Ejercicios

1. Consideremos un circuito eléctrico en el cual la frecuencia más alta de operación es f. El Electromagnetismo (EM) nos informa que una onda electromagnética (en el espacio libre se propaga a la velocidad de la luz, $c\ m/s$) de frecuencia f tiene una longitud de onda asociada $\lambda = c/f$. Pues bien, una forma de lograr que la potencia radiada no sea apreciable, es hacer que la dimensión lineal máxima del circuito sea mucho menor que la longitud de onda en el espacio libre asociada con la frecuencia impulsora[66], esto es $L_{max} \ll c/f$, p. ej. $L_{max} \leq 0{,}1 \times c/f$. Por razones similares (en circuitos que operan con señales digitales) si $\triangle t$ es el tiempo más breve de interés se puede decir que la condición de no radiación es $L_{max} \ll c\triangle t$, p. ej. $L_{max} \leq 0{,}1 \times c\triangle t$. Pues bien, calcular L_{max} para los siguientes casos: a) Línea de transmisión de energía electrica con $f = 50Hz$. b) Una señal de radiofrecuencia baja, p. ej. $f = 10^6 Hz$. Idem alta, p. ej. $f = 30 \times 10^6 Hz$. c) Una frecuencia de microondas, p. ej. $f = 10^{10} Hz$. c) Un mirocircuito digital que opera a una frecuencia de reloj de $f = 4 \times 10^9 cps$. d) Representar todos los casos sobre unos ejes L_{max} y f_{max} la hipérbola $L_{max} f_{max} = 0{,}1 \times c$ (o $f_{max} = (\triangle t)^{-1}$ para el último caso) comentando los resultados.

   SOL.: Hágase.

2. Suponer que para un BJT de base suficientemente larga y tan estrecha como se quiera se obtiene para su corriente de base a lo largo de su longitud transversal, $\forall x \in [0, L]$
$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = f(v(x,t), \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \ldots)$$
   siendo $v(x,t)$ la tensión a lo largo de la base medida respecto de un nodo común (Nota: se omiten otras dependencias). Se pide: a) Tipo de elemento. b) ¿Podría reducirse a uno de parámetros concentrados?

   SOL.: a) Es un elemento de *parámetros distribuidos*. Constituye un ejemplo de que aun en condiciones de operación a frecuencias tan bajas como se quiera aparecen en ocasiones ecuaciones en derivadas parciales como la que estamos tratando (físicamente denominadas de parrámetros distribuidos).

   b) Si se hace una discretización de la variable x, p. ej. en n localizaciones de anchura $\triangle x$, se podrían definir $i_1(t)$,..., $i_n(t)$ y, del mismo modo, $v_1(t)$,..., $v_n(t)$, convirtiendo la ecuación anterior en un sistema de *n ecuaciones de parámetros concentrados*. Nótese que lo que se obtiene es una aproximación de la ecuación anterior, que sólo tiende al mismo resultado si $\triangle x \to 0$.

3. Para cada uno de los elementos siguientes representar su característica o su relación constitutiva e indicar el tipo de cada uno de ellos: a) Resistor $i = k_1 v + k_2$

[66]Bajo estas condiciones, cada elemento infinitesimal del circuito, dl, que conduce una corriente, i, posee a una distancia mucho menor que una longitud de onda, un elemento correspondiente, $-dl$, que conduce la misma i (esta aproximación es equivalente a la de modelar el sólido rígido en Mecánica por una partícula puntual de igual masa). Esto garantiza las cancelaciones de los campos producidos por tales corrientes a distancias del orden de unas cuantas longitudes de onda en todas las direcciones, por lo que los campos asociados con el circuito están restringidos a la vecindad del mismo. También bajo estas condiciones es posible caracterizar el circuito por sus (v,i), en lugar de los campos (E,H), y además en un número finito de puntos (en lugar de sus variaciones con la posición), de tal modo que en las ecuaciones de tales elementos sólo poseen t como variable independiente en sus integrales o derivadas, es decir son *elementos de parámetros concentrados*.

con $k_2 \neq 0$. b) Modelo de Shockley de continua de un diodo de unión. c) Diodo ideal. d) Diodo túnel en continua. d) Tiristor en continua.

SOL.: Como se verá por sus ecuaciones, todos ellos son *resistores* (y por consiguiente algebraicos), además son no lineales todos ellos. En particular:

a) Es un elemento *no lineal* (compruébese con el teorema de superposición), *v-controlado* $\forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ (finitos) e *i-controlado* $\forall k_2 \in \mathbf{R}$ (finito) siempre que $k_1 \neq 0$.

b) $i = I_s(e^{qv/kT} - 1)$ también *no lineal* y *v-controlado*.

c) Entendemos diodo ideal como el definido por $v = 0\ \forall i \geq 0$ e $i = 0\ \forall v \leq 0$ y es resistivo no lineal y no *v-controlado* ni *i-controlado*. ¿Cuál es la característica del elemento dual de éste?.

d) La característica de continua de un diodo túnel es una función $i = g(v)$ no lineal (de tipo N, se suele decir) en la que $g^{-1}(\cdot)$ no es una función por lo que este elemento sólo es *v-controlado*.

e) La característica estática de un tiristor es de *tipo* dual de la anterior (tipo S), por tanto *i-controlado*.

4. Un modelo circuital del diodo Schottky está formado por la combinación en serie de una L_s, una R_s y en serie con ellos una combinación paralelo de la resistencia no lineal (modelo de Shockley del diodo) $i = I_s(e^{qv_d/nkT} - 1)$ con el condensador no lineal (sólo capacidad de la z.c.e.) $C_j(v_d) = C_{jo}/\sqrt{1-(v_d/\varphi_o)}$. Se pide: a) Describirlo textualmente como un subcircuito (denominarlo *subckt diodoSchky*). b) Obtener la relación constitutiva del elemento compuesto. c) ¿Qué tipo de elemento es?.

SOL.: a) En primer lugar deberíamos dibujar el circuito para tener una imagen visual del mismo. En cualquier caso, a la vista del enunciado, se puede escribir directamente

$$
\begin{array}{l}
subckt\ diodoSchky\ 1\ 4 \\
l1\ 1\ 2\ v_1 = L_s di_1/dt \\
r1\ 2\ 3\ v_2 = R_s i_2 \\
r2\ 3\ 4\ i_3 = I_s(e^{\frac{qv_3}{nkT}} - 1) \\
c1\ 3\ 4\ i_4 = C_j(v_4) dv_4/dt\ con\ C_j(v_4) = C_{jo}/\sqrt{1-(v_4/\varphi_o)} \\
ends
\end{array}
$$

Para $l1$ podríamos haber escrito como ecuación $\phi_1 = L_s i_1$ y para $c1$ $q_4 = \widehat{q}_4(v_4)$. Nota: Obtener $\widehat{q}_4(v_4)$ si se sabe que la expresión dada para $C_j(v_4)$ es válida para $v_4 \leq \varphi_o$ con $\widehat{q}_4(\varphi_o) = 0$.

b) Las expresiones básicas para ello, teniendo en cuenta que la corriente a través de $C_j(v_d)$ es $i_j(v_d) = C_j(v_d)dv_d/dt$, son

$$
v = L_s \frac{di}{dt} + Ri + v_d \qquad i = I_s(e^{\frac{qv_d}{nkT}} - 1) + \frac{C_{jo}}{\sqrt{1-\frac{v_d}{\varphi_o}}} \frac{dv_d}{dt}
$$

Si eliminamos la variable interna v_d, en este caso es posible, resulta

$$
i = f_1(v, i, i^{(1)}) + f_2(v, v^{(1)}, i, i^{(1)}, i^{(2)})
$$

Es decir, $h(v, v^{(1)}, i, i^{(1)}, i^{(2)}) = 0$, expresión que no es explícita ni en i ni en v.

c) El elemento compuesto es un elemento de de *parámetros concentrados dos terminales*, *dinámico* y *no lineal* e *invariante con el tiempo.*

5. a) ¿Qué tipos de elementos son: una resistencia lineal de valor R, un condensador lineal de capacidad C y la combinación serie RC de ambos?. b) ¿Es lineal el último elemento? ¿Obtener su operador Γ, cuando se expresa en la forma $v(t) = \Gamma[i(t)]$?. c) Qué tipos de circuitos son: La resistencia R excitada por una fuente de corriente $i(t) = u_s(t)$, idem C, idem la combinación citada RC?.

SOL.: a) Para el condensador lineal es $i = Cdv/dt$ o $h(v^{(1)}, i) = Cv^{(1)} - i = 0$, para el que existe la forma algebraica $h(\xi, \eta) = 0$ con $\xi = v^{(1)}$ e $\eta = i^{(0)}$. Por consiguiente este elemento es *algebraico* (al igual que la resistencia), pero sólo R es *resistivo* ya que verifica $\alpha = \beta = 0$.

Por su parte la combinación serie genera un elemento compuesto para el que $v - Ri - C^{-1}i^{(-1)} = 0$ o $h(v, i, i^{(-1)}) = 0$ sin que exista forma algebraica alguna para esta expresión. Por consiguiente es un *elemento dinámico*.

b) Para la combinación RC la forma de $h(\cdot)$ es, como acabamos de ver $v - Ri - C^{-1}i^{(-1)}$ y ésta es una expresión lineal tanto en v como en i (Compruébese suponiendo nulas las condiciones iniciales). También se puede escribir $v = \Gamma[i] = (R + C^{-1}\int)[i]$, siendo $\Gamma = (R + C^{-1}\int)$ un operador lineal (Nota: la derivada y la integral, ésta con condiciones iniciales nulas, son operadores lineales). En suma RC es un elemento *dinámico lineal*. Además por ser de parámetros constantes es LTI.

c) Dadas las ecuaciones implicadas (pensando en las *ecuaciones tableau* de los circuitos), en el primer caso estamos ante un *circuito resistivo lineal*, en el segundo y el tercero ante *circuitos dinámicos lineales* (además LTI).

6. En el elemento dinámico descrito por

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 10v = 8\frac{di}{dt} + b$$

Se pide ¿Para qué valor de b se verifica el teorema de superposición?. Suponer que i es la entrada y v la salida.

SOL.: Las respuestas particulares, v_1 y v_2, a dos supuestas entradas distintas i_1 y i_2 verificarán:

$$d^2v_1/dt^2 + 10v_1 = 8di_1/dt + b \quad d^2v_2/dt^2 + 10v_2 = 8di_2/dt + b$$

Suponiendo ahora que la excitación es $i = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2$ el segundo miembro daría lugar a la expresión

$$8d(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2)/dt + b = \lambda_1 8d(i_1)/dt + \lambda_2 8d(i_2)/dt + b$$

En tanto que su primer miembro, para obtener la respuesta $v = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$ implicaría que

$$(d^2/dt^2 + 10)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1(8d(i_1/dt + b) + \lambda_2(8d(i_2/dt + b)$$

De estas dos expresiones, y dado que la linealidad implica que $(d^2/dt^2 + 10)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = 8d(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2)/dt$ para todos los posibles pares λ_1, λ_2 reales, se deduce que debe ser $b = 0$. De no ser así el elemento sería *no lineal*.

7. Sea un resistor no lineal de dos terminales definido por $h(v, i) = 0$ en una cierta región a) ¿Bajo qué condiciones existe la *función explícita* i-controlada $v = f(i)$?. b) ¿Y la función $i = g(v)$?.

SOL.: a) El *Teorema de la función implícita* dice que es condición necesaria y suficiente que en la región considerada sea (en nuestro caso $\partial h/\partial v \neq 0$)

$$J(\frac{h}{v}) \neq 0$$

para que exista la forma explícita citada, es decir

$$v = f(i)$$

en dicha región, suponiendo obviamente que h está definida y $h \in C^1$ (derivada continua) en esa región.

b) Tomando como punto de partida la existencia de $v = f(i)$ que acabamos de ver, el *Teorema de la función inversa* garantiza que si en la región considerada es

$$J(\frac{v}{i}) \neq 0$$

entonces existe la función inversa $i = f^{-1}(v)$ que designamos por $i = g(v)$.

8. Sea el resistor de dos terminales dado por $h(v,i) = 1-(v-2)^2-(i-2)^2 = 0$. Se desea representarlo en la forma v-controlada $i = g(v)$, o en varias *funciones* de este tipo (en el caso en que la g citada no exista como función) indicando las regiones de definición de las mismas.

SOL.: La grafica de $h(v,i)$ es un paraboloide de revolución que es cortado en el plano $v = i = 0$ por la función $h = 0$ ó $(v-2)^2+(i-2)^2 = 1$, circunferencia de centro $(v,i) = (2,2)$ y radio $r = 1$.

Calculemos los puntos en los que no exista la forma explícita $i = g(v)$. El Teorema de la función implícita dice que vendrán dados por

$$\frac{\partial h(v,i)}{\partial i} = 2(i-2) = 0$$

Corresponden a todos los puntos del segmento $i = 2$ con $v \in [1,3]$, fuera del cual h no está definida. Obsérvese que hay dos tramos de la característica que por separado podrían definirse como funciones y son:

$$\begin{array}{ll} i = g_1(v) = 2+\sqrt{1-(v-2)^2} & v \in (1,3)\ i < 2 \\ i = g_2(v) = 2-\sqrt{1-(v-2)^2} & v \in (1,3)\ i > 2 \end{array}$$

Ambas regiones están definidas como intervalos abiertos por lo que en los mismos no sólo existen las dos g_1 y g_2 sino que además son derivables en sus intervalos de definición.

9. Suponer que nos dan un modelo descrito por $i = (v-2)(8-v)$ válido $\forall v \in (2,8]$, en unidades SI. a) Obtener el tipo de característica calculando los extremos superior e inferior de la misma. b) Obtener el elemento dual; de no existir la función correspondiente al mismo, calcular cada una de las ramas que pueden definirse y su intervalo de validez. c) Estudiar la pasividad local del elemento dado en el punto $(v,i) = (6,8)$ y la del elemento dual en el punto dual de éste. d) La característica del elemento dual obtenido ¿es monótona decreciente? y ¿estrictamente decreciente?.

SOL.: a) Un análisis elemental de la expresión nos indica que su característica representa una parábola abierta hacia las i negativas, con el valor máximo en el punto $(v,i) = (5,9)$, además la parábola corta al eje horizontal v en los puntos $v = 2$ y $v = 8$.

Por imperativo del enunciado debemos notar que sólo es válida (o, los únicos valores admisibles están) en $2 < v \leq 8$, por lo que $vi \geq 0$ en todos sus puntos, es por consigiente un *resistor pasivo* (si el enunciado fuera $2 < v < 8$ sería estrictamente pasivo).

El *extremo superior* (mínima cota superior) se da en $v = 5$ y es $i(5) = 9$. El *extremo inferirior* (máxima cota inferior) es $i(8) = 0$ (si el enunciado fuera $2 < v < 8$, dado que $i(2)$ e $i(8)$ no existen, tal extremo inferior no existiría). Nota: Recordar el teorema de Cálculo que dice *toda función continua en un intervalo cerrado posee sus extremos superior e inferior en dicho intervalo*.

b) Para obtener el elemento dual de uno dado (es lo mismo que obtener la función inversa de una dada), se puede operar de dos formas:

b1) Gráficamente: Basta cambiar letras i y v entre si en los ejes de coordenadas de la representación (hágase).

b2) Analíticamente, *primero* manipulamos $i = f(v)$ alcanzando la forma $v = f^{-1}(i)$, lo cual es todavía el mismo elemento; y *segundo* intercambiamos las letras i y v en esta expresión, con lo cual se llega a $i = f^{-1}(v) = g(v)$ que es el dual del primitivo.

En el caso que tratamos el primer paso nos conduce a

$$i = (v-2)(8-v)\, o\, v^2-10v+16+i = 0\, de\, donde\, v = 5 \pm \sqrt{9-i}$$

El segundo paso nos conduce finalmente al elemento dual

$$i = f^{-1}(v) = 5 \pm \sqrt{9-v}$$

Descubrimos que no es una función propiamente dicha (es no v-controlada), en todo caso se tienen dos ramas, a saber

$$i = 5 + \sqrt{9-v} \quad \forall v \in [0,9] \quad i = 5 - \sqrt{9-v} \quad \forall v \in (0,9]$$

siendo el *punto rama* (donde se encuentran las dos) el dado por $(v,i) = (9,5)$.

c) Para el elemento original en el punto pedido, para Δv suficientemente pequeño es

$$\Delta i = \left. \frac{\partial f(v)}{\partial v} \right|_{v=6} \Delta v = -2\Delta v$$

por lo que se puede decir que el resistor es *local y estrictamente activo* en dicho punto. Por otra parte para el elemento dual es, en el punto pedido

$$\Delta i = \left. \frac{\partial f^{-1}(v)}{\partial v} \right|_{v=8} \Delta v = -\frac{1}{2}\Delta v$$

siendo también *local y estrictamente activo* en dicho punto.

d) Como hay dos ramas deberíamos operar con ambas. Para demostrar que $i = 5 + \sqrt{9-v}$ es *estrictamente decreciente* $\forall v \in [0,9]$ debemos demostrar que para cualesquiera v_1 y v_2 del intervalo de definición tales que $v_1 < v_2$ es $g(v_1) > g(v_2)$. En efecto,

$$v_1 < v_2 \Rightarrow 9 - v_1 > 9 - v_2 \Rightarrow \sqrt{9-v_1} > \sqrt{9-v_2} \Rightarrow 5 + \sqrt{9-v_1} > 5 + \sqrt{9-v_2}$$

por consiguiente $g(v_1) > g(v_2)$, *estrictamente decreciente.* Para que fuara *monótona decreciente* en dicho intervalo bastaría con que para cualesquiera v_1 y v_2 del intervalo de definición tales que $v_1 \leq v_2$ fuera $g(v_1) \geq g(v_2)$, pero dado que estrictamente decreciente implica monótona decreciente según las definiciones, tenemos probada esta propiedad también. (Hacer los cáculos para la otra rama, resultará ser estrictamente creciente).

Respecto a la aparición de las dos ramas al calcular el dual de un elemento caracterizado por $i = f(v)$ (es decir, la función inversa $f^{-1}(\cdot)$, recuérdese el teorema: *Toda función $f(x)$ estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) posee función inversa $f^{-1}(x)$* (es decir, en tal caso la inversa posee una sola rama, es univaluada se dice a veces, pero no debe usarse este término ya que va implícito en la palabra función). Nótese que nuestro enunciado del apartado a) no era estrictamente creciente, por lo que no tiene inversa.

10. A continuación se suponen conocidos los modelos de diferentes dispositivos eléctricos. Indicar para cada uno de ellos su tipo. a) Un varactor. b) Un condensador con un material ferroeléctrico entre sus placas metálicas. c) Un inductor con un material ferroeléctrico entre sus arrollamientos. d) Un diodo Josephson.

SOL.: a) Para un varactor típico (unión PN), tomada de un manual de Electrónica Física, es

$$q_j = \widehat{q}_j(v) = \frac{3}{2} C_o \varphi_o (1 - \frac{v}{\varphi_o})^{2/3} \;\; \forall v < \varphi_o$$

donde q_j representa la *carga total de la zce del lado N* para cada v considerada.

Adoptando como variables eléctricas (v,i), siendo tal v la externa aplicada entre los contactos del lado P al N e i la corriente relacionada (la que entra por el terminal P), sabemos que por definición es $q \equiv i^{(-1)}$, o $i = dq/dt$.

Para relacionar q con q_j basta recordar que las ecuaciones de Maxwell aplicadas a la particular distribución de cargas de este dispositivo dan para la corriente de desplazamiento asociada a la variación de q_j un valor $i_j = d(-q_j)/dt$, siendo además, con la referencia adoptada, $i_j = i$. Por tanto

$$q(v) = k - q_j(v) \;\; \forall k \in \mathbf{R}$$

Si se desea, se puede tomar una referencia para $q(v)$, p. ej. $q(0) = 0$, es decir tomando $q(v) = q_j(0) - q_j(v)$, caso en el que $q(v)$ representaría *la carga total* (integral de i) *que habría de introducirse por el terminal externo P* (el positivo de v) *para pasar de una polarización $v = 0$ a cualquier otra v.*

En suma, con los datos citados y $q(v) = q_j(0) - q_j(v)$, el elemento resulta ser como todos los demás un elemento *algebraico no lineal*. Concretamente en este caso es un *condensador no lineal v-controlado* (nótese que $C(v) = dq(v)/dv = -dq_j/dv$).

b) y c) Ambos tienen sus características respectivas, $q = \widehat{q}(v)$ y $\phi = \widehat{\phi}(i)$ con "forma" similar. En efecto pasan por el origen y son inicialmente lineales pero tienden a saturarse cuando sus variables independientes se separan del origen. Mientras adopten este comportamiento son algebraicos, t-invariantes, no lineales. El primero es un condensador v-controlado y el segundo un inductor i-controlado. (Calcular y representar su capacidad $C(v)$ y su inductancia $L(i)$).

d) Un diodo Josephson está formado por dos superconductores separados por una pequeña capa de aislante (un óxido) y su modelo más simple es

$$i = I_o \sin(k_o \phi)$$

Por consiguiente es un *inductor no lineal ϕ-controlado*, pero no *v-controlado*.

11. Demostrar que un condensador lineal t-invariante cargado inicialmente a una tensión $v(0) = E$ es indistinguible entre sus terminales de uno de capacidad idéntica descargado inicialmente, pero con una fuente de tensión de valor E en serie (Idem. un inductor lineal con $i(0) = I$, con una fuente de corriente de valor I en paralelo).

SOL.: a) Para el condensador dado y para $t \geq 0$ es

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

Ahora bien si construimos un elemento compuesto, con variables de terminal (v,i), formado por una fuente de tensión de valor $v_1 = E$ en serie con un condensador inicialmente descargado, $v_2 = (1/C)\int_0^t i_2(\tau)d\tau$, no solo la relación constitutiva $\forall t \geq 0$, con $i = i_1 = i_2$, es exactamente la misma, $i = Cdv/dt$, sinó que incluso también serían iguales sus $v(t)$ o sus $q(t) = Cv(t)$, por lo que no sería distinguible de aquel desde sus terminales.

En el caso del inductor la fuente I estaría en paralelo con el inductor descargado (dualidad).

12. Aplicar a un condensador lineal t-independiente una excitación $v(t) = V_m \sin \omega t$ a partir de $t = 0$. Suponiendo que $\phi(0) = 0$ y que $q(0) = 0$ (no podría ser de otra forma al ser $v(0) = 0$). Se pide: a) Obtener las expresiones de $i(t)$, $\phi(t)$ y $q(t)$. b) Calcular y representar los puntos o trayectorias de $L(v,i)$, $L(v,\phi)$ y $L(q,v)$. c) ¿Cuáles de los anteriores lugares geométricos definen independientemente de la excitación aplicada al condensador?.

SOL.: a) Hágase. Se verá que $L(q,v)$ es la única que no depende de la entrada, además es una relación algebraica t-independiente.

13. Expresar en función de v e i la ecuación que define : a) Un condensador no lineal q-controlado, $v = \widehat{v}(q)$, y b) Un condensador lineal t-dependiente

SOL.: a) Es

$$\begin{aligned} dv/dt &= (d\widehat{v}(q)/dq)(dq/dt) \\ &= S(q)i \end{aligned}$$

siendo $S(q)$ la *capacidad recíproca* (F^{-1}); sólo si $S(q) \neq 0$ se podría expresar aquella ecuación en la forma

$$i = \frac{1}{S(q)}\frac{dv}{dt}$$

la presencia en esta ecuación de la variable q implica que deberíamos acompañarla siempre con la ecuación adicional $v = \widehat{v}(q)$.

b) En este caso es $q = C(t)v$ por lo que

$$i(t) = \frac{dC(t)}{dt}v + C(t)\frac{dv}{dt}$$

Nótese la presencia del primer término.

14. Sea un condensador q-controlado. Se pide: a) Explicar sobre la característica $v = \widehat{v}(q)$ cuál es la energía, $W(t_1,t_2)$, recibida entre un t_1 y un $t_2 > t_1$. b) ¿Depende tal energía de los valores particulares de i o v en cada t?. c) Si el mismo condensador trabaja en régimen periódico con periodo T, ¿W variará en un periodo (o en un número entero de ellos)?. d) Si el condensador es lineal y de capacidad C calcular la energía total $W(t)$ en un instante cualquiera t y explicar su valor sobre la característica.

   SOL.: a) Es $W(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(\tau)i(\tau)d\tau$ por lo que

   $$W(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \widehat{v}(q)\frac{dq(\tau)}{d\tau}d\tau = \int_{q_1}^{q_2} \widehat{v}(q)dq$$

   es decir, $W(t_1,t_2)$ es el área encerrada por $\widehat{v}(q)$ entre t_1 y t_2.

   b) Lo que precede indica que $W(t_1,t_2)$ sólo depende de la carga inicial $q(t_1)$ y la final $q(t_2)$ y no de sus valores particulares entre t_1 y t_2.

   c) En régimen periódico es $q(t_1 + nT) = q(t_1)\ \forall t_1$ siempre que n sea entero. Pues bien, dado que la integral anterior posee un integrando finito, por ser q-controlado el elemento, pero un intervalo de integración nulo, sucede que en régimen periódico es $W(t,t+nT) = 0$, es decir no almacena energía neta en cualquier intervalo de anchura nT.

   d) Obviamente para este caso es

   $$W(-\infty,t) \equiv W(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{q}{C}dq = C\int_{-\infty}^{t} vdv$$

   según la integral se ponga en términos de q, siendo $W(t) = (1/2C)q^2$, o en términos de v, siendo $W(t) = (1/2)Cv^2$. Sobre la característica $v = (1/C)q$ el condensador opera en el origen en $t = -\infty$ (lo cual es consistente con nuestra percepción física de que se fabrican descargados) si al cabo de un t_1 dado es $v(t_1) = (1/C)q(t_1)$, no importa los valores intermedios de $v(t)$ o de $q(t)$, la energía almacenada $W(t_1)$ es el área bajo la característica $v = (1/C)q$ entre su en el origen $(q,v) = (0,0)$ y el punto (q_1,v_1) referido.

15. Obtener: a) La potencia disipada por un condensador no lineal y un inductor no lineal. b) La de un transformador ideal y la de un girador ideal. c) ¿Como se comporta este último si se carga con un resistor controlado por tensión?¿Y por un condensador lineal?.

   SOL.: a) Hágase

16. Suponer que la bipuerta dada por $\pi 7\ \ 1\ 3\ 2\ 3\ \ v_1 = \widehat{v}_1(i_1,v_2)\ \ \ i_2 = \widehat{i}_2(i_1,v_2)$ representa a un BJT en cc y en E-común. a) Representar la característica de salida (en forma paramétrica con i_1 como parámetro) extendiéndola a las zonas activas directa e inversa. b) Obtener gráficamente (o indicar el procedimiento) h_{fe} y h_{oe} en un Q_1 situado en la región directa y en un Q_2 en la región inversa. c) Tipo de parámetros de pequeña señal y denominación precisa de los mismos. c) Representar el circuito equivalente de pequeña señal. d) Plantear circuitos de medida para los cuatro parámetros del circuito equivalente.

   SOL.: a) Hágase

17. Se pide: a) ¿Las fuentes controladas son activas o pasivas?. Dar algún ejemplo. b) ¿Lo son los BJT, y el AO?. ¿Porqué?. c) De las 4 fuentes controladas VCVS, VCVS, CCVS y CCCS ideales sólo 2 de esta familia son suficientes para obtener cualquiera de ella ¿cuáles?¿cómo?

    SOL.: a) Hágase

18. Obtener $q(v)$ y $v(t)$, en este orden, en un circuito formado por un memristor q-controlado, cuya $\phi = f(q)$ tiene forma de zona muerta con anchura $[-Q_o, Q_o]$ y más allá con pendiente $k > 0$ (es decir $\phi = k(q - Q_o)$ para $q \geq Q_o$ y $\phi = k(q + Q_o)$ para $q \leq Q_o$), excitado por una fuente de pulsos positivos de corriente de altura I_o y anchura Δ, con $i = i_s(t) = 0$ para $t < 0$. ¿Posee memoria dicho dispositivo?.

    SOL.: a) Suponiéndolo desenergizado inicialmente, la llegada de primer pulso provoca $q = \int i dt$ que al cabo de Δ se convierte en una carga almacenada de valor $I_o\Delta$.

    La anulación de $i(t)$ durante el resto del periodo mantiene este valor de $q(T) = q(\Delta) = I_o\Delta$. Supongamos que $I_o\Delta = Q_o$ (no cambia la validez del razonamiento), ello quiere decir que en el *primer pulso* la característica del memristor no supera la zona muerta y por consiguiente $\phi = f(q) = f(Q_o) = 0$, por lo que no hay respuesta, $v = d\phi/dt = 0$.

    Con la llegada del *segundo pulso*, y en $T < t < T + \Delta$ es ahora $q - Q_o = k(t - T)$, para cuya entrada la caracteística del memristor nos informa que ahora $\phi = k(q - Q_o) = k^2(t - T)$ por lo que se genera un $v = d\phi/dt = k^2$ a lo largo del citado segundo pulso. En los pulsos siguientes seguiría siendo $v = k^2$ como es fácil de comprobar.

    En suma, el memristor recuerda la llegada del primer pulso, sin el cual no hubiera dado la respuesta $v = k^2$ en el segundo (y en los restantes pulsos), es decir posee *memoria*.

19. Explicar la naturaleza de los elementos de dos terminales siguientes. a) *Nullator* definido por $h(v,i) = v^2 + i^2 = 0$. b) *Norator* definido por $h(v,i,x_1,x_2) = (v - x_1)(i - x_2) = 0$, $\forall (x_1,x_2) \in R^2$. c) ¿Cómo se aplicarían las ecuaciones tableau a un circuito que contuviera estos elementos?

    SOL.: a) La ecuación del nullator se puede escribir (como se hace usualmente) mediante las dos simultáneas

    $$v_j = 0 \quad i_j = 0$$

    Lo cual quiere decir que opera en el origen de coordenadas. Nótese que no se puede excitar directamente por una fuente independiente. Con ello, si un nullator está entre los nodos p y q de un circuito, entonces es $e_p - e_q = 0$ y al mismo tiempo $i_j = 0$ (la corriente de su rama). Es un resistor.

    b) Para el norator se puede escribir (como se hace usualmente)

    $$v_k = x_1 \ \forall x_1 \in R \quad i_k = x_2 \ \forall x_2 \in R$$

    Lo cual quiere decir que su "característica" ocupa todo el plano (v_k, i_k). Nótese que admite cualquier tensión del circuito, $v_k = e_r - e_s$, sin que responda con una i_k dada por sus características, en todo caso admite cualquier i_k que pase por los elementos a los que esté conectado. Tampoco se puede excitar directamente por una fuente independeiente.

    c) Las ecuaciones tableau usarían LCK con i_j e i_k, respectivamente para un posible nullator y un posible norator, de la misma forma que para cualquier otro elemento. Idem con $v_j = e_p - e_q$ y $v_k = e_r - e_s$. Ahora bien, las ecuaciones de los elementos serían $v_j = 0$ e $i_j = 0$ para el nullator y $\forall i_k$ y $\forall v_k$ para el norator. Eso sí, para disponer de un sistema compatible de ecuaciones es claro que debe de haber el mismo número de nullators que de norators (se usan en pares formando una bipuerta cada par). La aplicación de MNA se basa en este punto de partida y no ofrece dificultad alguna.

    Nota: Ambos resistores no lineales t-invariantes se denominan *elementos patológicos* ya que no pueden ser excitados en la forma usual. Se usan en Síntesis de circuitos por pares (uno de cada) para imitar el modo de operar del amplificador operacional o el de un simple BJT ideales, cuando trabajan en la zona activa.

    .

20. a) Linealizar el elemento de dos terminales y alto orden $h(v^{(\alpha)}, i^{(\beta)}) = 0$ alrededor de un punto situado en una región en la que es i^{β}-controlado. b) Del resultado obtenido, suponiendo además que el elemento es del tipo $(\alpha, \beta) = (2, 0)$, calcular $\tilde{i}(t)/\tilde{v}(t)$ suponiendo que está excitado por una $\tilde{v}(t) = V_m \sin \omega t$. c) Para más generalidad, haciendo uso del concepto de fasor para representar funcionamiento sinusoidal puro, calcular con carácter general (para las pequeñas señales) $Z(j\omega) = V(j\omega)/I(j\omega)$ y particularizar los resultados para $\beta - \alpha = -1, +1$.

SOL.: a) Por ser $i^{(\beta)}$-controlada, designando $\xi = v^{(\alpha)}$ y $\eta = i^{(\beta)}$ es

$$\xi = f(\eta)$$

Si además se supone que opera en $Q(\xi_Q, \eta_Q)$ con variaciones $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, es decir, $\xi = \xi_Q + \tilde{\xi}$ y $\eta = \eta_Q + \tilde{\eta}$, se puede escribir

$$\tilde{\xi} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\tilde{\eta} + \varepsilon = m_Q \tilde{\eta} + \varepsilon$$

siendo m_Q la pendiente de $f(\cdot)$. Si aquellas variaciones son suficientemente pequeñas $\varepsilon \to 0$. Como además es

$$\xi = \xi_Q + \tilde{\xi} = v^{(\alpha)}\Big|_Q + \tilde{v}^{(\alpha)}$$
$$\eta = \eta_Q + \tilde{\eta} = i^{(\beta)}\Big|_Q + \tilde{i}^{(\beta)}$$

se dispone de la relación *lineal* entre las variaciones de la corriente y la tensión, es decir

$$\tilde{v}^{(\alpha)} = m_Q \tilde{i}^{(\beta)}$$

b) En el caso $(\alpha, \beta) = (2, 0)$, corresponde a un elemento de característica incremental $\tilde{v}^{(2)} = m_Q \tilde{i}^{(0)}$ o $\tilde{i} = m_Q^{-1}\tilde{v}^{(2)} = kd^2v/dt^2$, para el cual, con la $v(t) = V_m \sin \omega t$, resulta $\tilde{i} = m_Q^{-1}\tilde{v}^{(2)} = -m_Q^{-1}\omega^2 V_m \sin \omega t$ es decir $\tilde{i}(t)/\tilde{v}(t) = -m_Q^{-1}\omega^2 V_m$, es decir en ac se comporta como una *conductancia negativa dependiente de la frecuencia*.

c) Supuesto que $\tilde{i}(t)$ es una señal sinusoidal de la forma $\tilde{i}(t) = I_m cos(\omega t + \varphi) = Re[I(j\omega)e^{j\omega t}]$, siendo $I(j\omega)$ el fasor de la transformación fasorial, definido como $I(j\omega) = I_m e^{j\varphi} = I_m \angle \varphi$, es sencillo obtener

$$Z(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = (j\omega)^{\beta-\alpha} m_Q$$

Esta expresión de $Z(j\omega)$ puede conducir a casos puramente resistivos, $R(\omega)$ como hemos visto, reactivos del tipo $j\omega L(\omega)$ o del tipo $1/j\omega C(\omega)$ dependiendo de los valores que adopte $\beta - \alpha$. Como se ve, se obtienen elementos no usuales: resistencias, capacidades e inductancias *dependientes de la frecuencia*.

d) Para $\beta - \alpha = -1$ se obtiene $Z(j\omega) = 1/[j\omega m_Q^{-1}]$ correspondiendo a un condensador de capacidad m_Q^{-1}.

En el caso $\beta - \alpha = +1$ se obtiene $Z(j\omega) = j\omega m_Q$ correspondiendo a un inductor de autoinducción m_Q.

Nota: Ciertos fenómenos físicos presentan comportamientos similares a los tratados. P. ej. el *efecto skin*[67] es una $R(\omega)$, un *varactor* a altas frecuencias exhibe una $C(\omega)$, un *inductor solenoidal* una $L(\omega)$, etc.

[67] Cuando se estudia elctromagnéticamente el efecto de una correinte alterna en un conductor (incluso rectilíneo) se encuentra que las líneas circulares de campo magnético que lo rodean aumentan su densidad tanto más nos acerquemos al eje del mismo. Al variar en forma alterna la corriente, los cambios en tal campo magnético también son periódicos e inducen una fuerza electromotriz en sus bornes que se opone a los cambios de corriente. Debido a ésto la distribución de la densidad de corriente en el conductor es mayor en la periferia del conductor que en el eje del mismo, reduciendo la *sección eficaz* del mismo. A más frecuencia este efecto es más intenso razón por la cual aumenta su resistencia con la frecuencia. Para distinguir este efecto (*efecto skin*) se suele denominar a la resistencia cc resistencia *real* u *óhmica*.

21. Sean $h_1(v_1,v_2,i_1,i_2)=0$ y $h_2(v_1,v_2,i_1,i_2)=0$ la relación constitutiva de un resistor de tres terminales (o de dos puertas). Si $h_1(\cdot)$ y $h_2(\cdot)$ son lineales, se pide: a) ¿Bajo qué condiciones existe la *forma explícita* i-controlada $v=f(i)$?. b) ¿Y la forma v-controlada $i=g(v)$?.

SOL.: a) Si $h_1(\cdot)$ y $h_2(\cdot)$ son lineales, entonces es $h=Mv+Ni$ con

$$h_1(\cdot)=a_{11}v_1+a_{12}v_2+b_{11}i_1+b_{12}i_2$$
$$h_2(\cdot)=a_{21}v_1+a_{22}v_2+b_{21}i_1+b_{22}i_2$$

Nótese que los coeficientes deben ser finitos (lo que no excluye que eventualmente cualesquiera de ellos puedan ser cero). Para que exista la forma i-controlada $v=Ri$, es decir

$$v_1=r_i i_1+r_r i_2$$
$$v_2=r_f i_1+r_o i_2$$

Debe verificarse (Cramer)

$$\det[M]=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

O, lo que es lo mismo, en términos del Jacobiano[68], $J(\frac{h}{v})\neq 0$.

b) Para que exista la forma v-controlada $i=Gv$, partiendo del resultado precedente, $v=Ri$ es obvio que debe ser

$$\det[R]=\begin{vmatrix} r_i & r_r \\ r_f & r_o \end{vmatrix}\neq 0$$

es decir $J(\frac{v}{i})\neq 0$

En lugar de seguir este camino, podría aplicarse Cramer directamente a las ecuaciones $h(v,i)=0$ para obtener v, lo cual nos conduce a la condición $\det[N]\neq 0$, que es lo mismo que decir $J(\frac{h}{v})\neq 0$.

Es fácil ver que se cumplen las siguientes relaciones matriciales

$$R=-M^{-1}N \quad G=-b^{-1}M \quad con\ R=G^{-1}$$

En particular, de la primera se puede escribir $\det[MR]=\det[N]$, es decir $\det[M]\det[R]=\det[N]$, o lo que es lo mismo $J(\frac{h}{v})J(\frac{v}{i})=J(\frac{h}{i})$. También se verifica, como era de esperar, $J(\frac{h}{i})J(\frac{i}{v})=J(\frac{h}{v})$.

22. Si en el problema anterior $h_1(v_1,v_2,i_1,i_2)=0$ y $h_2(v_1,v_2,i_1,i_2)=0$ son no lineales: a) ¿Bajo qué condiciones existe la *forma explícita* i-controlada, $v=f(i)$?. b) ¿Y la forma $i=g(v)$?.

SOL.: a) El *Teorema de la función implícita* garantiza que si en la región considerada es

$$J(\frac{h}{v})\neq 0$$

entonces existe la forma explícita citada, es decir

$$v=f(i)$$

en dicha región, suponiendo que $h_1,h_2\in C^1$ (derivadas continuas) en esa región.

b) Tomando como punto de partida la existencia de $v=f(i)$ que acabamos de ver, el *Teorema de la función inversa* garantiza que si en la región considerada es

$$J(\frac{v}{i})\neq 0$$

[68] El Jacobiano de una función $h=(h_1,h_2)^T$ dependiente de las variables $v=(v_1,v_2)^T$, respecto de las mismas, es

$$J(\frac{h}{v})\equiv\begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial v_1} & \frac{\partial h_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial v_1} & \frac{\partial h_2}{\partial v_2} \end{vmatrix}$$

y es aplicable al caso en que las componentes de h sean lineales o no lineales entonces existe la función inversa $i = f^{-1}(v)$ que designamos por $i = g(v)$.

Nótese que en cada punto de esa región también ha de ser $J(\frac{h}{v})J(\frac{v}{i}) = J(\frac{h}{i})$ (y ésta última es no nula sii lo es -no nula- cada uno de los factores del primer miembro). La similitud de este resultado con el del problema anterior se comprende mejor si en este caso fijamos nuestra antención en lo que sucede en un entorno de cada punto tan pequeño como se quiera para que pudieran considerarse aceptables las representaciones lineales en el mismo.

23. Para el mismo elemento no lineal del problema anterior, supuesto i-controlado, es decir $v = f(i)$, se desea saber cual es la condición de *independencia no lineal* de ambas ecuaciones, es decir de $v_1 = f_1(i_1,i_2)$ y $v_2 = f_2(i_1,i_2)$. a) ¿Qué significa la citada condición?. b) ¿Cómo se particulariza en el caso lineal?.

SOL.: a) El *Teorema de independencia no lineal* de $v_1 = f_1(i_1,i_2)$ y $v_2 = f_2(i_1,i_2)$ dice que ambas ecuaciones son dependientes (es decir $\exists\phi(v_1,v_2) = 0$) si y sólo si $J(\frac{f}{i}) = 0$, es decir

$$J(\tfrac{f}{i}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\phi(v) = 0$$

Para que la formulación tableau dé lugar a ecuaciones independientes los elementos de circuito deben estar definidos por ecuaciones independientes, es decir el elemento del problema debe verificar

$$J(\frac{f}{i}) \neq 0$$

b) Se cumple la misma condición, es decir si $v = ri$ y se quiere que v_1 y v_2 sean independientes $(\neg\exists\phi(v) = 0)$, debe ser

$$J(\frac{f}{i}) = \begin{vmatrix} r_i & r_r \\ r_f & r_o \end{vmatrix} \neq 0$$

es decir, $r_i r_o \neq r_f r_r$ en el punto $i = (i_1,i_2)^T$ considerado.

24. Con referencia al ejercicio precedente, suponer que una bipuerta no lineal i-controlada, en un punto de trabajo (I_{1Q},I_{2Q}) dado posee los siguientes parámetros: $r_i = 1000\Omega$, $r_r = 0{,}1\Omega$, $r_f = 10^4\Omega$, $r_o = 1\Omega$. a) Si se excita con fuentes de corriente de pequeña señal, tales que $i_1 = i_{g1}$ e $i_2 = i_{g2}$, calcular las tensiones obtenidas, v_1 y v_2. b) Si se excita con fuentes de tensión de pequeña señal, tales que $v_1 = v_{g1}$ y $v_2 = v_{g2}$, calcular las corrientes obtenidas, i_1 y i_2. c) Para este último caso explicar los resultados tanto analítica como físicamente, suponiendo que $v_{g1} = V$, $v_{g2} = 0$ y que $r_i r_o / r_r r_f = 1 + \varepsilon$ con $\varepsilon \neq 0$, pero tan pequeño como se quiera. Calcular la potencia absorbida de v_{g1} así como la resistencia equivalente.

SOL.: a) En este caso (utilizando para abreviar $x(t)$ en lugar de $\tilde{x}(t)$) es

$$\begin{aligned} v_1 &= 10^3 i_{g1} + 0{,}1 i_{g2} \\ v_2 &= 10^4 i_{g1} + i_{g2} \end{aligned}$$

Como era de esperar para todo par de reales (i_{g1},i_{g2}), supuestos suficientemente pequeños, están bien definidos los valores de las respuestas obtenidas, (v_1,v_2).

b) Ahora debe ser

$$\begin{aligned} v_{g1} &= 1000 i_1 + 0{,}1 i_2 \\ v_{g2} &= 10^4 i_1 + i_2 \end{aligned}$$

Las respuestas ahora son (i_1,i_2). Si se pretende su cálculo resulta que no están definidos valores únicos[69] para i_1 e i_2 por ser $\det[R] = 0$. Algo similar podría decirse para i_2. Nótese que si $\det[R] \neq 0$ no se obtendría tal resultado.

[69]Obsérvese que $\det[R] = 0$ implica que no hay solución o hay infinitas soluciones (lo último ocurre, p. ej. para i_1, si y solo si $v_{g1} = 0{,}1 v_{g2}$). Compruébese el significado circuital de estas cuestiones, suponiendo $v_{g2} = 0$, dibujando el circuito correspondiente a las ecuaciones implicadas.

De otra forma, para esta red no lineal en el punto considerado es $J(\frac{f}{i})\det[R]=0 \Leftrightarrow \exists\phi(v)=0$, es decir v_1 y v_2 no son independientes (compruébese que $v_2=10v_1$).

c) Con los datos de este apartado, sea cual sea el valor de i_2, es $i_1=(V-r_r i_2)/r_i$. Nótese que esta expresión incorpora el efecto de la respuesta i_2 sobre i_1 (interacción de la malla de salida sobre la de entrada).

Por otra parte el efecto de i_1 sobre i_2 (interacción de la entrada sobre la salida) está dada por $i_2 = -(r_f/r_o)i_1$.

Pues bien, la *realimentación* que implican ambas interacciones simultáneas (ambas expresiones) conduce a

$$i_1=(\varepsilon+\tfrac{1}{\varepsilon})V \qquad i_2=-\tfrac{r_f}{r_o}(\varepsilon+\tfrac{1}{\varepsilon})V$$

Por consiguiente tal realimentación tiende a provocar, al hacer ε tan pequeño como se quiera

$$\text{lím}_{\varepsilon\to 0}\, i_1(\varepsilon)=+\infty \qquad \text{lím}_{\varepsilon\to 0}\, i_2(\varepsilon)=-\infty$$

como era de esperar.

También puede decirse, utilizando V/i_1, que la resitencia de entrada (la vista por la fuente V) es

$$R_{in}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+1}$$

Es una función continua que pasa por el origen, $\text{lím}_{\varepsilon\to 0} R_{in}(\varepsilon)=0$. Nótese la peculiaridad de que por la izquierda, $\varepsilon=\varepsilon_-<0$, es $R_{in}(\varepsilon_-)<0$ es decir ¡una *resistencia negativa*!.

Este comportamiento lo entendemos mejor en términos de la potencia que recibe tal bipuerta (con $v_{g2}=0$) de la fuente V. En efecto, es

$$P_{in}=Vi_1=\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon}V^2$$

La representación gráfica es interesante, en efecto $P_{in}(\varepsilon_+)>0$ con $\varepsilon=\varepsilon_+>0$, pero $P_{in}(\varepsilon_-)<0$ con $\varepsilon=\varepsilon_-<0$, que explica que en la región de *resistencia negativa* la puerta *genera energía* (absorbe energía negativa) en lugar de disiparla, se dice que presenta realimentación positiva. Nótese también que presenta una discontinuidad infinita en el origen. Esta discontinuidad nos da pie para decir que si también $V\to 0$, se obtiene el límite doble $\text{lím}_{\varepsilon\to 0, V\to 0} P_{in}=0$.

25. Demostrar que una bipuerta formada por la interconexión de elementos a lo sumo LTV (lineales y t-variantes, conteniendo eventualmente elementos t-invariantes, pero nunca elementos no lineales), también es LTV y posee solución única $\forall t$, si $\det T(t)\neq 0$, siendo $T(t)$ la matriz tableau.

SOL.: a) Si las excitaciones independientes son de tensión en ambas puertas serían de la forma $v_i=u_{si}(t)$ con $i=1,2$, si fueran de corriente tendrían la forma $i_j=u_{sj}(t)$ con $j=1,2$, y si fueran mixtas tendríamos una de cada tipo. Del enunciado se deduce que todos los elementos responderían a la forma $m_k(t)v_k+n_k(t)i_k=0$. Del planteamiento de las ecuaciones tableau (hágase) se deduce que en su forma compacta tendrían la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \\ -A^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M(t) & N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ u_s(t) \end{pmatrix}$$

Donde e, v e i son los vectores correspondientes, $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son matrices $b\times b$ y $M(t)$ y $N(t)$ son matrices diagonal que contienen los respectivos parámetros de los elementos.

La *primera conclusión* de este resultado es que corresponde a un sistema LTV. La segunda podemos plantearla después de expresar el sistema anterior en la forma

$$T(t)w(t)=u(t)$$

y es que posee *solución única* $\forall t$ si $\det T(t)\neq 0$.

Por último, si ésto se cumple, para cualquier par de excitaciones (ξ_1, ξ_2) de entre las citadas sobre sus dos puertas, las respuestas obtenidas, dadas por las covariables (η_1, η_2) de las mismas puertas, tendrían la forma

$$\eta_1 = a(t)\xi_1 + b(t)\xi_2$$
$$\eta_2 = c(t)\xi_1 + d(t)\xi_2$$

donde $a(t), ...d(t)$ son funciones reales definidas para todo t. Este elemento es por tanto *bipuerta, resistivo, lineal y t- variante*, es decir *LTV*.

26. Construyamos un circuito con un BJT idealizado excitando sus tres terminales (en la zona activa) en la forma que se indica

$$\begin{array}{lll}
circuit\ Ej_conveyor_BJT & & \\
q1 & 1\,2\,3 & npn\, v_1 = V_\gamma\, i_2 = \beta_F\, i_1\ \{z.a.\} \\
i1 & 0\,3 & i_3 = I_3\ \forall v_3 \\
v1 & 2\,0 & v_1 = V_4\ \forall i_4 \\
v2 & 1\,0 & v_5 = V_5\ \forall i_5 \\
end & &
\end{array}$$

se pide explicar su operación aproximada como conveyor.

SOL.: a) Si $V_5 > V_4$ y si $I_3 < 0$ el BJT estará en la zona activa. En esas condiciones, utilizaremos en lo que sigue la notación del conveyor: $B \equiv Y$ indicando por i_Y la corriente de entrada por ese terminal (i_B), $E \equiv X$ indicando por i_X la suya (i_E), y $C \equiv Z$ indicando por i_Z a i_C. Con esta notación, utilizando las ecuaciones del BJT (dadas en cc) es:

$$\begin{array}{ll}
i_Y = i_X/(\beta_F+1) \simeq 0 & \{Y\, alta\, impedancia\} \\
v_X = v_Y - V_\gamma \simeq v_Y & \{v_X\, sigue\, a\, v_Y\} \\
i_Z = -\beta_F i_E/(\beta_F+1) \simeq -i_E = -i_X & \{i_X\, se\, refleja\, en i_Z\}
\end{array}$$

Nótese que en pequeña señal, el BJT dado en el enunciado se caracterizaría como una fuente de corriente de ganancia h_{fe} y la similitud todavía sería mayor.

27. Sea el elemento compuesto de circuito *subckt ElemCompA* 1 2 $h(v,i) = 0$ definido por las interconexiones de los elementos siguientes

$$\begin{array}{llll}
subckt\ ElemCompA & 1 & 2 & \\
v1 & 1 & 2 & v_1 = E_0\, \forall i_1 \\
i2 & 2 & 1 & i_2 = I_0\, \forall v_2 \\
ends & & &
\end{array}$$

Suponiendo E_0 e I_0 constantes no nulas, se pide: a) Dibujar el circuito. b) Se desea obtener la relación constitutiva $h(v,i) = 0$ en forma explícita y además la corriente i_1 que circularía por el elemento $v1$. A este respecto, para variar v (cualquier valor real), ¿se puede excitar el subcircuito entre los nodos externos 1 y 2 con un generador independiente de tensión $v = v_{ext}$?, para variar i ¿se puede usar un generador externo de corriente $i = i_{ext}$?. c) ¿Podría conectarse a *ElemCompA* entre los bornes externos 1 y 2 una resistencia de valor R?, calcular gráficamente el punto de trabajo y la corriente i_1, mostrando su variación con R. d) Idem analíticamente utilizando MNA. Si $E_0 = 3V$ e $I_0 = 10^{-4}A$, ¿existe solución $\forall R$?, ¿cuál es la solución para $R = 1K\Omega$? y ¿para $R = -1K\Omega$?.

SOL.: a) Se debe trazar el circuito, así como el grafo para cada uno de los apartados, aun cuando la notación utilizada es suficiente para resolver el problema, como se verá.

b) Con $v = v_{ext}$ no, ya que LVK implicaría $v_1 = v_{ext}$ cuando a través del elemento es $v_1 = E_0$ y a través de la excitación $v_{ext} = \alpha \,\forall \alpha \in R$. Con una $i = i_{ext}$ (siempre que la solución exista, como veremos después) sí, en principio, lo que nos conduce a las dos variables dependientes de interés del problema,

$$v = E_0 \,\forall i \quad i_1 = I_0 + i$$

la primera define la *relación constitutiva* resultante del $subcto\,prob1$ 1 2 $h(v,i) = 0$, el cual se comporta como una fuente de voltaje ideal de valor E_0. La segunda nos indica cómo variaría $i_1 = \widehat{i}_1(i)$ en el interior del subcircuito del enunciado.

c) Si al elemento definido por las dos ecuaciones anteriores se le conecta $r3$ 1 2 $v_3 = Ri_3$, como $v_3 = v$ e $i_3 = -i$, la intersección de $v = -Ri$ con la relación constitutiva del subcircuito nos resuelve gráficamente el problema, es decir aporta el valor de i que llevado a la gráfica $i_1 = \widehat{i}_1(i)$ completaría la solución gráfica.

d) Las variables MNA, tomando el nodo 2 como referencia, son (e_1, i_1), y las ecuaciones

$$\begin{aligned} Ge_1 + i_1 &= I_0 \\ e_1 &= E_0 \end{aligned}$$

que nos proporciona las soluciones $(e_1, i_1) = (E_0, I_0 - GE_0)$, y cualesquiera otras mediante el resto de las ecuaciones tableau. La condición de existencia de solución es $\Delta \neq 0$ ó $(1/R) \times 0 - 1 \times 1 \neq 0$, lo cual es cierto siempre que $R \neq 0$ (nótese en el apartado anterior que una $R = 0$, se comporta como una fuente de tensión nula, está en paralelo con $E_0 \neq 0$ según el enunciado). De las expresiones (y de las gráficas) se deduce que $e_1 = 3V$ de donde $i_1 = I_0 - GE_0$ con lo que $i_1(R = 1K\Omega) = -2{,}9mA$ y $i_1(R = -1K\Omega) = 3{,}1mA$.

28. Sea el elemento de circuito que denominaremos $subckt\ ElemCompB$ 1 4 cuya relación constitutiva está definida por las interconexiones de los elementos siguientes

$$\begin{array}{llllll}
subckt\,ElemCompB & 1 & 4 & & & \\
\pi 1 & 3 & 4 & 1 & 2 & v_{3_4} \equiv v_1 = f(v_{1_2}) \forall i_1 \; i_{1_2} = 0 \\
r2 & 1 & 4 & & & i_2 = 2Gv_2 \\
r3 & 1 & 3 & & & i_3 = Gv_3 \\
r4 & 2 & 3 & & & i_4 = G'v_4 \\
r5 & 2 & 4 & & & i_5 = 3G'v_5 \\
ends & & & & &
\end{array}$$

siendo $\pi 1$ un AO con corrientes de entrada nulas y la ganancia, $f(\cdot)$ es A en la z.a. y posee dos niveles de saturación simétricos $\pm E$. Se pide: a) Dibujar el subcircuito. b) Suponer que este elemento compuesto (subcircuito) se excita con un generador de voltaje independiente V_g constante, para lo que se construye el circuito siguiente

$$\begin{array}{llll}
circuit\,circuitoXX & & & \\
x1\,ElemCompB & 1 & 4 & \\
v6 & 1 & 4 & v_6 = V_g \forall i_6 \\
end & & &
\end{array}$$

Se pide plantear las ecuaciones MNA generales, utilizando $f(\cdot)$ en las mismas, pero indicando aparte los casos particulares que pueden darse y sus condiciones de validez. c) Suponiendo ahora que $A_0 \to \infty$, $\pm E = \pm 12V$ y $G = 2mS$ Calcular y representar la gráfica $I(V_g)$ siendo I la corriente de entrada en el subcircuito.

SOL.: a) Se debe trazar el circuito, así como el grafo, aun cuando la notación utilizada es suficiente para resolver el problema, como se verá. Se observa que las variables externas al subcircuito poseen una codificación no contradictoria con la que se utiliza en la definición del subcircuito, por lo que podemos conservar la notación completa del enunciado.

b) Tomando el nodo 4 como nodo de referencia, las variables MNA son $(e_1, e_2, e_3, i_1, i_6)^T$ y las ecuaciones pedidas son

$$\begin{array}{ll} nodo1: & 3Ge_1 - Ge_3 + i_6 = 0 \\ nodo2: & 4G'e_2 - G'e_3 = 0 \\ nodo3: & -Ge_1 - G'e_2 + (G+G')e_3 + i_1 = 0 \\ AO: & e_3 - f(e_1 - e_2) = 0 \\ V_g: & e_1 = V_g \end{array}$$

Apareciendo tres regiones de operación según el punto de trabjo del AO, a saber:

$$\begin{array}{llll} Regiones: & Activa & Saturación+ & Saturación- \\ f(e_1 - e_2): & A(e_1 - e_2) & +E & -E \\ Validez: & \forall e_3 \in (-E, E) & \forall (e_1 - e_2) \in (\frac{E}{A}, \infty) & \forall (e_1 - e_2) \in (-\infty, -\frac{E}{A}) \end{array}$$

Antes de resolver cada caso se observa que la ecuación correspondiente al nodo 3 será superflua ya que no se requiere el valor de i_1 en el resto del problema.

c) Para resolver cada caso aplicamos las ecuaciones de interés

c1) Región activa: utilizaremos $e_1 = V_g$ y para el AO: $e_2 = e_1 = V_g$ (al $A \to \infty$), con lo cual el sistema a resolver es

$$\begin{array}{r} -Ge_3 + i_6 = -3GV_g \\ -G'e_3 = -4G'V_g \end{array}$$

Lo que proporciona la ecuación de la gráfica pedida $-i_6 = I(V_g) = -GV_g$, es decir $I(V_g) = -2 \times 10^{-3} V_g\,(A)$, y además, lo cual es importante, el valor $e_3 = 4V_g$, de utilidad para aplicar las condiciones de validez de la zona activa: $-E < 4V_g < E$, es decir $V_g \in (-E/4, +E/4) = (-3, +3)$.

c2) Región de saturación +: Ahora sólo podemos utilizar $e_1 = V_g$ y $e_3 = +E$ con lo cual las ecuaciones son

$$\begin{array}{r} i_6 = -3GV_g + GE \\ 4G'e_2 - G'E = 0 \end{array}$$

Lo que proporciona la ecuación de la grágica pedida $-i_6 = I(V_g) = 3GV_g - GE$, es decir $I(V_g) = 6 \times 10^{-3} V_g - 36 \times 10^{-3}\,(A)$, y además, lo cual es importante, el valor $e_2 = E/4$, de utilidad para aplicar las condiciones de validez en $+E$: $E/A < V_g - \frac{E}{4} < \infty$, es decir $V_g \in (E/4, +\infty) = (3, +\infty)$. También se observa que $I(V_g)$ es continua en el punto de intersección, en efecto: $\lim_{Vg \to (E/4)_-} I(V_g) = \lim_{Vg \to (E/4)_+} I(V_g) = -GE/4$.

c3) Región de saturación -: Por analogía es fácil deducir que ir $I(V_g) = 3GV_g + GE = 6 \times 10^{-3} V_g + 36 \times 10^{-3}\,(A)$, con $e_2 = -E/4$, lo que conduce a la condición de validez: $V_g \in (-\infty, E/4) = (-\infty, 3)$. El resultado final es

$$I(V_g) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3GV_g - GE & si & V_g \in (E/4, +\infty) \\ -GV_g & si & V_g \in (-E/4, +E/4) \\ 3GV_g + GE & si & V_g \in (-\infty, -E/4) \end{array} \right.$$

29. a) Demostrar que el transformador ideal de tres puertas, el multiplicador analógico ideal, el AO ideal y el circulador ideal de tres puertas, son elementos no energéticos (sin pérdidas o *lossless*). b) Idem el “inductores acoplados” mostrando el efecto de la simetría de su matriz.

SOL.: a) Hágase

30. Dibujar la característica resultante del acoplamiento serie, antiserie, paralelo y antiparalelo de dos resistores no lineales de característica dada por $i = (v - a) \vee [v \wedge (a - v)]$. Distinguir en los resultados los casos $i-$controlados de los $v-$controlados.

SOL.: a) Hágase

31. Sea un elemento definido por $h_1(v_1, i_1) = 0$ controlado por voltaje y otro $h_2(v_2^{(-1)}, i_2) = 0$ controlado por flujo. Obtener la relación constitutiva del acoplamiento en serie directo de ambos. ¿Qué tipo de elemento resulta?¿Para los posibles acoplamientos serie cambia el tipo de elemento?¿Y en paralelo?

    SOL: Las ecuaciones que deben añadirse a las dadas para poder representar la característica conjunta de ambos son

    $$v = v_1 + v_2$$
    $$i = i_1 = i_2$$

    Por consiguiente las ecuaciones que definen el conjunto (conviertiendo a las variables internas que no puedan eliminarse en variables anónimas) son

    $$v = x_1 + x_2$$
    $$i = g_1(x_1)$$
    $$i = g_2(x_2^{(-1)})$$

    Resultando un elemento dinámico de dos terminales con dos variables internas adicionales. Se puede obtener una única expresión sólo si nos restringimos a los rangos de x_1 y de x_2 en los que existan las funciones inversas g_1^{-1} y g_2^{-1} que llamaremos f_1 y f_2 respectivamente. En estos intervalos será: $x_1 = f_1(i)$ y $x_2^{(-1)} = f_2(i)$. Si además $f_2(i)$ fuera derivable $x_2 = (df_2(i)/di)(di/dt) = \varphi(i)i^{(+1)}$ con lo cual la relación constitutiva resultante, $h(v,i) = 0$, sería en dichas regiones

    $$v - f_1(i) - \varphi(i)i^{(+1)} = 0$$

    Como se desprende de las ecuaciones, los tres posibles acoplamientos serie no considerados son deducibles de éste mediante simples cambios de signo. Aunque darán lugar a un elemento compuesto diferente, el tipo es el mismo, es decir dinámico en $v, i, i^{(+1)}$. Algo similar sucede con los cuatro posibles acoplamientos en paralelo.

32. Dado el elemento dinámico descrito por la relación textual siguiente

subckt ElemCompC	1	4			
$r1$	1	2			$i_1 = Gv_1$
$f1$	2	3	1	$1'$	$i_2 = 4i_1 \ v_{1\_1'} = 0$
$l1$	1	3			$\phi_3 = 3^{-3} i_3^3$
$c1$	3	4			$q_4 = Cv_4$
ends					

    Se pide: a) Obtener su relación constitutiva, ¿cuál es el orden del elemento?, ¿porqué?. b) Utilizando el Teorema 2 sintetizar la misma relación constitutiva utilizando como elementos almacenadores de energía solamente inductores (de $L = 1H$).

    SOL: Hágase

33. Expresar textualmente el elemento dinámico completo (dos terminales) al que hace referencia el Teorema de descomposición, haciendo uso de la notación introducida para xj y de la definición allí dada de *ResNL*.

    SOL: Bastaría utilizar

subckt ElmntoDinT2	$0\,0'$	$\{1\,puerta\}$
$x1\,ResNL$	$0\,0'\,1\,1' \cdots \alpha\,\alpha'$	$\{\alpha + 1\,puertas\}$
$c1$	$1\,1'$	$C = 1F$
$c2$	$2\,2'$	$C = 1F$
...	...	...
$c\alpha$	$\alpha\,\alpha'$	$C = 1F$
ends		

34. Para el circuito lineal dado en la *forma textual* siguiente (ver Ej. 6.2 del Capítulo 6):

$r1$	1	3			$i_1 = G_1 v_1$
$r2$	3	5			$i_2 = G_2 v_2$
$r3$	2	4			$i_3 = G_3 v_3$
$r4$	4	6			$i_4 = G_4 v_4$
$e1$	5	6	4	3	$v_5 = A v_8 \; i_8 = 0$
$v1$	1	6			$v_6 = v_{s1}(t) \, \forall i_6$
$v2$	6	2			$v_7 = -v_{s2}(t) \, \forall i_7$

donde se supone que el elemento *e1* representa a un AO ideal (con $i_+ = i_- = 0$) que se supone que opera en la región activa con una ganancia $A > 0$. a) Obtener las ecuaciones de estado y la ecuación de salida para $v_o(t)$, salida del AO. Idem suponiendo $A \to \infty$. b) Transformar las ecuaciones de estado en términos de las variables naturales (x_1, x_2) en única ecuación escalar, b1) en términos de x_1 solamente, b2) En términos de x_2 solamente. c) Relacionar los parámetros de ambas formulaciones.

SOL.: a) Hágase

Ejercicios complementarios

1. Obtener: a) La potencia disipada por un condensador no lineal y un inductor no lineal. b) La de un transformador ideal y la de un girador ideal. c) ¿Como se comporta este último si se carga con un resistor controlado por tensión?¿Y por un condensador lineal?.

2. Se pide: a) ¿Las fuentes controladas son activas o pasivas?. Dar algún ejemplo. b) ¿Lo son los BJT, y el AO?. ¿Porqué?. c) De las 4 fuentes controladas VCVS, VCVS, CCVS y CCCS ideales sólo 2 de esta familia son suficientes para obtener cualquiera de ella ¿cuáles?¿cómo?

3. Demostrar que el transformador ideal de tres puertas, el multiplicador analógico ideal, el AO ideal y el circulador ideal de tres puertas, son elementos no energéticos (sin pérdidas o *lossless*). Idem el "inductores acoplados" mostrando el efecto de la simetría de su matriz .

4. Suponer que la bipuerta resistiva dada por $\pi 7 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad v_1 = \widehat{v}_1(i_1, v_2) \quad i_2 = \widehat{i}_2(i_1, v_2)$ representa a un BJT en E-común. a) Representar la característica de salida (en forma paramétrica con $i_1$como parámetro) extendiéndola a las zonas activas directa e inversa. b) Obtener gráficamente (o indicar el procedimiento) h_{fe} y h_{oe} en un Q_1 situado en la región directa y en un Q_2 en la región inversa. c) Tipo de parámetros de pequeña señal y denominación precisa de los mismos. c) Representar el circuito equivalente de pequeña señal. d) Plantear circuitos de medida para los cuatro parámetros del circuito equivalente.

5. Dibujar la característica resultante del acoplamiento serie, antiserie, paralelo y antiparalelo de dos resistores no lineales de característica dada por $i = (v - a) \vee [v \wedge (a - v)]$. Distinguir en los resultados los casos $i-$controlados de los $v-$controlados

6. Dado el elemento dinámico descrito por la relación textual siguiente

$$\begin{array}{llllll}
subckt\ ElemCompC & 1 & 4 & & & \\
r1 & 1 & 2 & & & i_1 = Gv_1 \\
f1 & 2 & 3 & 1 & 2 & i_2 = 4i_1 \\
l1 & 1 & 3 & & & \phi_3 = 3^{-3} i_3^3 \\
c1 & 3 & 4 & & & q_4 = Cv_4 \\
ends & & & & &
\end{array}$$

   se pide: a) Obtener su relación constitutiva, ¿cuál es el orden del sistema?¿porqué?. b) Utilizando el Teorema 2 sintetizar la misma relación constitutiva utilizando como elementos almacenadores de energía solamente inductores (de $L = 1H$).

7. Para el mismo Ejercicio complementario nº 5 del Cap. 1 (circuito lineal con un AO y dos C) se pide: a) Obtener las ecuaciones de estado y la ecuación de salida para $v_o(t)$, salida del AO. b) Transformar las ecuaciones de estado en términos de (x_1, x_2) en única ecuación escalar, b1) en términos de x_1 solamente, b2) En términos de x_2 solamente. c) Relacionar los parámetros de ambas formulaciones.