langle p(t) \rangle_{T_M} = P$ y coincide también con la *potencia activa*.

Por consiguiente, a todo *circuito s.s.s.* le es aplicable el mismo **Corolario II del TT (Conservación de la potencia activa)**, que ahora notamos

$$\sum_{k=1}^b P_k = 0 \quad (4.31)$$

donde b representa el número de ramas del grafo (o parte considerada).

Observaciones

- De la operación s.s.s. y de expresión de la potencia activa para una puerta, el término $\frac{1}{2} V_m I_m = V_{rms} I_{rms} \equiv S$ se denomina *potencia aparente*. Es $P \leq S$ y la potencia activa sólo es igual a la aparente si $\theta = 0$ ($\cos\theta = 1$) es decir si el elemento es puramente resistivo $Z(j\omega) = R$.
- El término que multiplica a S , es decir $\cos\theta$ se denomina *factor de potencia*, el cual mide P/S , la fracción de potencia aparente que recibe el elemento en forma de potencia activa. Tal reducción de potencia activa es debida a la presencia²⁶ de elementos reactivos en $Z(j\omega)$.
- En la práctica existe una imperiosa *necesidad de compensación de la potencia*²⁷. En efecto, dado que cualquier $Z(j\omega) = R + jX$ (resp., $Y(j\omega) = G + jB$) existirán corrientes fluctuantes adicionales debidas a X con dos consecuencias desafortunadas:

²⁶ Así, si $Z = R$ es $\cos\theta = 1$ y toda la *potencia aparente* se convierte en *activa* que se disipa totalmente en R , siendo $P = (1/2)V_m^2/R = (1/2)I_m^2 R$. Si $Z = jX$, totalmente reactiva (siendo $X = \omega L$ o $X = -1/(\omega C)$), $\cos\pm(\pi/2) = 0$ y ninguna fracción de *potencia aparente* se convierte en *activa*, toda ella fluctúa, $p(t) = v(t)i(t) = V_m \sin(\omega t) I_m \sin(\omega t \mp \pi/2) = \pm 2V_m I_m \cos(2\omega t)$, con $\langle p(t) \rangle = 0$.

²⁷ En aplicaciones industriales las cargas que deben alimentarse suelen ser inductivas (motores, transformadores, etc.).

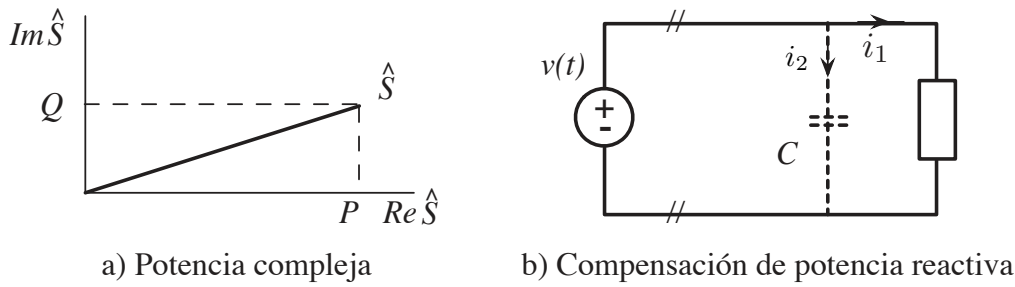


Figura 4.3: Diagrama de potencia y compensación de potencia reactiva

- El efecto Joule (proporcional a i^2) obliga a dimensionar el cableado para corrientes más intensas (aumentando su coste),
- Sería necesario disponer (o contratar) tensiones más elevadas, para la misma potencia activa, y
- La potencia reactiva que el proveedor nos mide posee un coste adicional²⁸.

Lo que precede, obliga a repasar conceptos generales relativos a la potencia y sus “componentes”. En particular la optimización de costes de la energía eléctrica en una instalación industrial requiere un estudio de la compensación del factor de potencia.

- Una forma simple del cálculo de C , sobre e la Figura 4.3b), supuesta $Z(j\omega)$ inductiva, requiere conocer la definición y los corolarios de conservación que siguen.

4.4.1.4. Conservación de potencia compleja y reactiva en s.s.s.

Dada $Z(j\omega)$ alimentada por un generador $v(t)$ sinusoidal, operando en s.s.s., se puede definir un complejo cuya parte real sea precisamente la potencia activa, $P = S \cos \theta$, y cuyo argumento sea θ , ver Figura 4.3a); tal complejo es único y tiene la forma $\tilde{S} = S \angle \theta$, se denomina *potencia compleja* y se define como

$$\tilde{S} \equiv 1/2 \hat{V} \hat{I}^* = P + jQ \tag{4.32}$$

Nótese que su parte imaginaria, $Q = S \sin \theta$, representa la indeseada *potencia reactiva*.

²⁸Un sistema de distribución de energía eléctrica con menor reactiva es más eficiente. Cuanto menor sea $\cos \theta$ más caro será el término adicional en la factura (€/kVArh). Como ejemplo (realmente depende de horario, tarifa contratada, etc.), en la orden ITC 1723/2009 se citan (aprox.): a) 0,062 €/kVArh para $\cos \theta < 0,80$, b) 0,042 €/kVArh para $\cos \theta \in [0,80, 0,95)$, y nula por encima de 0,95...

Definición 3 (Diagrama de potencia para circuitos s.s.s.): *La representación de la potencia aparente, \tilde{S} , entregada a una $Z(j\omega)$, en función de sus partes real, P , e imaginaria, jQ , se denomina diagrama de potencia de tal elemento.*

En relación con los tres tipos de potencia que intervienen en el diagrama citado, son de gran interés, además del corolario II, los dos principios de conservación que siguen para circuitos LTI en s.s.s., derivados del Teorema de Tellegen.

Corolario III (conservación de la potencia compleja): *Para todo circuito (resp., para toda parte) LTI en s.s.s operando con una única frecuencia ω , la suma de las potencias complejas, $\tilde{S}_k = 1/2\tilde{V}_k\tilde{I}_k^*$ que el resto del circuito (resp., de la parte) entrega a cada uno de sus elementos es cero. Es decir*

$$\sum_{k=1}^b \tilde{S}_k = 0 \quad (4.33)$$

En la aplicación a una parte, b se refiere al número de ramas de la misma.

La demostración de este corolario se desprende de la realizada para el Teorema de Tellegen (TT), particularizando todas las ecuaciones de partida para el caso s.s.s. (se propone como ejercicio).

Corolario IV (conservación de la potencia reactiva): *Para todo circuito (resp., para toda parte) LTI en s.s.s operando con una única frecuencia ω , la suma de las potencias reactivas, $Q_k = S_k \sin \theta_k$ que el resto del circuito (resp., de la parte) entrega a cada uno de sus elementos es cero. Es decir*

$$\sum_{k=1}^b Q_k = 0 \quad (4.34)$$

En la aplicación a una parte, b se refiere al número de ramas de la misma.

La demostración se sigue de los dos corolarios anteriores del mismo TT. También se propone como ejercicio la citada obtención del C necesario en el circuito de la Figura 4.3b).

4.4.2. Circuitos que operan en p.s.s.

El *régimen estacionario periódico (p.s.s.)*, es decir la operación con señales *periódicas* no necesariamente sinusoidales es muy común en circuitos de Electrónica de Potencia (EP), entre otros.

Omitiremos aquí utilizar el término “*circuito p.s.s.*” ya que este tipo de señales puede aparecer en numerosos casos pertenecientes a todos los tipos de circuitos (LTI, LTV o NL), como veremos.

Revisemos en primer lugar la representación de esas señales; después estudiaremos dos casos concretos de mayor interés en EP.

■ Señales p.s.s. de periodo T

El conocido *desarrollo en serie de Fourier* es el método natural para expresar señales periódicas arbitrarias (p.s.s.). Sea $x(t)$ una señal periódica de período T , o frecuencia fundamental $f = T^{-1}$, sea $\omega = 2\pi T^{-1}$.

Pues bien, en Teoría de Circuitos es usual acudir a uno de los tres modos equivalentes de representación, denominados *desarrollos en serie de Fourier*, que siguen:

1. Forma trigonométrica:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(n\omega t) d(\omega t)$$

siendo $\langle x(t) \rangle = a_0/2$ y $b_0 = 0$; de tal modo que la serie de Fourier converge hacia $x(t)$ si t es un punto de continuidad²⁹.

2. Representación fasorial (cosenoidal o compacta):

Cada componente frecuencial se puede escribir en la forma $\tilde{X}_n = X_{max,n} \angle \phi_n$. En efecto, es

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} x_n = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} X_{max,n} \cos(n\omega t - \phi_n)$$

haciendo para $n = 1, 2, \dots, n$

$$X_{max,n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \phi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

expresión que define los módulos y argumentos de las diferentes componentes frecuenciales. Ello nos permite decir, con $\tilde{X}_0 = a_0$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \operatorname{Re} \left[\tilde{X}_n e^{jn\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{n=\infty} \tilde{X}_n e^{jn\omega t} \right]$$

3. Representación exponencial³⁰ (o compleja):

La escribiremos en el formato que mejor visualiza el carácter de espacio vectorial funcional y su orientación a la aproximación de funciones.

²⁹Realmente $x(t)$ debe cumplir las condiciones de Dirichlet: 1. Ser periódica, $x(t) = x(t + T)$. 2. Ser continua salvo en un número finito de puntos. 3. Su valor medio debe ser finito. 4. Tener en T un número finito de máximos y mínimos. Incluso así, cerca de las discontinuidades la sucesión de sumas parciales del desarrollo difiere de x en un valor de un 9% del tamaño del salto (*fenómeno de Gibbs*).

³⁰Como sabemos se puede llegar a ella sustituyendo en la forma trigonométrica senos y cosenos por sus fórmulas de Euler. El intervalo que usaremos es $[-\pi, \pi]$, que incorpora la misma información que el $\omega t \in [0, 2\pi]$ en la representación angular o el $t \in [t_0, t_0 + T] \forall t_0$ en el dominio del tiempo.

Se llama $L^2[-\pi, \pi]$ al conjunto de funciones reales o complejas de *cuadrado integrable*, $\int f(x)f^*(x)dx = \int |f(x)|^2 dx < \infty$ en $(-\infty, +\infty)$. Pues bien, para este conjunto de funciones está definido un *producto escalar* en la forma (utilizamos la notación actual en Física)

$$\langle f, g \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g^*(x)dx$$

Tal conjunto con este producto posee estructura de *espacio de Hilbert*. El conjunto de funciones $\{\dots, \phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ definidas por $\phi_n = e^{jnx}$, $j \in \mathbb{Z}$ es la *base ortonormal* que define el *desarrollo de Fourier*. Nótese que es $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$ (Kronecker). Ello permite proyectar cualquier $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ sobre los elementos de la base y con tales proyecciones crear la combinación lineal infinita que sigue con los coeficientes así obtenidos

$$c_n = \langle f, \phi_n \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_n^*(x)dx \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \phi_n$$

Una consecuencia natural de la representación en componentes ortonormales es $\langle f(x), f(x) \rangle \equiv 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2$ denominada *identidad de Parseval*.

En nuestro caso debemos sustituir x por ωt para tener las expresiones usuales de la representación exponencial más utilizada en Ingeniería. La notación sería $x(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \tilde{X}_n e^{jn\omega t}$, con la base $\phi_n = e^{j\omega t}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Observaciones

- En la representación trigonométrica (y de ella en la fasorial), más utilizadas en TC, la $x(t)$ real no deja de ser un “vector” de un *espacio vectorial funcional de dimensión infinita* en el cual el *producto escalar* es

$$f(t) \cdot g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)d(\omega t)$$

y la *base ortonormal*

$$B = \{1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots\}$$

como es fácil comprobar.

- Tomando $\phi_n \in B$, $c_n \in \mathbb{R}$ y calculando $x(t) \cdot x(t) = [\sum (c_n \phi_n)] \cdot [\sum (c_n \phi_n)]$ la *identidad de Parseval*, es una generalización del teorema de Pitágoras, puede escribirse como $X_{rms}^2 \equiv (1/T) \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum |c_n|^2$.

- Si en el desarrollo de Fourier sólo se toma un número limitado de términos³¹, p. ej. $x_M(t)$ suma desde $n = 0$ hasta el $n = m$, entonces $\int_0^T [x(t) - x_M(t)]^2 dt \geq 0$ tiende a cero conforme $m \rightarrow \infty$. Ello implica que toda banda limitada a las primeras m frecuencias *minimiza el error cuadrático medio*.
 - La constatación de que $\langle x(t) \rangle = a_0/2$, y de las simetrías, si $x(t)$ es par (resp., impar) sólo contiene cosenos (resp., senos), simplifica los cálculos. La derivación término a término de la serie no siempre es posible ya que puede perder la convergencia³²; la integración no presenta tal problema.
 - La descomposición de *señales p.s.s.* en forma de combinación lineal de señales elementales facilita la obtención de la respuesta completa de circuitos LTI.
 - Los *espectros de líneas* tanto del módulo como del argumento son los correspondientes a todas las componentes. La representación exponencial es el punto de partida de la transformada de Fourier de señales arbitrarias (ver Anexo 1).
- **Interpretación vectorial de $v(t)$, $i(t)$ y $p(t)$ p.s.s.**

Las señales p.s.s. $v(t)$ e $i(t)$, representables por desarrollos de Fourier, admiten su tratamiento como vectores (funciones) dentro de un espacio *vectorial funcional de dimensión infinita* de base $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ que hemos visto. Si ambas $v(t)$ e $i(t)$ concurren en el mismo elemento de circuito, entonces:

1. De acuerdo con la definición de producto escalar y las de valor eficaz y medio, se verifica

$$V_{rms} = \sqrt{v \cdot v} \quad P = \langle p(t) \rangle = v \cdot i \quad (4.35)$$

2. Los desarrollos de Fourier de las variables v e i en el caso de que ambas sean p.s.s. (aquí ϕ_n es un ángulo) son

$$v(t) = \langle v(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} V_{m,n} \cos(n\omega t + \phi_n)$$

$$i(t) = \langle i(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} I_{m,n} \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

³¹Podemos imaginarlo como un filtrado de paso bajo ideal de *banda limitada*, desde frecuencia cero hasta $m\omega t$ (en la representación compleja se hubiera tomado entre $-m\omega t$ y $+m\omega t$), con m entero y finito.

³²Si $x(t)$ es continua en el intervalo de interés, si $x''(t)$ y $x'(t)$ son continuas a trozos entonces es $x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega [-a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)]$.

3. En el caso del valor eficaz, V_{rms} , sería la *norma* de $v(t)$ y la identidad de *Parseval* adoptaría la forma

$$V_{rms} = \sqrt{\langle v \rangle^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2} V_n^2} \quad \text{o} \quad V_{ac,rms}^2 = V_{rms}^2 - \langle v \rangle^2$$

Nótese que en promedio los cruces (productos de frecuencias distintas, ... “no calientan”). Análogamente para I_{rms} .

4. Con relación a la potencia media, haciendo $\theta_n = \phi_n - \varphi_n$, es

$$\langle p(t) \rangle = v(t) \cdot i(t) = \langle v(t) \rangle \langle i(t) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_{m,n} I_{m,n} \cos \theta_n$$

por eliminación de todos los términos ortogonales, es decir la potencia de cada componente p.s.s. de $v(t)$ la porta únicamente la componente p.s.s. de $i(t)$ de la misma frecuencia; en suma, $P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$.

■ Distorsión y factor de potencia con señales p.s.s.

En muchas ocasiones se desea tratar a una señal p.s.s. $i(t)$ como una *deformación* de una sinusoidal. Para caracterizar o medir la *distorsión* de la misma se toma su primer armónico como referencia³³ y se suelen utilizar dos indicadores de distorsión, a saber la *distorsión armónica total* (*THD*)³⁴ y el *factor de distorsión* (k_d), definidos por

$$THD = \sqrt{\frac{I_{rms}^2 - I_{1,rms}^2}{I_{1,rms}^2}} \in [0, \infty) \quad k_d = \frac{I_{1,rms}}{I_{rms}} \in [0, 1] \quad (4.36)$$

Nótese que no son independientes³⁵, $k_d = 1/\sqrt{1 + (THD)^2}$, además para una senoide pura sería $THD = 0$ y $k_d = 1$.

■ Dos ejemplos de interés en Electrónica de Potencia

1. *Potencia activa entregada por una $v_s(t)$ p.s.s. a un circuito LTI*

Si un circuito LTI exponencialmente estable (se comportaría como s.s.s. de ser excitado por un generador de frecuencia ω), pero excitado por un generador p.s.s., supongamos de voltaje, es decir por

³³En muchos circuitos de potencia el primer armónico es el más importante, ya sea porque es el que se desearía obtener (excluyendo a todas las restantes componentes) o porque es el que se desea evitar a toda costa por ser el mayor responsable del rizado en la obtención de una tensión (o corriente) continua.

³⁴En el estudio de amplificadores lineales de audio se definen la *distorsiones relativas* al armónico fundamental como $D_j = I_{j,rms}/I_{1,rms}$, con $j = 2, 3, \dots, n$, midiendo el efecto de todas ellas (sólo las dos o tres primeras son significativas) con la llamada *distorsión eficaz*, $D = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + \dots}$. Obsérvese que *THD* es precisamente esta D , si en aquella no se considera la componente continua.

³⁵El THD se utiliza especialmente en Teoría de la Señal y Comunicaciones, en donde normalmente se desea preservar la pureza de las señales. Por su parte k_d se utiliza en Electrónica de Potencia donde el uso de los conmutadores (reales o ideales) hacen inevitable la distorsión.

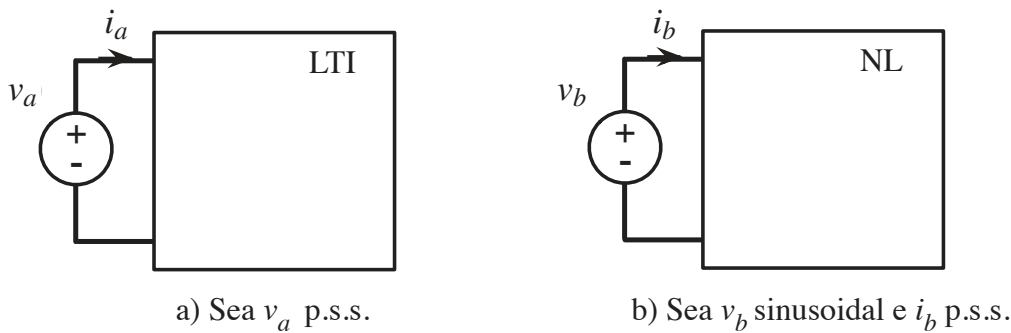


Figura 4.4: Ejemplos de operación en p.s.s.

$v_a(t) = \langle v_a(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} V_{m,n} \cos(n\omega t + \phi_n)$. En estado estacionario, su régimen sería p.s.s., Figura 4.4a), y de acuerdo con la *propiedad de superposición*, la respuesta $i_a(t)$ estaría caracterizada por

$$i_a(t) = \langle i_a(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} I_{m,n} \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

donde ahora $I_{m,1} I_{m,2} \dots$ son las amplitudes de las componentes armónicas de $i_a(t)$. Pues bien, si se calcula la potencia activa suministrada, producto escalar $v \cdot i$, es

$$\langle p(t) \rangle \equiv v_a(t) \cdot i_a(t) = \langle v_a(t) \rangle \langle i_a(t) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_{m,n} I_{m,n} \cos \theta_n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

con $\theta_n = \phi_n - \varphi_n$ y P_0 la potencia cc, como sabemos³⁶.

Al no existir un único $\cos \theta$ no se puede definir el factor de potencia como se hacía en s.s.s. No obstante podría definirse un *factor de potencia para el caso p.s.s.* como

$$k = \frac{\langle p(t) \rangle}{V_{a,rms} I_{a,rms}}$$

que representaría la fracción de potencia aparente, $V_{a,rms} I_{a,rms}$, que se convierte en potencia media.

2. Potencia activa entregada por $v_s(t)$ sinusoidal a un circuito NL

Para el caso de la Figura 4.4b) en la que $v_b(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ y su respuesta es p.s.s., $i_b(t) = \langle i_b(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} I_{m,n} \cos(n\omega t + \psi_n)$, es

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} V_m I_{m,1} \cos \theta_1 = V_{rms} I_{1rms} \cos \theta_1 \quad \theta_1 = \phi - \varphi_1$$

³⁶A veces se dice: Aunque la potencia instantánea “no obedece al teorema de superposición” (se producen $(1+n)^2$ términos), “la potencia media sí lo hace”.

es decir, sólo contribuye a la potencia media *el armónico fundamental de $i(t)$* por ser el de la misma frecuencia que $v(t)$.

Para dar un mejor significado a esta expresión escribámosla de nuevo como sigue

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} V_m I_{1,m} \cos \theta_1 = V_{rms} I_{rms} \frac{I_{1,rms}}{I_{rms}} \cos \theta_1 = V_{rms} I_{rms} k \quad (4.37)$$

Siendo $k = k_d k_\theta$ el *factor de potencia para ondas p.s.s.*, que representa lo mismo que el factor de potencia para s.s.s., $\langle p(t) \rangle / V_{rms} I_{rms}$, solo que ahora incorpora dos factores:

- a) *Factor de distorsión* de la corriente, $k_d = I_{1,rms} / I_{rms}$ que mide la deformación de la onda de corriente.
- b) *Factor de desfase* del primer armónico, $k_\theta = \cos \theta_1$ que mide el desajuste temporal de la respuesta deseada, el primer armónico, respecto de la excitación.

Consecuencia de los ejemplos que preceden es la definición que sigue.

Definición 4 (Factor de potencia p.s.s.): *Excitaciones y respuestas $v(t)$ e $i(t)$, p.s.s. en general, sobre un elemento simple o compuesto, lineal o no, permiten definir un factor de potencia p.s.s. en la forma $k \equiv \langle p(t) \rangle / (V_{rms} I_{rms})$, siendo $V_{rms} I_{rms}$ la potencia aparente suministrada.*

Obtenido $\langle p(t) \rangle$, objeto principal de este tipo de problemas³⁷, el cálculo de k es generalmente más sencillo. Basta obtener los valores eficaces. Si ha lugar puede hacerse de $k = k_d k_\theta$.

Al igual que en el caso s.s.s., para lograr la máxima conversión de potencia aparente en media, también ahora debemos tratar de hacer que k tienda a 1, a través de sus dos términos.

4.4.3. Circuitos que operan en régimen cuasi-p.s.s.

■ Ejemplo y definición de régimen dinámico cuasi-p.s.s.

A pesar de que en muchas ocasiones las señales p.s.s. son fruto de distorsiones especialmente intensas (no linealidades, conmutadores, etc.), la caracterización realizada hasta aquí es sobradamente suficiente.

En otras ocasiones los circuitos que generan estas señales entran en fases o modos *dinámicos* (saliendo del modo estacionario). En tales casos la caracterización anterior no es suficiente.

³⁷Además, si el factor de potencia se aplicara a un generador polifásico sería $k = \sum P_j / \sum S_j$, lo cual es una extensión de la definición anterior que define la cuantía de potencia aparente del conjunto que se convierte en potencia activa.

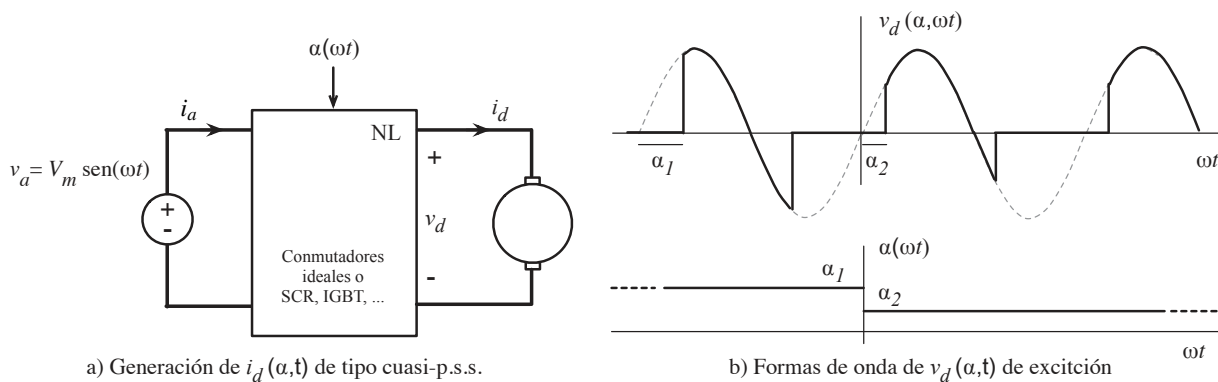


Figura 4.5: Ejemplo ilustrativo de operación cuasi-p.s.s.

Así, en la Figura 4.5a) y b), un convertidor ac/dc de EP que trocea una senoide $V_m \sin \omega t$ (mediante un control externo de fase, $\alpha(\omega t)$) de modo que altera su valor medio, supongamos que instantáneamente, desde un α_1 a un $\alpha_2 < \alpha_1$.

Se supone que la $v_d(\alpha_2, \omega t)$ generada alimenta un circuito (o elemento compuesto, en la figura la armadura de un motor de cc, LTI de primer orden), que dará lugar a una evolución dinámica de i_d que terminará en un nuevo p.s.s.

Pues bien, aquellas situaciones en las que la *evolución dinámica* resultante del circuito LTI, concretamente la de i_d crece dejando de ser p.s.s. durante un tiempo $T_{cuasi-pss}$ la llamaremos *régimen dinámico cuasi-p.s.s. del convertidor*, si $T_{cuasi-pss} \gg T$.

Antes de seguir nótese que si hiciéramos un análisis por separado para los dos valores de α , es claro que el cambio más notable en la i_d aplicada se produce en su valor medio; este es el efecto que se desea extraer, para una $x(t)$ en *régimen dinámico cuasi-p.s.s.*

■ **Ecuaciones tableau para circuitos LTI con variables promediadas en régimen cuasi-p.s.s.**

Aceptando lo expresado anteriormente, se define para régimen cuasi-p.s.s. el *valor promedio local* de $x(t) \forall t$, y se nota $\bar{x}_T(t)$, a la función continua

$$\bar{x}_T(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

donde el valor que toma T suele ser el periodo³⁸ del p.s.s. y en general es mucho menor que el intervalo dinámico en consideración.

³⁸De ese modo en régimen p.s.s. será $\bar{x}_T(t) = \langle x(t) \rangle$.

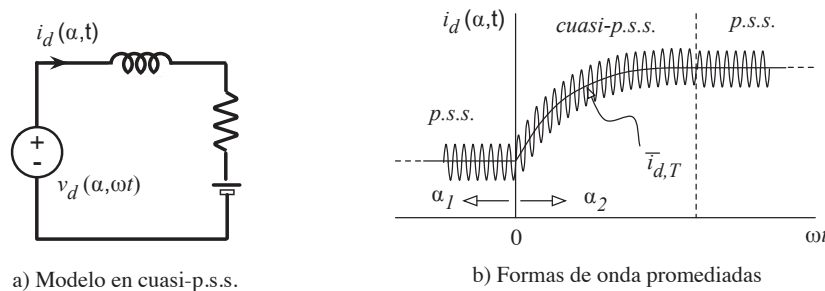


Figura 4.6: Utilización en cuasi-p.s.s. de variables promediadas

Pues bien, sea un circuito dinámico LTI (el método no será válido para LTV ni NL), si sus variables fundamentales son de tipo cuasi-p.s.s., aplicando la expresión precedente, resulta

1. Las leyes de Kirchoff relativas a las variables promediadas con el mismo T se conservan.
2. Además, la regla de Leibniz permite demostrar³⁹ que $d\bar{x}/dt = \overline{dx/dt}$, las expresiones definitorias de *cualquier elemento* LTI, son las mismas para sus *variables de promedio local*.
3. En suma, para todo circuito LTI operando en régimen cuasi-p.s.s. se puede aplicar tableau (MNA, ...) directamente con variables promediadas.

$$\begin{aligned} A\bar{i}_T(t) &= 0 \\ \bar{v}(t) &= A^T\bar{e}_T(t) \\ (M_0 + M_1D)\bar{v}(t) + (N_0 + N_1D)\bar{i}(t) &= \bar{u}(t) \end{aligned}$$

Cuando se alcanza el p.s.s., en tales circuitos los condensadores se vuelven circuitos abiertos y los inductores cortocircuitos, como corresponde a un régimen periódico, ya que en p.s.s. $\bar{x}_T(t) = \langle x(t) \rangle$.

Esta técnica es de gran interés en el control automático en los modernos circuitos de EP. En la Figura 4.6 se describe el modelo LTI del motor cc excitado por armadura (la fuente contraelectromotriz se puede asimilar a la excitación v_d). Pues bien, el conocimiento de esta $v_d(t)$ permite transformar⁴⁰ un circuito de notable complejidad analítica a uno LTI que trabaja con excitaciones y variables promediadas.

³⁹Se trata de la conocida expresión del cálculo integral

$$\frac{d}{dt} \int_{u(t)}^{v(t)} f(\tau) d\tau = f[v(t)] \frac{dv(t)}{dt} - f[u(t)] \frac{du(t)}{dt}$$

válida siempre que las funciones f , u y v sean continuas y derivables respecto de t en el intervalo cerrado en el que se utilicen.

⁴⁰Este paso hace necesario el *Teorema de sustitución* que se introduce en el Capítulo siguiente.

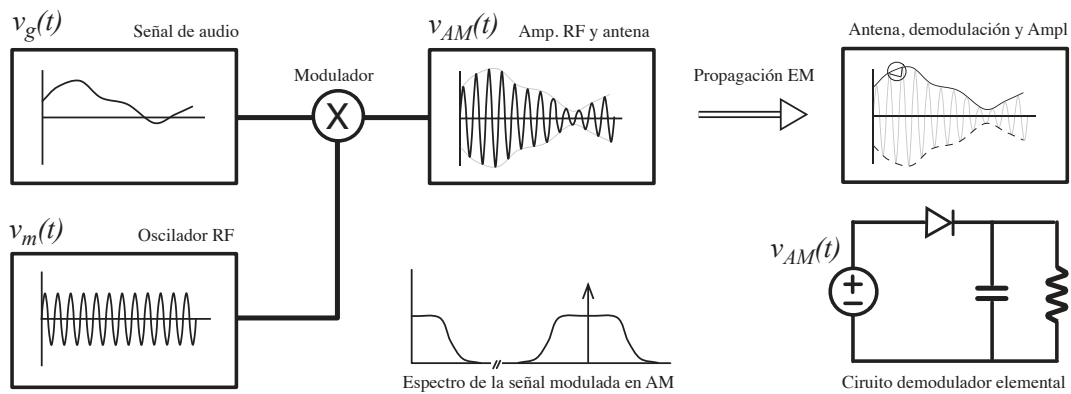


Figura 4.7: Modulación, transmisión y recepción de una señal arbitraria

Resumiendo, existen numerosas ocasiones en las que las señales pueden expresarse como una *combinación lineal* de componentes más simples. En otras ocasiones la búsqueda de la *linealidad* (o una aproximación de la misma) son un objetivo preferente.

4.5. Componentes espectrales de señales arbitrarias

4.5.1. Señales arbitrarias utilizadas en comunicaciones

Para toda $x(t)$ *arbitraria* en cualquier ámbito posible, p. ej. radio, telefonía, redes de ordenadores, etc, es necesario conocer su estructura temporal y frecuencial, los modos de codificación más eficientes, las técnicas de transmisión y si cabe los posibles soportes para ello (voltajes o corrientes, transmisión EM mediante antenas, transmisión óptica por cable, etc.).

Tomemos como ejemplo una señal de voz modulada en amplitud: $v_{AM}(t) = [1 + mv_g(t)] \cos(\omega_o t + \phi_o)$, Figura 4.7 y prestemos atención a las observaciones siguientes:

- Su obtención es simple (el modulador es esencialmente un multiplicador) y la extracción o demodulación de la señal modulada también lo es (un detector de máximo).
- La anchura de banda (representación frecuencial) de $v_g(t)$ debe ser conocida para poder procesarla (capturarla, amplificarla, modularla, etc.).
- La señal moduladora debe poseer una frecuencia ω_o suficientemente grande respecto de componente frecuencial más alta de $v_g(t)$.
- La frecuencia de modulación debe ser suficientemente alta para que la antena de transmisión sea de tamaño razonable (en una *antena resonante* su longitud es del orden de media longitud de onda de la señal moduladora ω_o).

4.5.2. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una *aplicación lineal* capaz de extraer de una señal $x(t)$ arbitraria el espectro de frecuencias de la misma. Mediante ella se pueden caracterizar muchas señales arbitrarias no periódicas y también muchos sistemas LTI.

Para toda señal $x(t)$, incluso compleja, se define la transformada $\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$ y su inversa $\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = x(t)$ como⁴¹

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Un ejemplo de tal extracción es lo que hace el oído humano cuando recibe una onda auditiva y la transforma (extrae de ella) un conjunto suficiente de componentes frecuenciales que el cerebro procesa de modo continuo.

Obsérvese de su definición que \mathcal{F} , cuando la integral existe, extrae de $x(t)$, visto como una combinación lineal infinita de impulsos, una suma infinita de las componentes frecuenciales implicadas por cada componente impulsiva.

Esta herramienta se supone conocida, no obstante en el Apéndice 1 del texto se hace un resumen de sus propiedades más importantes, entre las cuales están la *unicidad*, *linealidad* y *regla de diferenciación* ya vistas para fasores.

Ejercicios complementarios de clase

1. Utilizando un generador $i_g(t) = I, \forall t$ y un interruptor tripolar ideal, representar en forma circuital el generador compuesto dado por: a) $\pi j \begin{matrix} 1 & 2 \\ i & v \end{matrix} = I_0 \cdot 1(t) \forall v$, y b) Idem si el generador hubiera sido $\pi j \begin{matrix} 1 & 2 \\ v & u_s \end{matrix} = u_s(t) \cdot 1(t) \forall i$. Nota: Evitar inconsistencias LK en ambos casos.

SOL.: a) A modo de ayuda, analizar cuál es el único gozne de los tres del conmutador sobre el que el interruptor debe girar sin contravenir LK. b) Idem.

2. Para la representación fasorial: a) Demostrar las propiedades de *linealidad* y la *regla de derivación*. b) Sea un elemento de circuito definido por $i = a\dot{v} + b\dot{v} + cv$ inserto en un circuito LTI, obtener la expresión fasorial $I(j\omega) = Y(j\omega)V(j\omega)$. c) ¿Qué condiciones debieran verificarse para la validez de la expresión obtenida?. d) ¿A qué circuitos es aplicable la transformación fasorial?.

SOL.: a) Para la *linealidad*, Tabla 4.1, es importante observar que las constantes α_k que intervienen en la combinación lineal deben ser reales, $\alpha_k \in \mathbb{R} \forall k$, con ello es fácil ver que el "vector" o fasor de la combinación lineal es igual a la misma combinación lineal de los fasores que lo forman (hágase).

Para la *regla de derivación* puede ser de ayuda comprobar previamente que los "operadores" $\hat{R}e(\cdot)$ y $d/dt(\cdot)$ conmutan, es decir

⁴¹En representaciones en ω ambas expresiones no son simétricas (véase el factor $1/2\pi$), aunque en representaciones en $f = \omega/2\pi$ sí lo serían. Por ello a veces existen ligeras diferencias en las definiciones utilizadas, incluso a veces en la transformada y antitransformada se usa el mismo factor $1/\sqrt{2\pi}$. La que se dan aquí son las más frecuentes en Ingeniería Electrónica y Ciencias Físicas.

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d}{dt} \left(\tilde{X} e^{j\omega t} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[\operatorname{Re} \left(\tilde{X} e^{j\omega t} \right) \right]$$

b) Si es ω la frecuencia de sus dos variables (excitación y respuesta, si se quiere), es inmediato obtener $I(j\omega) = [(j\omega)^2 a + (j\omega)b + c] V(j\omega) = \dots$, es decir se ha convertido una ED ordinaria en una ecuación algebraica (sobre \mathbb{C}).

c) El circuito debe ser LTI (todos sus elementos LTI), pero además debe ser *exponencialmente estable* para que pueda existir un estado s.s.s. (independientemente de las c.i. de partida). Sin esta condición no podría suponerse que para una excitación sinusoidal de frecuencia ω dada, la respuesta pudiera ser s.s.s.

3. Sea el circuito LTI formado por el elemento compuesto⁴² $R||L||C$, con $R, L, C > 0$, excitado por $i_s(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$. Se pide: a) Resolverlo para $i_L(t)$ por el *método clásico* dadas c.i. no nulas. b) Obtener $i_L(t)|_{s.s.s.}$ si existe. c) ¿Que tiene en común la ED de la respuesta de este circuito con la del Ejercicio complementario n^o 5 del cap. 1, para una excitación también sinusoidal?. d) ¿Valores permitidos de los parámetros α y ω_o para que exista respuesta s.s.s.? ¿Por qué?.

SOL.: a) y b) Aplicar el *método clásico* de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Resumen: El método clásico admite una *solución particular* sinusoidal (cualquiera que sea), pero esta no es la *solución completa* para unas c.i. dadas. Faltaría añadirle una combinación lineal arbitraria de las soluciones de la homogénea y a la *completa así formada* imponerle las c.i. dadas. Sólo si *la parte real de todas las raíces de la homogénea fueran negativas* la *respuesta completa* para las c.i. dadas sería s.s.s., al cabo de un cierto transitorio.

c) La misma ec. escalar (de 2^o orden).

c) Hágase.

4. Si en el circuito del Ej. complementario n^o 5 del cap. 1 la excitación es sinusoidal, se pide: a) Plantear directamente (MNA, simple inspección) en formato fasorial las ecuaciones para la respuesta. b) Idem a partir de la ED estándar allí dada.
5. Para cualquier circuito LTI operando en s.s.s. se pide: a) Demostrar la conservación de la potencia compleja (corolario III del T. Tellegen). b) Idem la conservación de la potencia reactiva (corolario IV).

Sol.: a) Sea $\tilde{I} = (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_b)^T$ y $\tilde{V} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_b)^T$ los vectores de fasores de corrientes y tensiones de rama, y $\tilde{E} = (\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_{n-1})^T$ el vector de tensiones de nodo medidas respecto de un único nodo de referencia. De LCK es $A\tilde{I} = 0$, siendo A la matriz de incidencia reducida del grafo, también es $A\tilde{I}^* = 0$ siendo \tilde{I}^* el complejo conjugado de \tilde{I} . Por otra parte, de LVK también es $\tilde{V}^* = A^T \tilde{E}^*$, por lo que puede escribirse el producto escalar $\tilde{V} \cdot \tilde{I}^* = \tilde{V}^T \tilde{I}^* = (A^T \tilde{E})^T \tilde{I}^* = \tilde{E}^T (A\tilde{I}^*) = 0$. Al ser $\tilde{V}^T \tilde{I}^* = 0$ también es $(1/2)\tilde{V}^T \tilde{I}^* = 0$ o lo que es lo mismo $\sum_k \tilde{S}_k = 0$, lo que demuestra la *conservación de la potencia compleja*.

b) Para demostrar la *conservación de la potencia reactiva* basta escribir $\tilde{S}_k = P_k + jQ_k$. Extendida a todas las ramas toma la forma $\sum \tilde{S}_k = \sum P_k + j \sum Q_k = 0$. La anulación del primer miembro y la del primer sumando del segundo implican $\sum Q_k = 0$ (cq).

⁴²La notación “+” para conexión en *serie* y “||” para conexión en *paralelo* de elementos se usa a veces porque es muy visual y evita dibujar el circuito. Pero debe tenerse en cuenta que es *incompleta* ya que no permite describir cualquier conexión de tales elementos.

6. Utilizando el Corolario IV del TT, calcular el valor de C necesario para compensar la potencia reactiva en el circuito de la Figura 4.3b).

SOL.: Es $Q_{gen} + Q_Z + Q_C = 0$ por el principio de conservación de Q . Con el C buscado es: $Q_{gen} = 0$ y además $Q_Z = V_{rms} \cdot I_{1,rms} \sin \theta$ y $Q_C = V_{rms} [V_{rms} / (\omega C) \sin(-\pi/2)]$ de las que se deduce $C = (\sin \theta) / (\omega C)$.

7. Se pretende deducir las ecuaciones tableau para circuitos dinámicos LTI que operan en régimen dinámico cuasi-p.s.s., utilizando variables promediadas. Para ello: a) Demostrar que $d\bar{x}/dt = \overline{dx/dt}$. b) Demostrar la validez de las leyes de Kirchhoff relativas a las variables promediadas. c) Idem para las relaciones constitutivas de los elementos LTI y sus consecuencias.

Sol.: a) Aplicando la definición de valor promedio local en una ventana $T > 0$ se pueden escribir las expresiones del valor promedio de $x(t)$ y de $dx(t)/dt$ como sigue

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= (1/T) \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \\ \overline{dx(t)/dt} &= (1/T) \int_{t-T}^t [dx(\tau)/d\tau] d\tau = (1/T) [x(t) - x(t-T)] \end{aligned}$$

Obtengamos d/dt de la primera, es decir de $\bar{x}(t)$, aplicando la regla de Leibniz

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = (1/T) \left[x(t) \frac{d(t)}{dt} - x(t-T) \frac{d(t-T)}{dt} \right] = (1/T) [x(t) - x(t-T)]$$

Lo que completa la demostración del apartado.

b) Como sabemos cada una de las ecuaciones de Kirchhoff (LCK y LVK), válidas para todo circuito de p.c., se puede expresar en la forma

$$\sum_{j=1}^b \lambda_j x_j(t) = 0$$

donde $\lambda_j \in \{-1, 0, 1\}$ y $x_j(t)$ son las b corrientes de rama para LCK cuando se aplican a un nodo cualquiera o son las b tensiones de rama cuando se aplican a cualquier bucle del grafo. Pues bien, para todo $T > 0$, aplicada la definición de valor promedio local, se obtiene

$$\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \left[\sum_{j=1}^b \lambda_j x_j(\tau) \right] d\tau = \sum_{j=1}^b \lambda_j \bar{x}_j(t) = 0$$

es decir, *se mantiene la validez de las ecuaciones LK para las variables promedio*, sin distinción del modo de operación (transitorio, *dinámico en EP*, o permanente, *p.s.s. en EP*), siempre que las $x_j(t)$ consideradas sean integrables $\forall t$ en la ventana dada. Es claro que el Teorema de Tellegen y sus consecuencias, p. ej. conservación de potencia, ... también se mantiene para las variables promedio.

c) Tomemos un elemento LTI de dos terminales en el cual la relación constitutiva para las variables (v_j, i_j) sea del tipo $y_j(t) = kx_j(t)$ o del tipo $y_j(t) = kdx_j(t)/dt$. La aplicación de la definición de valor promedio local conduce, respectivamente a

$$\bar{y}_j(t) = k\bar{x}_j(t) \quad \bar{y}_j(t) = \overline{kdx_j(t)/dt} = kd\bar{x}_j(t)/dt$$

Las expresiones utilizadas corresponden a resistores lineales, condensadores e inductores, pero para elementos LTI de orden mayor, y también para los multipuerta se pueden extender tales ecuaciones⁴³ con facilidad.

La consecuencia de lo que antecede es que *para cualquier circuito LTI* las ecuaciones (tableau, MNA, etc.) que podamos plantear sobre las variables promediadas tienen la

⁴³Es claro que la definición de valor promedio es lineal respecto de su integrando (entrada)

misma forma que las variables instantáneas originales, razón por la que podemos operar sobre un posible *circuito equivalente* (idéntico) para las variables promediadas⁴⁴, siempre que el circuito en consideración sea LTI (nótese que en general $\overline{x(t)y(t)} \neq \overline{x(t)}\overline{y(t)}$). En tal circuito sólo alcanzado el p.s.s. –no antes– los condensadores se vuelven circuitos abiertos, $\bar{i}_{Cj}(t) = 0$, y los inductores cortocircuitos, $\bar{v}_{Lj}(t) = 0$.

8. Si se realiza el *muestreo* de una señal continua $x(t)$, mediante una secuencia uniforme $x_m(t)$ de pulsos de la forma $\lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t - t_k)$ con una frecuencia de los mismos $f_m = 1/T_m$: a) ¿Cuál es la condición para que $x(t)$ pueda determinarse a partir de tal muestreo?. b) Con un T_m que tienda a ∞ ¿cual sería el ancho de banda de $x(t)$ límite que podría determinarse?. c) ¿Con cuáles denominaciones y en qué contextos conoces este teorema?.

Sol.: a) El *teorema del muestreo uniforme* establece que si $x(t)$ no contiene componentes de frecuencias superiores a f_M ciclos por segundo, entonces $x(t)$ se puede determinar por completo mediante sus valores discretos separados por intervalos uniformes menores de $1/(2f_M)$ s., es decir con una frecuencia de muestreo $f_m = 2f_M$. Nótese que con frecuencias f_m mayores la recuperación no puede mejorar más.

b) El ancho de banda de $x(t)$ sería $f_M = f_m/2 = 1/(2T_m)$ es decir $f_M \rightarrow 0$.

c) Otras denominaciones: Teorema del muestreo, Teorema de Nyquist, Teorema de Nyquist-Shanon, teorema de muestreo de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon. Es un teorema fundamental de la teoría de la información, de especial interés en las telecomunicaciones. Aparece en tal contexto y en control automático de sistemas (muestreados).

⁴⁴Lógicamente, los valores de los generadores independientes, sea cual sea su forma deben sustituirse por sus promedios, en la T que se tome como referencia. Tal cálculo *ad hoc* debe dejar patente que el generador resultante tiene la característica de tal (p. ej. un generador de tensión promediada lo debe ser para todo posible valor de la corriente promediada que pase por él) o ser sustituible –por aproximación en ocasiones– por elementos de circuito apropiados, por supuesto con todas sus expresiones referidas a los valores promedio.