

## Capítulo 7

# Técnicas analíticas y numéricas para circuitos dinámicos

*Con objeto de explotar analítica y numéricamente todas las posibilidades que ofrecen los circuitos dinámicos en todos sus usos y aplicaciones, sean problemas de análisis sean de modelización o diseño, se reúnen en este capítulo las propiedades (teoremas) de mayor interés práctico para los mismos. Se plantean indicando su ámbito de aplicación, y lo que es a veces más importante, sus límites.*

*Las bases de referencia para este capítulo ya han sido estudiadas en el Capítulo 5 (Estrategias y Técnicas<sup>1</sup> de Trabajo Generales para Circuitos NL, LTV y NL) que aquí se darán en el orden usual (LTI, LTV y NL), gracias a la estructura de aquél.*

*Las técnicas numéricas son imprescindibles en muchas áreas de trabajo en las que las ecuaciones no pueden ser resueltas analíticamente. A tal efecto, se introducen los algoritmos de integración numérica de Euler como punto de partida para seguir con otros tipos más utilizados por spice (TRAP, GEAR, etc.). También se revisan las soluciones adoptadas cuando las ecuaciones diferenciales presentan constantes de tiempo muy dispares (o stiff problems).*

### 7.1. Definición, variables y ecuaciones

**Definición 1** (circuito dinámico): *Un circuito es dinámico si está formado por interconexiones LK-válidas de elementos de diferente orden excitados mediante fuentes independientes de voltaje o corriente.*

---

<sup>1</sup>Entendemos *Estrategia* como la preparación de un *plan de acción en toda su complejidad*, sin bajar al detalle de cada una de las acciones parciales necesarias (pero con el conocimiento de las potencialidades de las mismas). Las *Tácticas* son las numerosas herramientas específicas utilizadas y su uso concreto para llevar a cabo de forma efectiva el plan estratégico. Aquí se usa la palabra “Técnica” como sinónimo de *Táctica*, en su acepción de “*Conjunto de procedimientos y recursos de que se sirve una ciencia o un arte*”, entendidos como herramientas parciales.

Aunque no lo expresa, los elementos pueden ser lineales o no lineales y de una o más puertas.

### 7.1.1. Ecuaciones tableau para circuitos dinámicos

Las variables tableau de un circuito cualquiera son las  $2b + n - 1$ , que representan las fundamentales  $w = (e, v, i)^T$ . En forma compacta puede resumirse como  $\hat{T}(D, t)w(t) = u(t)$ , siendo  $\hat{T}(D, t)$  un operador eventualmente no lineal y  $t$ -dependiente. Sus expresiones adoptan las dos formas posibles

- Tableau NL: Considerando la inclusión de resistores, condensadores o inductores (lineales o no) están representadas por el sistema NL dinámico de  $2b + n - 1$  ecuaciones

$$\begin{aligned} KCL : & \quad Ai(t) = 0 \\ KVL : & \quad v(t) - A^T e(t) = 0 \\ Ecuaciones de rama : & \quad h(v'(t), v(t), i'(t), i(t), t) = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

- Tableau lineal (LTV o LTI): La expresión lineal de las ecuaciones de los elementos (los valores de las excitaciones aparecen en el segundo miembro) permiten escribir

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & 1 & 0 \\ 0 & M_0(t)D + M_1(t) & N_0(t)D + N_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s(t) \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

donde se representa el operador lineal  $\hat{T}(D, t)$  por la matriz  $t$ -dependiente de los coeficientes. En el caso LTI las matrices  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $N_0$  y  $N_1$  no poseen dependencia temporal, es decir la ecuación matricial correspondiente se escribe  $\hat{T}(D)w(t) = u(t)$ .

### 7.1.2. Ecuaciones MNA para circuitos dinámicos

Las variables MNA de un circuito cualquiera son las  $a + n - 1$ , que representan las  $n - 1$  variables  $e$  junto con las  $a$  variables  $i_a$  compuestas de las  $a$  corrientes de rama de los  $a$  posibles elementos no  $v$ -controlados. Sus expresiones adoptan la forma

- MNA NL: Respecto de las ecuaciones MNA de los circuitos resistivos, se opera tratando a los inductores como elementos no  $v$ -controlados, asegurando así la obtención de *ecuaciones diferenciales* (no integro-diferenciales). Para el número de variables indicado<sup>2</sup> se obtiene el sistema bien definido

---

<sup>2</sup>Nótese que  $a$  incluye los condensadores controlados por carga y los inductores controlados por flujo, apareciendo en cada uno de estos casos una variable adicional más y por ende una ecuación más que involucra a tal variable. P. ej. si  $v_5 = \hat{v}_5(q_5)$ , la corriente  $i_5$  es una de las  $a$  variables, lo que obliga, como siempre en MNA, a utilizar  $i_5 = dq_5/dt \cup v_5 = \hat{v}_5(q_5)$ , de hecho son dos ecuaciones debido al carácter no explícito de  $q_5$ .

del mismo número de ecuaciones<sup>3</sup>. En el caso más usual es

$$\begin{aligned} KCL \cup [(Ecs - ramas\ v\_contr.) \cup KVL] : & \quad n - 1\ ecs.\ en\ (e, i_a) \\ [(Ecs - ramas\ no\ v\_contr.) \cup KVL] : & \quad a\ ecs.\ en\ (e, i_a) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema de  $a + n - 1$  ecuaciones deducidas de las tableau precedentes por manipulaciones algebraicamente válidas (contienen la misma información, sólo se han eliminado algunas variables, recuperables si no olvidamos las ecuaciones utilizadas para ello).

Recordemos: las ecuaciones MNA para un circuito cualquiera se pueden escribir por simple inspección (análisis a mano), también son útiles computacionalmente (Spice utiliza MNA).

- MNA lineal (LTV o LTI): En este caso la versión MNA, con la consiguiente reducción del número de variables, también ve reducida la matriz operador, que designaremos<sup>4</sup> por

$$\hat{P}(D, t) (e^T(t), i_a^T(t))^T = u_{MNA}(t) \quad (7.4)$$

donde el vector  $u_{MNA}$  representa la correspondiente modificación MNA de la  $u(t)$  anterior.

Como en todos los casos dinámicos, deben especificarse las c.i. del problema.

### 7.1.3. Ecuaciones en variables de estado

Una forma de obtención, para un circuito dinámico consiste en partir de la ecuación diferencial de orden  $n$  para una variable del circuito y convertir esta ecuación en un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden. Este esquema nos recuerda que no es única la representación del vector de estado de un sistema. En general se pueden definir infinitas ecuaciones de estado equivalentes, y a veces la formulación Lagrangiana o Hamiltoniana puede ser más apropiada.

Otra forma posible consiste en partir de las ecuaciones MNA globales (como hace *spice*). Veamos no obstante el método más común en Teoría de Circuitos, siempre que sea posible.

**Ejemplo 1:** Sea un circuito que sólo tenga un condensador y un inductor en general no lineales, caracterizados por sus relaciones constitutivas,  $q_{C_1} = \hat{q}_{C_1}(v_{C_1})$  y  $\phi_{L_2} = \hat{\phi}_{L_2}(i_{L_2})$ . Supongamos que están conectados a un resistor no

<sup>3</sup>En el caso más general, las ecuaciones obtenidas, añadiendo las antes citadas, se pueden englobar en la forma  $F(x'(t), x(t), t) = 0$ , siendo  $x(t) = [e^T(t), i_a^T(t)]^T$ .

<sup>4</sup>Para el caso LTI su versión  $\mathcal{L}$ -transformada es

$$P(s) \begin{pmatrix} E(s) \\ I_a(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_s(s) \end{pmatrix}$$

donde  $U_s(s)$  incorpora las c.i.

lineal bipuerta, de acuerdo con el esquema circuital definido por la descripción textual

$$\begin{array}{llll} c1 & 1 & 1' & q_{C_1} = \widehat{q}_{C_1}(v_{C_1}) \\ l2 & 2' & 2 & \phi_{L_2} = \widehat{\phi}_{L_2}(i_{L_2}) \\ r3 & 1 & 1' & 2 & 2' & i_1 = h_1(v_1, i_2) & v_2 = h_2(v_1, i_2) \end{array}$$

en la cual suponemos existen  $h_1$  y  $h_2 \forall (v_1, i_2)$ . Se pide: a) Plantear las ecuaciones de estado con  $x_1 \equiv v_{C_1}$  y  $x_2 \equiv i_{L_2}$  con las c.i. correspondientes. b) ¿Y si  $h_1$  y  $h_2 \forall (v_1, i_2)$  no existen en forma explícita?. c) Extender las conclusiones a todos los casos posibles desde  $n = 1$  hasta  $n = 3$ ?

## Observaciones

1. Si la red resistiva es no autónoma, p. ej. contiene fuentes independientes de tensión o corriente, variables con  $t$ , o contiene elementos  $t$ -dependientes, entonces las funciones híbridas del sistema anterior serían de la forma  $h_1(v_1, i_2, t)$  y  $h_2(v_1, i_2, t)$ .
2. La existencia de las ecuaciones, con las variables de estado citadas, está ligada a la existencia de la formulación híbrida utilizada y a la no singularidad de  $C_1(v_1)$  y de  $L_2(i_2)$ .
3. Para  $n_C$  condensadores y  $n_L$  inductores se obtendría un vector de estado, eventualmente  $x = (q^T, \phi^T)^T$ , de dimensión  $n_C + n_L$ .
4. Obsérvese que si el estado del sistema está representado por las tensiones de los condensadores y las corrientes de los inductores (o por las  $q_C$  y la  $\phi_L$ ), a través de estas variables se puede obtener la energía total del sistema sin más que sumar ambas.

En suma se puede obtener así una formulación NL general de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \text{ con } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \text{ y } x(0) = x_0$$

que para el caso de una red NL autónoma queda en la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \text{ con } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \text{ y } x(0) = x_0$$

en las que supondremos, salvo que se indique otra cosa, que todas las componentes  $f_j(x, t)$  son continuas en sus argumentos en la región de trabajo considerada.

## 7.2. Propiedades generales de los circuitos dinámicos lineales

### 7.2.1. Propiedades generales de los circuitos dinámicos LTI

Sea cual sea la procedencia, un análisis de pequeña señal de un amplificador o el análisis de gran señal de un circuito lineal, si el circuito es además  $t$ -invariante, en suma LTI, la Transformada de Laplace es la herramienta natural

de trabajo (la herramienta matemática más importante de toda la Ingeniería Eléctrica).

Mediante esta transformada puede analizarse tanto el régimen transitorio como el permanente de cualquier circuito LTI, sea cual sea el número y tipos de generadores de excitación, así como cualesquiera que sean las condiciones iniciales de los elementos almacenadores de energía, sea estable o no el circuito<sup>5</sup>.

En estas condiciones la Transformada de Laplace aplicada a la formulación tableau LTI hace que se verifique

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & 1 & 0 \\ 0 & M_0s + M_1 & N_0s + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_s(s) + u^i(0-) \end{bmatrix}$$

donde  $u^i(0-) = M_0v_c(0-) + N_0i_l(0-)$  engloba las condiciones iniciales de los elementos reactivos. La ecuación anterior, es la más idónea para expresar propiedades teoremas de circuitos LTI, puede resumirse en la forma

$$T(s)w(s) = U(s)$$

Para el caso MNA es conveniente adquirir la soltura directa que se pide en los siguientes ejercicios.

**Ejemplo 2:** Para un condensador y un inductor LTI con c.i. no nulas, se pide: a) Obtener la Transformada de Laplace. b) Representar el circuito equivalente de ambos en el dominio transformado. c) Seleccionar otros dos elementos no resistivos repetir el planteamiento anterior.

**Ejemplo 3:** Sea el circuito descrito por

*circuito cap7-Ej-2*

<i>i1</i>	3 1	$i_1 = I_m \cos \omega t$
<i>r2</i>	1 3	$i_2 = G_2 v_2$
<i>l1</i>	1 3	$v_3 = L_3 di_3/dt$
<i>e1</i>	2 3	$v_4 = \alpha v_2 \{VCVS\}$
<i>c1</i>	2 3	$i_5 = C_5 dv_5/dt$
<i>r2</i>	2 3	$i_6 = G_6 dv_6/dt$
<i>end</i>		

Con objeto de poder plantear por simple inspección las ecuaciones MNA en forma matricial en  $s$ , se pide: a) Obtener para  $C_5$ , con  $v_5(0-) = E$ , la ecuación en  $s$  y representar la ecuación transformada por un circuito (en  $s$ ); ¿Porqué es un circuito paralelo si en  $t$  es un circuito serie?. b) Idem para  $L_3$  con  $i_3(0-) = I$ . c) ¿Cuáles son las variables MNA en  $s$ ? y escribir directamente las ecuaciones MNA.

La versión MNA de las ecuaciones LTI en  $s$  se suele compactar en forma compacta como sigue

---

<sup>5</sup>El análisis fasorial sólo era válido para *régimen permanente sinusoidal* con una única frecuencia (volveremos sobre ello)

$$P(s) \begin{pmatrix} E(s) \\ I_a(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_s(s) + u_{MNA}^i(0-) \end{pmatrix}$$

### Observaciones

1. Cualquiera de las variables MNA (y por consiguiente tableau), es un cociente de polinomios en  $s$  con coeficientes constantes, fácilmente obtenibles por la regla de Cramer cuyo denominador es  $\det P(s)$ .
2. Es fácil de demostrar que  $\det T(s) = k \det P(s)$ , siendo  $k$  una constante real no nula.

Hecho esto, a continuación se plantean las propiedades de mayor interés a partir de la formulación tableau en  $s$  para el caso LTI en consideración.

**Teorema 1** (Condición de existencia de solución única): La condición de existencia de solución única es que  $\det T(s) = k \det P(s) \neq 0$ , al margen de los ceros que pueda tener tal polinomio.

**Ejemplo 4:** Sobre el circuito dinámico LTI del ejercicio anterior se pide:  
a) ¿Para qué valores de  $L$  o de  $G$  posee solución única?. b) ¿Se verifica  $T(s) = P(s)$ ?

**Teorema 2** (Superposición global): La respuesta de un circuito LTI que verifique la condición de solución única es la suma de las repuesta  $z_i$  con entrada de valor cero (debida sólo a las c.i.) más la respuesta  $z_s$  con c.i. todas nulas (debida sólo a las fuentes de excitación independientes, con  $y_j(t) = y_{z_i,j}(t) + y_{z_s,j}(t)$ ).

En efecto, de la expresión tableau en  $s$  resulta<sup>6</sup> para todas las  $w(t)$  variables

$$W(s) = T^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u^i(0-) \end{pmatrix} + T^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_s(s) \end{pmatrix}$$

El primer sumando es la *respuesta  $z_i$*  mientras que la  $z_s$  es el segundo.

---

<sup>6</sup>Nótese que la linealidad (LTI) lleva implícita la validez del teorema de superposición como una propiedad definitoria de la misma. No obstante conviene visualizarla de forma más amplia, sin necesidad de plantear dos teoremas de superposición parciales:

1. Las c.i. (el estado) pueden ser vistas como entradas: en efecto, un condensador lineal con carga, p. ej.  $v_j(0) = E$  es *indistinguible* de uno descargado de la misma  $C$  con una fuente de tensión constante en serie de valor  $E$  (resp., dualmente para  $L$ ). En suma, podemos visualizar un *teorema de superposición a nivel de detalle* diciendo que la respuesta total de cualquier circuito LTI (en  $t$  o en  $s$ ) es la superposición de excitaciones independientes y c.i., generadores de estado.
2. El teorema de *superposición a nivel de detalle* nos permite agrupar los sumandos de diferentes formas además de las  $z_i$  y  $z_s$ . Así por ejemplo todas las respuestas (sumandos) que no tiendan a anularse en forma exponencial (y no tiendan a infinito) se pueden agrupar con el nombre de *respuesta en regimen permanente*, mientras que aquellas que tiendan a anularse constituirían la *respuesta transitoria*, etc.

■ **Respuesta entrada cero y frecuencias naturales**

Ahora pasamos a considerar sólomente la *respuesta entrada-cero*. Se trata de resolver

$$W(s) = T^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u^i(0-) \end{pmatrix}$$

lo cual nos aporta un cociente de polinomios en  $s$ . Cada posible respuesta posee el mismo denominador (factorizable conocidos sus polos) con un numerador dependiente de las c.i. La transformada inversa de Laplace nos aportaría los denominados *modos* asociados a la variable considerada, que caracterizan las frecuencias naturales. Podemos formalizar ésto como sigue.

**Definición 2** (Frecuencias naturales de un circuito LTI): Se definen las frecuencias naturales de un circuito LTI como las raíces de la ecuación característica,  $\chi(s) \equiv \det T(s) = k \det P(s) = 0$ , correspondientes a la respuesta entrada-cero.

Es decir, utilizando MNA son obtenibles de  $P(\lambda) = 0$ , representan la *evolución natural* del sistema a partir de un estado inicial  $u_i(0-)$  cualquiera no nulo. Designando por  $\lambda$  una de ellas y dado  $u_i(0-)$ , es decir  $w_0 = (e_0, v_0, i_0)^T$ , se verifica para la misma

$$w(t) = w_0 e^{\lambda t} \quad (7.5)$$

y la componente de  $w(t)$  considerada, p. ej.  $e_5(t)$ , se denomina *modo* asociado con  $\lambda$ . Como estamos hablando de la transformada inversa de sumas parciales, la respuesta natural completa para la variable considerada será la suma de todas las contribuciones correspondientes a todas las frecuencias naturales.

**Ejemplo 5:** Para el mismo circuito del ejercicio anterior: a) Obtener la respuesta,  $E_{2,zi}(s)$ , debida sólo a las c.i. y también  $e_{2,zi}(t)$  b) ¿Cómo se llama?, ¿Qué representa?. c) En tales condiciones ¿Como podría observarse experimentalmente la estabilidad?.

De acuerdo con los dos párrafos precedentes, sean las frecuencias naturales  $\lambda$  reales de tipo simple, idem de orden  $m$ , o complejos conjugados, se pueden enunciar la importante propiedad que sigue.

**Teorema 3** (Estabilidad exponencial): Si todas las frecuencias naturales de un circuito LTI tienen parte real negativa ( $<0$ ), entonces para todas las condiciones iniciales la respuesta entrada-cero de todas las variables del circuito tiende a cero exponencialmente,  $w(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$  y el circuito se dice que es exponencialmente estable.

El teorema no necesita demostración ya que ésta se infiere de las afirmaciones precedentes. Su formulación como tal pretende remarcar su gran importancia. Otros aspectos pueden verse en forma de ejercicios<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>No es difícil comprobar que eventualmente para determinada componente de  $w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)]$  no aparecen todos los modos porque es nula una condición inicial determinada, por lo que tal modo no es *excitable* para esa variable, aunque puede serlo para otra, desde la que se diría que dicho modo es *observable*.

■ **Funciones de red y respuesta a la función impulso**

Aquí consideraremos solamente la respuesta *estado-cero*. Se trata de resolver

$$W(s) = T^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_s(s) \end{pmatrix}$$

lo cual también nos aporta un cociente de polinomios en  $s$ , aunque ahora su numerador estará particulmente influido por los tipos concretos de excitaciones utilizadas. El modo usual de trabajo es el mismo que antes, pero vayamos con más calma. Después de aplicar la regla de Cramer tendremos para cualquier variable considerada, pensemos en una sola salida genérica  $Y(s)$ , componente escalar<sup>8</sup>, del vector  $W(s)$ , un sumatorio de contribuciones de cada entrada,  $\alpha$  fuentes independientes de tensión  $V_{sk}(s)$  y  $\beta$  fuentes independientes de corriente  $I_{sl}(s)$ , componentes de  $U_s(s)$ , en la forma

$$Y(s) = \sum_{k=1}^{\alpha} H_{vk}(s) V_{sk}(s) + \sum_{l=1}^{\beta} K_{il} I_{sl}(s)$$

**Ejemplo 6:** Para el mismo circuito del ejercicio anterior: a) Obtener la respuesta,  $E_{2,zs}(s)$  para  $i_{1s} = \delta(t)$  y también  $e_{2,zs}(t)$  b) ¿Qué representa?. c) En tales condiciones obtener el equivalente Norton  $zs$  en  $s$  y en  $t$  a partir de su definición.

Esta versión del teorema de superposición es lo que se ha llamado en muchos tratados de teoría de circuitos lineales **Teorema de superposición<sup>9</sup> (II)**. La respuesta temporal estado-cero es fácilmente obtenible de aquí, que adoptará la forma general

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\alpha} y_{vk}(t) + \sum_{l=1}^{\beta} y_{il}(t)$$

Como sabemos los coeficientes del desarrollo de  $Y(s)$  son el punto de partida para el análisis de sistemas LTI (funciones de transferencia, diagramas de Bode, Nyquist, etc.) conceptos que se definen para los factores de esta ecuación asociados a la entrada considerada o a todas ellas.

En todos ellos, prescindiendo de cancelaciones, el denominador es el mismo. No obstante, prestemos antes de nada atención a la terminología.

**Definición 3** (Función de red de un circuito LTI): *Se definen la función de red de un circuito LTI asociada a la entrada  $X(s)$ , sea  $V_{sk}(s)$  o  $I_{sl}(s)$ ,*

<sup>8</sup>No confundir con admitancia en  $s$  que definiremos más adelante.

<sup>9</sup>Una anotación al margen obligada, relativa a la superposición en sistemas lineales, es que nunca se puede aplicar el teorema de superposición considerando entradas y estados dos veces. Por ejemplo, para un sistema de dos entradas, si considerásemos la superposición de una entrada y el estado más otra entrada y el mismo estado, estaríamos considerando el estado dos veces, violando el teorema de superposición (véase el detallado, que hemos descrito en otro pie de página).



y una salida  $Y(s)$ , sea una  $E_j(s)$ , una  $V_j(s)$  o una  $I_j(s)$ , como el cociente  $H(s) = Y(s)/X(s)$ , correspondientes a la respuesta estado-cero.

Tal  $H(s)$  puede expresarse como

$$H(s) = \frac{\text{cofactor de } T(s)}{\det[T(s)]} \quad (7.6)$$

donde el cofactor está asociado a las fila y columna de  $T(s)$  correspondientes, que depende únicamente de los parámetros del circuito (no de las entradas)<sup>10</sup>. También resulta obvio que los polos no son otra cosa que las frecuencias naturales del circuito.

Finalmente, de la teoría de los sistema LTI en el dominio del tiempo sabemos que su **función ponderatriz** es la *respuesta estado-cero a la función impulso*. Para una entrada,  $x(t)$  y una salida  $y(t)$  dadas es

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (7.7)$$

Siendo además  $\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$  y  $H(s)$  la función de red correspondiente. Este hecho nos permite utilizar

$$h(t) = L^{-1}[H(s)]$$

para obtener la función ponderatriz, que no es otra cosa que la transformada inversa de la función de red, sin olvidar el caracter MISO, o incluso MIMO, del problema.

#### ■ Particularización de la respuesta entrada-cero para regimen permanente sinusoidal

Ahora es muy fácil ver como el análisis en términos de la transformada de Laplace se relaciona con el análisis de Fourier. Dado que las conclusiones como la demostración son claras, nos basta con enunciarlo en forma de teorema.

**Teorema 4** (análisis sinusoidal en regimen permanente): *Para todo circuito LTI que verifique las condiciones siguientes: 1. Verifique la condición de solución única, 2. Sea exponencialmente estable, 3. Sus excitaciones sinusoidales (sean de voltaje o de corriente) sean todas ellas de la misma  $\omega$  (independientemente de su fase) 3. Sus posibles excitaciones adicionales son o bien constantes o decaen a valores constantes exponencialmente, se verifica:*

1. *Al tender  $t \rightarrow \infty$  todas sus variables  $w(t)$  tienden a soluciones sinusoidales caracterizadas por tener todas ellas (independientemente de su amplitud y fase) la misma pulsación  $\omega$ .*

---

<sup>10</sup>Como en el caso de las frecuencias naturales (al fin y al cabo las condiciones iniciales pueden representarse mediante generadores independientes), también ahora podemos tener variables excitadas o no por determinados modos o modos no observables.

2. *El estado estacionario sinusoidal (s.s.s.) definido por el apartado anterior es obtenible mediante el uso de  $s = j\omega$  en su función de transferencia, lo cual coincide con las expresiones basadas en el uso de fasores.*

Este teorema es la base del análisis en régimen permanente sinusoidal. Con independencia de que su demostración no ofrece particulares problemas, conviene hacer mención de algunas observaciones de interés.

**Observaciones:**

1. El uso de fasores sólo es válido en LTI y sólo si se verifican las condiciones del teorema.
2. Si no se verificaran por que hay fuentes de más de una  $\omega$ , entonces el T de superposición todavía sigue siendo válido (en el sentido de que podemos aplicar los fasores por separado).
3. Nótese que se permiten estado no cero y entradas (deben tratarse por separado para no sumar dos veces el efecto de una condición inicial dada (recordar la superposición en detalle)).
4. Para cualquier  $H(s)$  que se considere, será  $|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$  y  $\arg H(j\omega) = -\arg H(-j\omega)$  es decir el módulo es una función par y el argumento impar, de la frecuencia.

### 7.2.2. Propiedades generales de los circuitos dinámicos LTV

**Teorema 5** (Superposición global para circuitos dinámicos LTV): La respuesta completa de cualquier circuito dinámico LTV bien propuesto, con excitaciones externas  $\{v_{s,1}(t), \dots, i_{s,1}(t), \dots\}$  y c.i.  $\{E_{0,1}, \dots, I_{0,1}, \dots\}$  se puede expresar como la suma de la respuesta  $y_{zi}(t)$  correspondientes a todas las c.i. con entradas nulas más la respuesta  $y_{zs}(t)$  correspondientes a todas las entradas externas con las c.i. nulas. Es decir

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

Este teorema se demuestra mediante técnicas circuitales en el Capítulo 5 y como parte del mismo da a continuación la versión analítica de las respuestas  $z_s$  y  $z_i$ , también demostrada allí.

**Ejemplo 7:** Para un circuito LTV genérico se pide: a) Demostrar el Teorema de superposición z.s. (c.i. nulas). b) A partir del resultado anterior, ¿Cómo se podría demostrar el Teorema de superposición global, es decir  $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ ? c) ¿Y los otros dos? d) ¿Con  $\mathcal{L}$  sería más sencillo?

**Teorema 6** (Superposición  $z_s$ , cero-estado): Para todo circuito LTV,  $\hat{T}(t)y(t) = f(t)$  con unas c.i. dadas, se puede obtener la solución particular correspondiente a c.i. nulas,  $y_p(t) = y_{zs}$  en el rango de interés  $t \in [0, t]$ , mediante la integral

de convolución LTV

$$y_p(t) = \int_0^t h(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

con

$$h(t, \tau) = \sum_{j=1}^n c_j(\tau) y_{h_j}(t)$$

donde los coeficientes  $c_j(\tau)$  resultan de hacer  $h^{(i)}(\tau, \tau) \equiv \partial^i h(t, \tau) / \partial t^i \big|_{t=\tau}$  con

$$h(\tau, \tau) = 0 \quad h^{(1)}(\tau, \tau) = 0 \quad \dots \quad h^{(n-2)}(\tau, \tau) = 0 \quad h^{(n-1)}(\tau, \tau) = 1$$

Con el modelo circuital dado para el Teorema de superposición global para LTV, visto en el Capítulo 5, basta un corolario para la obtención analítica de la respuesta cero-entrada.

**Corolario** (Superposición zi, cero-entrada): Para todo circuito LTV,  $\hat{T}(t)y(t) = f(t)$  con unas c.i. dadas, la respuesta cero entrada se deduce de la aplicación del teorema de superposición global con las excitaciones externas  $\{v_{s,1}(t), \dots, i_{s,1}(t), \dots\}$  todas nulas, considerando únicamente los generadores  $\{E_{0,1}, \dots, I_{0,1}, \dots\}$ .

## Observaciones

1. No obstante *no es válido utilizar* para un circuito dinámico LTV técnicas que específicamente requieren el carácter LTI (Fourier o Laplace, fasores, variables promediadas, equivalentes Thevenin, Norton o sus generalizaciones, etc.).
2. Los circuitos LTV no pueden caracterizarse mediante a la respuesta a la función impulso (nótese que requerirían una secuencia temporal infinita de las mismas para todos los  $t$  de interés).

## 7.3. Propiedades generales de los circuitos dinámicos no lineales (NL)

Proveniente de los Capítulos 1 y 4, se pantea en primer lugar el Teorema de Tellegen. El Teorema de sustitución parte de los Capítulos 5 y 6, donde se enuncia con énfasis para los resistivos NL. Finalmente el de estabilidad enuncia el Método directo de Lyapunov, no deberíamos olvidar al respecto el Método de linealización visto en el mismo capítulo.

### 7.3.1. Teorema de Tellegen para circuitos dinámicos NL

**Teorema 7 (Tellegen):** Sea  $G$  el digrafo de un circuito arbitrario. Si  $i \in K_i$  y  $v \in K_v$  entonces

$$v \cdot i \equiv v^T i = \sum_{j=1}^b v_j i_j = 0 \quad (7.8)$$

La demostración general, así como la de los corolarios que siguen ya han sido vistas.

**Corolario I (conservación de la potencia instantánea):** *Para todo circuito de parámetros concentrados (resp., para toda parte), para todo  $t$ , la suma de las potencias instantáneas,  $p_k(t)$ , que el resto del circuito (resp., de la parte) entrega a cada uno de sus elementos es cero, es decir*

$$\sum_{k=1}^b p_k(t) = 0$$

**Corolario II (conservación de la potencia media):** *Para todo circuito de parámetros concentrados (resp., para toda parte), para todo intervalo de medida  $T$ , la suma de las potencias medias,  $\langle p_k(t) \rangle_{T_M}$ , que el resto del circuito (resp., de la parte) entrega a cada uno de sus elementos es cero. Es decir*

$$\sum_{k=1}^b \langle p_k(t) \rangle_{T_M} = 0 \quad (7.9)$$

En la aplicación a una parte,  $b$  se refiere al número de ramas de la misma.

### 7.3.2. Teorema de sustitución para circuitos dinámicos NL

**Teorema 8** (Teorema de sustitución): Sea un circuito  $N$  dinámico y NL, formado por el acoplamiento a través de una única puerta, de dos elementos compuestos  $N_1$  y  $N_2$ . Si para unas c.i. dadas  $N$  posee solución única y si se conoce el voltaje de dicha puerta común,  $v = \hat{v}(t)$  (resp., la corriente que circula entre ambos,  $i = \hat{i}(t)$ ), entonces se puede sustituir todo el elemento  $N_1$  por un generador de voltaje (resp., de corriente) con el valor citado sin que se vean afectadas las corrientes y tensiones en el interior de  $N_2$ , supuesta también para este último circuito las mismas c.i. y solución única.

Dem.: Se puede hacer una descripción a través de un experimento imaginario. En efecto, para pasar del *circuit*\_ $N_i$  inicial al *circuit*\_ $N_f$  final, citados en el teorema, siguientes:

<i>circuit</i> _ $N_i$				<i>circuit</i> _ $N_f$			
$x1$	1	2	$h_{N_1}(v_1, i_1) = 0$	$x1$	1	2	$v_1 = \hat{v}(t) \forall i_1$
$x2$	1	2	$h_{N_2}(v_2, i_2, t) = 0$	$v1$	1	2	$h_{N_2}(v_1, i_1, t) = 0$
<i>end</i>				<i>end</i>			

se puede actuar como sigue<sup>11</sup>: En primer lugar se abre el nodo 1 y se introducen dos fuentes de tensión en oposición de tal modo que el conjunto de ambas se

<sup>11</sup>Esta descripción es una adaptación del llamado *Teorema de compensación* enunciado en el texto de Zebete G., Ionkin P., Netushil A., Strakhov S. "Analysis of Electric Circuits", ISBN 5-88417-060-2, Moscu, 1973. Véase también en la Sección 5.1 la génesis de esta propiedad.

comporte como  $\hat{v}(t) - \hat{v}(t) = 0$  y que la tensión del punto medio (el nuevo nodo 3) es exactamente la misma que la de referencia (la del nodo 2).

Así las cosas no habremos modificado corrientes y tensiones tanto de  $N_1$  como de  $N_2$ . Si ahora se establece una conexión entre 3 y 2, por la misma no pasaría corriente alguna y se podría convertir en la única conexión ( $nodo\_3 \equiv nodo\_2$ ) entre los dos circuitos resultantes,  $N_1$  excitado por  $\hat{v}(t)$  y  $N_2$  excitado por  $\hat{v}(t)$ . Una gaussiana que sólo corte a tal rama ( $nodo\_3$  a  $nodo\_2$ ) no portaría corriente y ésta podría eliminarse, dejando al subcircuito de interés invariante en su funcionamiento, si *las c.i. son las mismas* y si posee *solución única*.

**Ejemplo 8:** Sea un circuito dinámico NL formado por dos elementos compuestos acoplados por una única puerta: a) Demostrar gráficamente el Teorema de sustitución, supuesto que la corriente de la misma es única y está dada por  $i = \hat{i}(t)$ . b) Indicar en qué casos es aplicable.

### Observaciones

1. Se puede extender esta descripción al caso en que  $N_1$  y  $N_2$  estuviesen interconectados por  $m$  puertas, siempre que se tomara un nodo común para todas ellas.
2. Se puede hacer un experimento dual introduciendo dos excitaciones  $i = \hat{i}(t)$  en antiparalelo. También se puede extender la dualidad al caso multipuerta.
3. Es posible hacer una demostración analítica a partir de las ecuaciones tableau de ambas situaciones inicial y final descritas en el teorema.
4. El teorema de sustitución es de especial importancia en el estudio de circuitos no lineales y dinámicos.

**Ejemplo 9:** Sea  $N$  el circuito caótico de Chua y  $N_1$  y  $N_2$  un desdoblamiento del mismo. Se pide: a) Dibujar varias opciones de desdoblamiento. b) ¿Cuáles son las condiciones que el teorema exige al respecto?. ¿Es necesaria alguna adicional?.

### 7.3.3. Teoremas de estabilidad para circuitos dinámicos NL

Se resumen aquí las herramientas fundamentales para este punto. Sobre ellas se ha escrito un cuerpo de doctrina de grandes aplicaciones en el contexto de lo que se dado en llamar Teoría de sistemas dinámicos, con muy amplias Aplicaciones.

**Teorema 9** (Criterio de estabilidad local o Método de linealización de Lyapunov): Sea  $\dot{x} = F(x)$  de orden  $n$ , con  $F$  continuamente diferenciable en

un entorno de un punto de equilibrio  $x_e$ . El comportamiento cualitativo local en torno al mismo está dado por<sup>12</sup>

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$$

con  $A = \partial F(x)/\partial x|_{x_e}$ , *matriz jacobiano* de  $F(x)$ , de donde el método indirecto de Lyapunov establece para el origen (aquí es  $x_e$ ) lo que sigue:

1. El punto  $x_e$  es *asintóticamente estable* si  $\operatorname{Re} [\lambda_i(A)] < 0$
2. El punto  $x_e$  es *inestable* si  $\operatorname{Re} [\lambda_i(A)] > 0$  para algún  $i$

### Observaciones

1. El caso en que la solución no converja ni a  $x_e$  ni a una trayectoria próxima,  $x_s(t)$ , para  $t \rightarrow \infty$ , ni diverja, se llama *neutramente estable en sentido Lyapunov* y necesita una mayor precisión.
2. Para mayor generalidad se dispone del llamado método directo que supone un avance de gran valor en el conocimiento de la estabilidad en el caso NL.

**Teorema 10** (Método directo de Lyapunov): Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = F(x)$  y sea  $V(x)$  un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen, pues bien:

- Si  $V(x)$  es *definida positiva* y  $\dot{V}(x)$  es *semidefinida negativa* entonces el origen es un punto de equilibrio *estable*. De ser  $\dot{V}(x)$  *definida negativa* tal punto sería *asintóticamente estable*.
- Las funciones  $V(x)$  que cumplan las condiciones anteriores se denominan *funciones de Lyapunov* del sistema bajo estudio.

**Corolario** (Derivado del Principio de Invariancia de LaSalle): Si  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $D$  y el conjunto de puntos en los que se anula es  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ , para el punto de equilibrio en consideración se puede afirmar que si ninguna trayectoria que entra en  $S$  permanece allí indefinidamente, entonces el origen es un punto de equilibrio *asintóticamente estable*.

---

<sup>12</sup>Con  $x = x_e + \tilde{x}$  se puede escribir, como sabemos,

$$\dot{x} = \dot{x}_e + \dot{\tilde{x}} = F(x_e) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} (x - x_e) + t.a.o.$$

despreciando los t.a.o. y restando de esa expresión la  $\dot{x}_e = F(x_e)$ .

**Observaciones**

1. Si  $\dot{V}(x) < 0$ , *definida negativa*, el estado cruza la curva de nivel hacia adentro (y no vuelve a salir). Si  $\dot{V}(x) \leq 0$ , *semidefinida negativa*, tal cruce puede no producirse, pero aun así se puede concluir que el origen es estable siempre que  $x_0$  esté en un entorno, de radio  $\varepsilon$  conocido del mismo.
2. Dos dificultades: La primera, no existe método sistemático para obtener  $V(x)$  (se propone una candidata y se debe demostrar que cumple los requisitos del teorema). La segunda, el Teorema solo aporta condiciones suficientes (si no se encuentra una candidata válida no significa que el origen no cumpla las cualidades buscadas).
3. Al respecto del corolario debe decirse que si se encontrara una  $V(x)$  semidefinida positiva (para estudiar la estabilidad del origen) se debe demostrar que cuando las trayectorias entren en tal  $S$  no permanecerán allí para siempre.

**7.3.4. Observaciones acerca de la validez descendente**

Recuérdese la validez descendente de los teoremas, es decir los que aquí se presentan, dinámicos NL, serán válidos también para circuitos dinámicos LTV y dinámicos LTI, pero también para los resistivos NL o lineales, adaptados a las simplificaciones impuestas por estos casos<sup>13</sup>.

1. Dada la naturaleza de este Capítulo, en esta sección se ha hecho referencia muy específica a los dinámicos NL. Pequeños cambios en el enunciado se han hecho únicamente para enfatizar algún aspecto, sin que modifiquen ni su validez ni su contenido.
2. La naturaleza de los circuitos dinámicos NL impide como es natural utilizar conclusiones "descendentes" es decir válidas sólo con ligaduras adicionales. P. ej. *no es válido utilizar* para un circuito dinámico NL técnicas que específicamente requieren la linealidad, o el carácter resistivo u otras (Transformadas de Fourier o Laplace, fasores, variables promediadas, equivalentes Thevenin, Norton o sus generalizaciones, etc.).

**7.4. Métodos numéricos de análisis de circuitos dinámicos**

Las ecuaciones de estado de un circuito, en general no lineal, están orientadas precisamente hacia la *integración numérica*, y adoptan la forma genérica que sigue

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad x(0) = x_0$$

---

<sup>13</sup>Como es natural, en la particularización para ellos de los supuestos que plantea el teorema de partida pueden carecer del más mínimo interés.

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $x_0$  es conocido<sup>14</sup>.

La solución es necesaria en el análisis del comportamiento transitorio de circuitos con *grandes señales*. Para obtenerla se divide el *intervalo de integración*  $[0, T]$  en un conjunto finito de  $M$  *intervalos temporales*, deseando únicamente la solución en los  $M + 1$  extremos dados por  $\{0, t_1, t_2, \dots, T\}$ .

En el caso general es  $h_k = t_k - t_{k-1}$  desde  $t_0 = 0$  hasta  $t_M = T$ . Pero, salvo que se diga otra cosa, supondremos por ahora que  $\forall k$  es  $h_k = h$  constante y  $hM = T$ .

### 7.4.1. Métodos de integración de Euler

La base de dos *algoritmos de integración de Euler* parte de la aproximación lineal genérica

$$x_{k+1} = x_k + h\dot{x}$$

estando  $\dot{x} \equiv dx/dt$  a expensas de la especificación más concreta que sigue

#### ■ Método explícito de Euler (*forward*)

Adopta para  $\dot{x}$  su valor real (ver la ecuación de estado) *al comienzo del intervalo*  $t_k$ , es decir

$$\dot{x} = f(x_k, t_k)$$

de donde se obtiene la *expresión iterativa explícita* que permite obtener, a partir del  $x_0$  dado, la secuencia  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_M$  que aporta la solución aproximada buscada

$$x_{k+1} = x_k + h_k f(x_k, t_k)$$

#### Observaciones

1. Se realiza con un único bucle de cálculo: **Para**  $k = 0$  **hasta**  $k = M$ ; **Obtener**  $x_{k+1}$ ; **Fin**.
2. Para  $h \rightarrow 0$  el error de la secuencia obtenida es  $\epsilon \rightarrow 0$ .
3. Si  $h$  crece entonces tiende a ser inestable<sup>15</sup>.

#### ■ Método implícito de Euler (*backward*)

Adopta para  $\dot{x}$  su valor real (ver la ecuación de estado) *al final del mismo intervalo*  $t_k$ , es decir

$$\dot{x} = f(x_{k+1}, t_{k+1})$$

de donde se obtiene la *expresión iterativa implícita* para este caso

$$x_{k+1} = x_k + h_k f(x_{k+1}, t_{k+1})$$

---

<sup>14</sup>O bien está especificado o viene determinado por un análisis previo. Lo usual es que las excitaciones se inician en  $t = 0$  estando previamente el circuito en un punto de operación conocido.

<sup>15</sup>Compruébese con la función de prueba  $\dot{x} = -x$  con  $x(0) = 1$  y distintos valores de  $h$  (los resultados se utilizarán más adelante).



**Observaciones**

1. Es predictivo (anticipativo, al usar la pendiente en  $t_{k+1}$ ).
2. El error también decrece con  $h \rightarrow 0$ , pero con  $h$  más altas es mucho más estable <sup>16</sup>.
3. El algoritmo derivado del método de integración de Euler implícito es

```

Alg_Euler implícito
Datos:  $\dot{x} = f(x, t)$ ,  $x_0$ , M,  $h$ 
k=0
Repetir
    Actualizar  $F(x(k+1))$ 
    Aplicar N-R a  $F(x(k+1)) = 0$ 
    Salida  $(x_{k+1}, t_{k+1})$ 
    j=j+1
Hasta k>M
fin

```

Dado que N-R converge en muy pocas iteraciones, el mayor tiempo de cálculo no es un problema importante frente a la inestabilidad potencial del anterior.

**Ejemplo 10:** a) Para un  $x(t)$  arbitrario representar gráficamente las dos aproximaciones de Euler (explícita e implícita). b) Para la función de prueba  $\dot{x} = -x$  con  $x(0) = 1$  obtener la solución analítica  $x(t)$ . c) Obtener la secuencia  $x_k$  si se usa el método de integración explícito de Euler en los tres casos: c1)  $0 < h < 1$ , c2)  $1 < h < 2$  y c3)  $2 < h$ . d) Idem la implícita. e) Extraer consecuencias.

**7.4.2. Circuito resistivo NL equivalente discreto**

Para obtener el circuito equivalente discreto asociado al *método implícito de Euler*, recordemos el punto de partida de las *ecuaciones de estado*:

1. Ecuaciones LK discretizadas: Son las LCK en la forma  $Ai^{(k+1)} = 0$ , las LVK en la forma  $v^{(k+1)} - A^T e^{(k+1)} = 0$ .
2. Ecuaciones de resistores (incluyendo fuentes independientes): Al ser en general NL se plantean sus ecuaciones para  $k+1$ , como exige el algoritmo. Por ej.  $i_{7,k+1} = g(v_{7,k+1}, t_{k+1})$  proviene de la forma continua  $i_7 = g(v_7, t)$  de un resistor NL, etc.
3. Elementos no resistivos: Sólo las variables  $\dot{x}$  se convierten en  $(x_{k+1} - x_k)/h$

---

<sup>16</sup>Con la función de prueba  $\dot{x} = -x$  con  $x(0) = 1$  y distintos valores de  $h$  se puede comprobar (los resultados se utilizarán más adelante).

- a) Consideremos como elemento representativo un condensador NL de dos terminales  $q_C = \hat{q}_C(v_C)$ , es decir con capacidad  $C(v_C)$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C(v_C)} i_C \longrightarrow \frac{v_{C,k+1} - v_{C,k}}{h} = \frac{1}{C(v_{C,k+1})} i_{C,k+1}$$

El elemento resultante para el circuito que debe resolverse en  $k + 1$  es  $i_{C,k+1} = C(v_{C,k+1}) [(v_{C,k+1} - v_{C,k})/h]$ , es decir un elemento resistivo NL<sup>17</sup> de dos terminales.

- b) Para un inductor NL 2-term de flujo controlado por corriente se obtendrían resultados duales. Otros casos, de una o más puertas, se podrían obtener de forma similar.

**Ejemplo 11:** a) Obtener la ecuación discretizada (Euler implícito) de un condensador LTI y dibujar su circuito equivalente para  $k + 1$ . b) Idem para  $q_5 = C(t)v_5$ ,  $q_4 = v_4^3$ ,  $\phi_3 = \hat{\phi}_3(i_3)$ .

### Observaciones:

1. Cualquier circuito dinámico NL admite un *circuito equivalente NL discreto resistivo* para cada iteración temporal basada en el método de integración implícito.
2. Cada uno de estos circuitos resistivos NL en general se pueden convertir en *circuitos discretos resistivos lineales* para cada iteración discreta del algoritmo de N-R.
3. Si el circuito resistivo equivalente del modelo Euler implícito resultara ser LTI entonces N-R sólo necesitaría una sola iteración.

### 7.4.3. Comparación de algoritmos de integración numérica

Los criterios más utilizados para comparar los algoritmos de integración numérica utilizados por los simuladores de circuitos, son los siguientes:

#### ■ Estabilidad del algoritmo

Para probar la estabilidad de un algoritmo de integración se suele aplicar a una ecuación de prueba conocida. La más socorrida es la ecuación de estado que genera la respuesta estable  $x(t) = x_0 \exp(-\lambda t)$  con  $\lambda > 0$ , es decir

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad x(0) = x_0$$

Así, para los dos casos bajo estudio se obtienen los resultados que siguen  $\forall \lambda$  de partida que se quisiera considerar:

<sup>17</sup>Si se tratara de un condensador lineal, se obtendría  $i_{C,k+1} = (C/h)v_{C,k+1} - (C/h)v_{C,k}$ , es decir una combinación afín de tipo Norton con un conductor de  $C/h$  (Siemens) en paralelo con una fuente de corriente  $-(C/h)$ .

1. Euler explícito:  $x_k = x_0(1 - h\lambda)^k$ , de donde
  - a)  $0 < h\lambda < 1 \Rightarrow x_k$  estable y tiende a cero uniformemente (en  $h = 2/\lambda$  cae bruscamente a cero)
  - b)  $1 < h\lambda < 2$  oscilación decreciente (en  $h\lambda = 2$  oscilación permanente entre  $x_0$  y  $-x_0$ )
  - c)  $h\lambda > 2$  oscilación inestable
2. Euler implícito:  $x_k = x_0/(1 + h\lambda)^k$ , de donde
 

$\forall h\lambda > 0 \Rightarrow x_k \rightarrow 0$  sin oscilar, con similitud cualitativa con la solución real.

Las anteriores regiones de estabilidad corresponden a la ecuación de test dada en la que  $\lambda$  es real<sup>18</sup>. En general podríamos estar hablando de la respuesta a un  $\lambda$  complejo, en cuyo caso las regiones de estabilidad deberían aparecer especificadas en el plano  $[Re(h\lambda), Im(h\lambda)]$ .

#### ■ Error local de truncación (LTE)

Los dos algoritmos generan en  $t = (k + 1)h$  un error. Tal error es consecuencia de habernos quedado con una aproximación de primer orden del desarrollo de Taylor de  $x(t)$  razón por la cual tal error se llama *error local de integración* (LTE).

Supuesto válido  $x_k$ , el error cometido en la obtención del paso  $k + 1$  se designa<sup>19</sup> por  $LTE_{k+1}$ . Naturalmente el nuevo  $LTE$  debe incorporar también el efecto de los  $LTE_k$  anteriores.

Existen otros métodos de integración, de los que hablaremos al referirnos a *spice*. No obstante podemos decir que en general la elección de un método de integración supone un compromiso entre  $LTE$  y la estabilidad (así, aumentando el orden de integración, lo que en general disminuye el  $LTE$ , deteriora la estabilidad).

#### 7.4.4. Spice y sus algoritmos de integración temporal

En la Fig. 7.10 se ofrece una reproducción del esquema de operación de *spice*, extraída de la Tesis de Nagel<sup>20</sup>, con algunos comentarios añadidos<sup>21</sup>.

<sup>18</sup>Nótese también que si  $f(x)$  fuera conocida, al ser  $\sim f(0) + J|_{x_0}(x - x_0) + \dots$ , su jacobiano podría informarnos de la  $\lambda$  más alta del problema, pero no es el caso.

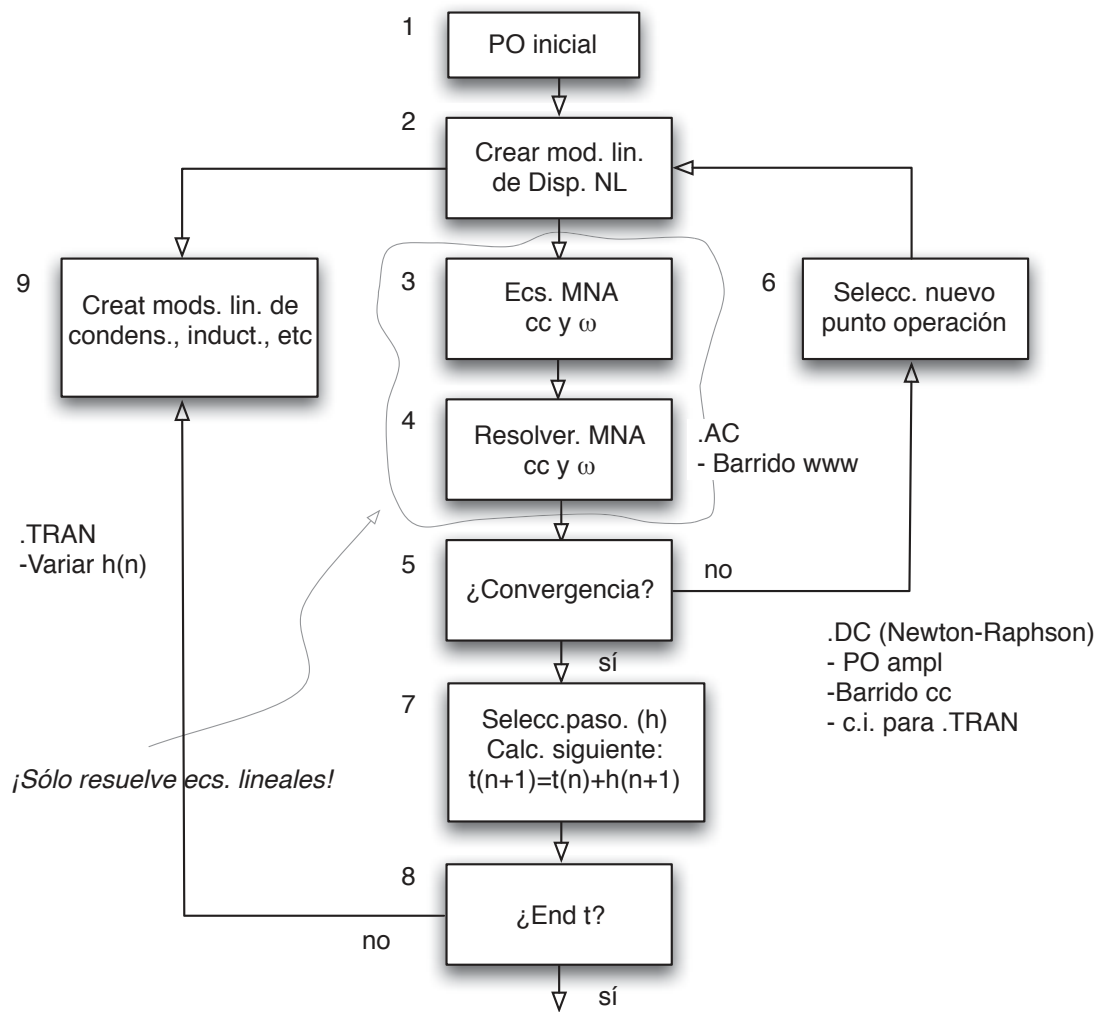
<sup>19</sup>Para la función de prueba  $x(t) = x_0 \exp(-\lambda t)$  y  $\lambda > 0$ , alrededor de  $x_k(t_k)$  es (Taylor)

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t_k} - \lambda x_0 e^{-\lambda t_k} (t - t_k) + \frac{\lambda^2 x_0}{2} e^{-\lambda t_k} (t - t_k)^2 - \dots$$

que aplicado a  $t = t_{k+1}$  con  $t_{k+1} - t_k = h \ll 1$  proporciona  $LTE_{k+1} \approx (\lambda h/2)^2 \exp(-\lambda t_k)$ , es decir  $LTE_{k+1} \propto h^2$ .

<sup>20</sup>Nagel, L. W., "SPICE2: A computer program to simulate semiconductor circuits". University of California, Electronics Res. Lab., ERL-M520, Berkeley, CA (1975).

<sup>21</sup>Otro simulador de propósito general que puede ser utilizado en este ámbito, aunque no está especializado para el mismo, es Matlab.



### ■ Algoritmo Trapezoidal

Se basa en la expresión de segundo orden

$$x_{k+1} = x_k + h_k \dot{x}_k + \frac{h_k^2}{2} \ddot{x}_k$$

con  $\ddot{x}_k = (\dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k)/h_k$ , es decir, es lo mismo que

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h_k}{2} [\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1}]$$

que reduce el carácter predictivo del Euler implícito. Con ello, para la función de test dada anteriormente es estable  $\forall h\lambda > 0$  (para orden mayor que 2 dejaría de serlo), consiguiendo además un *LTE* menor ( $\propto h^3$ ).

Se puede demostrar que el algoritmo trapezoidal para funciones con  $h\lambda$  complejas es estable en la región  $Re(h\lambda) < 0$ .

### ■ Algoritmos de Gear

Todos ellos se basan en la expresión siguiente

$$\dot{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^b \alpha_i x_{k+1-i}$$

desde  $b = 1$  hasta  $b = 6$  (más allá la estabilidad no está asegurada).

### Observaciones

1. Gear\_1 (primer orden,  $b = 1$ ): Es el Euler implícito (estable y *LTE* proporcional a  $h^2$ ).
2. Gear\_2 (segundo orden,  $b = 2$ ): Es  $\dot{x}_{k+1} = \alpha_0 x_{k+1} + \alpha_1 x_k + \alpha_2 x_{k-1}$  donde los coeficientes se obtienen suponiendo que la  $x(t)$  exacta es un polinomio de tercer grado<sup>24</sup>,
3. Presentan el problema adicional en el arranque del algoritmo, en el que deben aportarse los valores previos a  $x_1$ , no disponibles.

## Ejercicios complementarios de clase

1. Sea un circuito que sólo tenga un condensador y un inductor en general no lineales, caracterizados por sus relaciones constitutivas,  $q_{C_1} = \hat{q}_{C_1}(v_{C_1})$  y  $\phi_{L_2} = \hat{\phi}_{L_2}(i_{L_2})$ . Supongamos que están conectados a un resistor no lineal

---

<sup>24</sup>Se le obliga a pasar por  $(x_{k+1}, t_{k+1})$ ,  $(x_k, t_k)$  y  $(x_{k-1}, t_{k-1})$ . Para  $h$  constante proporcional directamente

$$x_{k+1} = \frac{4}{3}x_k - \frac{1}{3}x_{k-1} + \frac{2h}{3}\dot{x}_{k+1}$$

Expresiones que deben cambiarse si el paso de integración no es constante.

bipuerta, de acuerdo con el esquema circuital definido por la descripción textual

$$\begin{array}{llll} c1 & 1 & 1' & q_{C_1} = \hat{q}_{C_1}(v_{C_1}) \\ l2 & 2' & 2 & \phi_{L_2} = \hat{\phi}_{L_2}(i_{L_2}) \\ r3 & 1 & 1' & 2 & 2' & i_1 = h_1(v_1, i_2) & v_2 = h_2(v_1, i_2) \end{array}$$

en la cual suponemos existen  $h_1$  y  $h_2 \forall (v_1, i_2)$ . Se pide: a) Plantear las ecuaciones de estado con  $x_1 \equiv v_{C_1}$  y  $x_2 \equiv i_{L_2}$  con las c.i. correspondientes. b) ¿Y si  $h_1$  y  $h_2 \forall (v_1, i_2)$  no existen en forma explícita?. c) Extender las conclusiones a todos los casos posibles desde  $n = 1$  hasta  $n = 3$ ?

2. Para un condensador y un inductor LTI con c.i. no nulas, se pide: a) Obtener la Transformada de Laplace. b) Representar el circuito equivalente de ambos en el dominio transformado. c) Seleccionar otros dos elementos no resistivos repetir el planteamiento anterior.
3. Sea el circuito descrito por

```
circuito cap7-Ej-2
i1      3 1   i1 = Im cos ωt
r2      1 3   i2 = G2v2
l1      1 3   v3 = L3di3/dt
e1      2 3   v4 = αv2 {VCVS}
c1      2 3   i5 = C5dv5/dt
r2      2 3   i6 = G6dv6/dt
end
```

Con objeto de poder plantear por simple inspección las ecuaciones MNA en forma matricial en  $s$ , se pide: a) Obtener para  $C_5$ , con  $v_5(0-) = E$ , la ecuación en  $s$  y representar la ecuación transformada por un circuito (en  $s$ ); ¿Porqué es un circuito paralelo si en  $t$  es un circuito serie?. b) Idem para  $L_3$  con  $i_3(0-) = I$ . c) ¿Cuáles son las variables MNA en  $s$ ?. d) Escribir directamente (por simple inspección de las ecuaciones temporales) las ecuaciones MNA en  $s$ .

4. Sobre el circuito dinámico LTI del ejercicio anterior se pide: a) ¿Para qué valores de  $L$  o de  $G$  posee solución única?. b) ¿Se verifica  $T(s) = P(s)$ ?. c) ¿Cómo se llama?, ¿Qué representa?.
5. Para el mismo circuito del ejercicio anterior: a) Obtener la respuesta,  $E_{2,zi}(s)$ , debida sólo a las c.i. y también  $e_{2,zi}(t)$  b) ¿Cómo se llama?, ¿Qué representa?.
6. Para el mismo circuito del ejercicio anterior: a) Obtener la respuesta,  $E_{2,zs}(s)$  para  $i_{1s} = \delta(t)$  y también  $e_{2,zs}(t)$  b) ¿Qué representa?.
7. Para un circuito LTV genérico se pide: a) Demostrar el Teorema de superposición z.s. (c.i. nulas). b) A partir del resultado anterior, ¿Cómo se podría demostrar el Teorema de superposición global, es decir  $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ ?. c) ¿Y los otros dos?.

8. Sea un circuito dinámico NL formado por dos elementos compuestos acoplados por una única puerta: a) Demostrar gráficamente el Teorema de sustitución, supuesto que la corriente de la misma es única y está dada por  $i = \hat{i}(t)$ . b) Indicar en qué casos es aplicable.
9. Sea  $N$  el circuito caótico de Chua y  $N_1$  y  $N_2$  un desdoblamiento del mismo. Se pide: a) Dibujar varias opciones de desdoblamiento. b) ¿Cuáles son las condiciones que el teorema exige al respecto?. ¿Es necesaria alguna adicional?.
10. a) Para un  $x(t)$  arbitrario representar gráficamente las dos aproximaciones de Euler (explícita e implícita). b) Para la función de prueba  $\dot{x} = -x$  con  $x(0) = 1$  obtener la solución analítica  $x(t)$ . c) Obtener la secuencia  $x_k$  si se usa el método de integración explícito de Euler en los tres casos: c1)  $0 < h < 1$ , c2)  $1 < h < 2$  y c3)  $2 < h$ . d) Idem la implícita. e) Extraer consecuencias.
11. a) Obtener la ecuación discretizada (Euler implícito) de un condensador LTI y dibujar su circuito equivalente para  $k+1$ . b) Idem para  $q_5 = C(t)v_5$ ,  $q_4 = v_4^3$ ,  $\phi_3 = \hat{\phi}_3(i_3)$ .